浙江大学

本科生毕业论文（设计）

题目	紧复曲面：直纹面
姓名与学号	3080030131 胡迅韬
指导教师	郑方阳
年级与专业	2008 数学与应用数学
所在学院	理学院

目 录

摘 要

本文是对紧复曲面上除子与线丛，几何与拓扑不变量以及直纹面进行的一个综述。本文的第 1 章叙述了除子类群和曲面的 Picard 群的等价，并引进相交数。在此基础上引入了从属公式 (Adjunction Formula)。并在最后一节引入了曲面的双有理等价类，并说明了同一个双有理等价类内的曲面可以通过有限次吹起 (Blow-ups) 和吹落 (Blow-downs) 互相转换。

第 2 章主要是讲几何与拓扑不变量。其中 (2.1) 中定义了陈类，并用陈类的虚拟根定义了陈特征和 Todd 类，并叙述了 Hirzebruch-黎曼洛克定理。(2.2) 是一些基本拓扑量的计算。(2.3) 引入了曲面 Enrique-Kodaira 分类的依据：Kodaira 维数和代数维数。其中讨论了代数维数 $a(M^2) = 2$ 的情形。

第 3 章讨论的是 Kodaira 维数 $\kappa = -\infty$ 的情形。在 (3.1) 中我们介绍了一类重要的直纹面：Hirzebruch 曲面。(3.2) 的主定理保证了满足 $\kappa = -\infty$ 的极小代数曲面仅有直纹面和 $\mathbb{P}^2$，其中直纹面 $C \times \mathbb{P}^1$ 的双有理等价类唯一决定于 C。

关键词: 紧复曲面, 除子, 线丛, Kodaira 维数, 直纹面, Hirzebruch 曲面, 有理曲面

Abstract

This paper is a summary of results in compact complex surfaces, mainly on their divisors and line bundles, geometrical and topological invariants, ruled surfaces. The first chapter discribed the equivalence between the divisor class group and Picard group on a surface. Then intersection number and Adjunction formula were introduced. The last section defined the birational equivalence of surfaces, and claimed that surfaces in a same birational equivalence class could be connected by finitely many blow-ups and blow-downs.

Geometrical and Topological invariants were the main theme of the second chapter. In (2.1) we defined Chern Classes, and used its virtual roots to define Chern characters and Todd classes. Hirzebruch-Riemann-Roch theorem was introduced afterward. In (2.2) we calculated some topological invariants. Kodaira dimensions and algebraic dimensions were introduced in (2.3), which are the bases of Enrique-Kodaira classification on surfaces. We discussed the situation when algebraic dimension $a(M^2) = 2$.

In chapter 3 we discussed the situation when Kodaira Dimension $\kappa = -\infty$. We introduced in (3.1) an important type of ruled surfaces-Hirzebruch Surfaces. The main theorem in (3.2) guaranteed that all minimal algebraic surfaces satisfying $\kappa = -\infty$ are ruled surfaces and $\mathbb{P}^2$, and that the birational class of ruled surfaces $C \times \mathbb{P}^1$ is decided only by C.

Keywords:Compact Complex Surfaces, Divisors, Holomophic Line Bundles, Kodaira Dimension, Ruled Surfaces, Hirzebruch Surfaces, Rational Surfaces

前 言

紧复曲面是一个 2 维的紧复流形。有关这个方面的研究是以小平邦彦 (Kodaira Kunihiko)，恩里克 (Federigo Enriques) 等人在 20 世纪中叶，约 1949-1960 年代发展起来的一套关于紧复曲面的 Enrique-Kodaira 分类定理为巅峰。其分类依据为不同 Kodaira 维数的曲面按照双有理等价类的分类。EK 分类定理将曲面分为了十类，其中除了一般类型 (General-type) 的模空间还没有完全了解外，其它类别的模空间均已了解清楚。本文关心的是一类已经了解清楚的紧复曲面分类，即满足 $\kappa = -\infty$ 的紧的代数曲面。Kodaira 在 1968 年一篇论文里提出的有关极小代数曲面的**粗略分类定理** (Rough Classification Theorem):

ROC 定理 *任一极小代数曲面一定是下列情形之一:*
1) 射影平面 $\mathbb{P}^2$*,*$(K^2 = 9)$*,*
2)Hirzebruch 曲面 F_n*,*$(K^2 = 8)$*,*
3) 亏格 $g \geq 1$ *的光滑代数曲线上的* $\mathbb{P}^1$*-丛,*$(K^2 \leq 0)$*,*
4) 代数 K_3 *面,*$(K^2 = 0)$*,*
5)2 维代数环面 (tori),$(K^2 = 0)$*,*
6) 一般极小椭圆曲面,$(K^2 = 0)$*,*
7) 一般类型 (general-type) 极小曲面 $(K^2 \geq 1)$*.*

其中本文主要需要用到的是以下的结论：

定理 *满足* $\kappa(X^2) = -\infty$ *的代数的紧复极小曲面只有直纹面和* $\mathbb{P}^2$*, 特别的, 若* $q = 0$*, 则* $X = \mathbb{P}^2$ *或者* $X = F_n$*.*

其中直纹面即是一条光滑代数曲线上的 $\mathbb{P}^1$-丛。之所以上面的 ROC 分类定理中要求光滑代数曲线的亏格 $g \geq 1$ 是因为当亏格为 0 时，该直纹面与 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 双有理等价，而 $\mathbb{P}^2$ 属于这个等价类，并也是一张极小曲面。

我们将与 $\mathbb{P}^2$ 双有理等价的曲面称为**有理曲面**。有关有理曲面我们有如下著名的 *Castelnuovo* 有理性法则:

定理 *一张代数曲面是有理的当且仅当* $q = P_2 = 0$*.*

当 $\kappa(X^2) = -\infty$ 且曲面为代数时，若 $q > 0$，则曲面映入阿贝尼斯簇 (Albanese Variety) 的纤维为射影直线，即曲面为直纹面。若 $q = 0$，则由 Castelnuovo 有理性法则可知它为有理曲面。

有关直纹面，在 [1] 中，有如下的定理，其中 [10] 中归纳如下：

定理 *(i) 紧复曲线* C *上的任意直纹面* X^2 *一定是某个 2 维向量丛* $E \xrightarrow{\pi} C$ *的复射影化* $\mathbb{P}(E)$*.*
(ii) 紧复曲线 C *上的任意直纹面* X^2 *都与* $C \times \mathbb{P}^1$ *双有理等价. 且* $\mathbb{P}^1 \times C \sim \mathbb{P}^1 \times C'$ *可推出* $C = C'$*.*
(iii) 所有直纹面除了第一阶 Hirzebruch 曲面 F_1 *外都是极小曲面.*

1 紧复曲面上的除子与线丛

在复几何中, 一维的复流形由围绕黎曼面的各种研究, 我们已经比较清楚了. 而高维的复流形中, 最简单的即为复曲面. 而复曲面比 3 维以上的复流形拥有更多好的性质. 这一章我们将探讨我们研究紧复曲面中最重要的工具：除子与线丛, 并且引入双全纯等价的概念.

1.1 除子类群与 Picard 群

一个复流形 M 是一个局部与 $\mathbb{C}^n$ 中的一个邻域同构的拓扑空间. 具体定义如下：

定义 1. 令 M 为一个连通的第二可数的 Hausdorff 空间, 则 M 为一个复 n 维流形, 若：存在 M 的一个开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 使得 $U_\alpha \xrightarrow{f_\alpha} D_\alpha \subset_{open} \mathbb{C}^n$, 其中 f_α 满足 $f_\alpha \circ f_\beta^{-1}$ 为 $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ 上的双全纯映射.

换句话说, 在每个 U_α 上存在一族全纯坐标 $z_\alpha = z \cdot f_\alpha$, 其中 $z = (z_1 \dots z_n)$ 为 $\mathbb{C}^n$ 的标准坐标.

注. 我们熟知 $\mathbb{C}$ 到自身的全纯映射的定义, 而从 $\mathbb{C}^n$ 到自身的全纯映射即为对变元和因变元的每个坐标分量都全纯的映射. 我们还需要定义两个复流形之间的全纯映射.

定义 2. 映射 $\varphi : M_1^n \to M_2^m$ 为在 $p \in M_1$ 全纯的, 若存在 M_1 中 p 点的坐标邻域 (U_α, f_α), M_2 中 $\varphi(p)$ 的坐标邻域 (V_β, g_β), 使得 $g_\beta \circ \varphi \circ f_\alpha^{-1}$ 在 $f_\alpha(p)$ 处全纯. 我们称 φ 是全纯的, 若对任意的 $p \in M_1$, 它都是全纯的.

我们记 $\mathcal{O}(\mathcal{M}) = \{$ 所有从 M 到 $\mathbb{C}$ 的全纯映照 $\}$. 当 M 是紧的, 有 $\mathcal{O}(\mathcal{M}) = \mathbb{C}$, 因为由极大值原理, 在 f 的极大值点的一个邻域内, f 为常值, 故它在整个 M 上为常值.

在复曲面上, 我们一个很重要的对象是曲面上的曲线, 对于高维来说即为超曲面. 注意我们对流形的定义是局部的, 于是我们定义曲线也必须局部定义后再拼接为整体的曲线.

定义 3. 令 M 为一个紧复曲面, M 上的一条曲线 C 为 M 的一个闭子集, 满足局部为一个全纯函数的零点集. 换句话说：$\forall p \in M$, 存在 p 点的一个邻域 $U \subset M$, 使得 $\exists f \in \mathcal{O}(\mathcal{U})$, 满足 $C \cap U = \{f = 0\}$.
其中 f 称为 C 在 p 点处的*局部定义函数*.

一条曲线 C 称为可约的, 若存在 $C_1 \neq C, C_2 \neq C$, 满足 $C_1 \cup C_2 = C$. 一条曲线称为不可约的, 若它不是可约的. 事实上, 我们记 C 上所有光滑点的集合为 C_0, 它的每个连通分支的闭包都是一条不可约曲线.

我们用 f 记 C 在 p 的局部定义函数, 它在 $\mathcal{O}_p$ 上有一个素分解 $[f] = [f_1]^{n_1}\cdots[f_k]^{n_k}$, 那么在 $U \cap C = \{f = 0\} = \cup\{f_i = 0\}$. 对于 $\mathcal{O}_{\surd}$ 中的素元 f_i, $\{f_i = 0\}$ 对应着 p 附近的一条不可约曲线.

除子的定义可以看成超曲面定义的推广, 进一步说, 可以看成 M 上亚纯函数的推广. 我们知道 M 上的一个亚纯函数可以局部写为两个全纯函数的比值, 而 M 上的除子即为局部的亚纯函数的拼接.

我们将 M 上的一条不可约曲线称为**素除子**.

定义 4. *M 上的一个除子 D 为系数为整数的素除子的局部有限和, 即 $D = \sum a_i D_i$, 其中 $a_i \in \mathbb{Z}$, D_i 为 M 上的素除子, 对于任意的 $U \subset M$, 只有有限多个 i 使得 $a_i \neq 0$.*

若对任意 i, 都有 $a_i > 0$, 则该除子称为**正的** *(effective)*.

我们用 $Div(M)$ 记 M 上所有除子生成的阿贝尔群. 若 M 是紧的, 该群即为 M 上素除子生成的自由阿贝尔群. 我们需要在除子之间定义一个等价关系 $\equiv$, 从而使得 $Div(M)/\equiv$ 为我们需要的"除子类群". 为此, 我们首先需要定义除子类群的零元:

令 f 为 M 上的亚纯函数, 局部取 $f = g/h$ 满足 h 在该邻域上不恒为零, 则令 $Div(f) = \sum n_i\{g_i = 0\} - \sum k_j\{h_j\}$, 其中 g_i, h_j 为 g, h 在某点的局部环上的素因子. $Div(f)$ 称为 f 的**主除子** *(Principle Divisor)*.

我们定义除子 D, D' 等价, 若他们只相差一个主除子. 即 $D \equiv D'$, 若 $D - D' = Div(f)$, 其中 f 为亚纯函数.

我们记 $Cl(M) = Div(M)/\equiv$ 为 M 上所有除子的**除子类群** *(Divisor Class Group)*.

除子类群和 M 上的另一类数学对象有很密切的联系.

定义 5. *令 M 为紧复曲面, M 上的全纯线丛为一个光滑向量丛 $E \xrightarrow{\pi} M$, 其中 E 为一个 3 维复流形, π 为全纯映照, $\pi^{-1}(p)$ 与 $\mathbb{C}$ 双全纯等价 $(\forall p \in M)$.*

若 E 为 M 上全纯线丛, 则对于 M 的一族开覆盖 $\{U_\alpha\}$, 在 $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta$ 上存在全纯转移函数 $g_{\alpha\beta} : U_{\alpha\beta} \to \mathbb{C}$. 可以验证 $g_{\alpha\beta}$ 满足

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\alpha} &= id \\ g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} \circ g_{\gamma\alpha} &= id \end{aligned} \tag{1}$$

并且我们可以验证, 满足 (1) 的一族 $g_{\alpha\beta}$ 即给出了曲面上的一个线丛.

在张量积下, 曲面 M 上的所有线丛构成一个群, 即为曲面的 Picard 群 (Picard Group), 记作 $Pic(M)$. 其中线丛 L 的逆由 L^* 给出, 其零元为 $\mathcal{O}$. 我们不难发现, 有 $Pic(M) \cong H^1(M, \mathcal{O}^*)$.

我们进一步可以证明, 存在一个从 $Cl(M)$ 到 $Pic(M)$ 的单射.

考虑短正合列：

$$0 \to \mathcal{O}^* \to \mathcal{M}^* \to \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^* \to 0$$

有此短正合列可诱导一长正合列：

$$0 \to H^0(M, \mathcal{O}^*) \to H^0(M, \mathcal{M}^*) \to H^0(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) \to H^1(M, \mathcal{O}^*) \to \cdots$$

注意到 $H^0(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*) = Div(M)$, 同时 $H^0(M, \mathcal{M}^*)$ 的像即为所有主除子的集合, 故由此正合列可以看出

$$Cl(M) = H^0(M, \mathcal{M}^*/\mathcal{O}^*)/im(H^0(M, \mathcal{M}^*) \subset H^1(M, \mathcal{O}^*) = Pic(M)$$

我们记 $\psi : Cl(M) \to Pic(M)$, 则 ψ 可以显式地写出. 但它不总是满射, 然而, 若对于任意 M 上线丛 L, 有 $H^0(M, L) \neq 0$, 即对任意线丛 L 都能找到 L 的一个整体的全纯截面 $s \neq 0$, 则该 s 定义了 M 上的一个正除子 D, 也即映射 ψ 为双射.

对于除子 $D \in Cl(M)$, 它所对应的线丛即 $\psi(D) \in Pic(M)$ 我们记作 $\mathcal{O}_M(D)$. 两个除子 D, E 线性等价当且仅当 $\mathcal{O}_M(D) \cong \mathcal{O}_M(E)$

我们进一步可知, $Cl(M) \cong Pic(M)$ 的一个充分条件是 M 上存在所谓“丰裕的”线丛 (Ample Line Bundle). 这个会在第 2 章详细讨论. 我们这里可以说的是, 若 D' 是一个等价于 D 的正除子, 则 D' 给出了 $\mathcal{O}_M(D)$ 的一个全纯的整体截面. 这是由于当 D' 是正除子时, 它的局部定义函数都是全纯的, 故他们拼接起来便形成了一个 $\mathcal{O}_M(D') \cong \mathcal{O}_M(D)$ 的整体全纯截面.

我们将与 D 等价的正除子的集合记作 $|D|$, 称作 D 的**线性系统** *(Linear System)*. 由上面讨论可知, 我们有一个从 $H^0(M, \mathcal{O}_M(D))\backslash\{0\}$ 到 $|D|$ 上的满射. 若两截面 s, s' 的零点集相同, 则他们之差一个整体非零全纯函数 h, 即 $s' = hs$. 当 M 为紧的, h 必为常数. 故对于紧复曲面 M, 我们有

$$|D| = \mathbb{P}H^0(M, \mathcal{O}_M(D))$$

且 $|D| \neq \phi$ 当且仅当 $h^0(\mathcal{O}_M(D)) > 0$.

在 M 上最自然的一个线丛, 为 M 上所有的 2-形式构成的丛, 即 $\bigwedge^2 \mathcal{T}_M^*$, 我们称其为**标准线丛** *(Canonical Line Bundle)*, 记作 $\mathcal{K}_M$. 相对应的我们有**标准除子** *(Canonical Divisor)*K_M, 使得 $\mathcal{O}_M(K_M) = \mathcal{K}_M$.

注. 我们在下文将会把线丛的记号 $\mathcal{L}, \mathcal{K}$ 理解为除子, 并广泛使用“+”代替 $Pic(M)$ 中的运算 $\otimes$.

作为本节的结尾, 我们引入一条在下文将广泛使用的公式——从属公式（Adjunction Formula）.

令 C 为 M 上的一条曲线, C 的切丛记为 $\mathcal{T}_C$, 它到 M 限制到 C 上的切丛 $\mathcal{T}_M \mid Y$ 有一个自然的嵌入, 记为 ι, 我们定义 C 在 M 中的法从 $\mathcal{N}_{C|M}$ 为映射 ι 的余核. 即：

$$0 \to \mathcal{T}_C \to \mathcal{T}_M \mid C \to \mathcal{N}_{C|M} \to 0.$$

对上式我们取对偶后再取行列式, 得到

$$\bigwedge^2 \mathcal{T}_M^* \mid C \cong \mathcal{T}_C^* \otimes \mathcal{N}_{C|M}.$$

我们知道 $\mathcal{T}_C^*$ 是 1 维的, 并且由

$$\mathcal{O}_M(C) \mid C \cong \mathcal{N}_{C|M},$$

故上式即为

$$\mathcal{K}_C = \mathcal{K}_M \otimes \mathcal{O}_M(C) \mid C.$$

利用除子的记号写出, 即为

$$K_C = (K_M + C)C.$$

其中乘法为两个除子的相交数, 这个在下文会提到. 以上公式便为熟知的**从属公式**.

1.2 相交重数与相交数

我们首先定义两个除子在某点处的相交重数.

定义 6. 令 C, D 为紧复曲面 M 上的曲线, $x \in C \cap D$, 则定义

$$i_x(C,D) = dim_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_{M,x}/(f_x, g_x)$$

为 C, D 在点 x 处的相交重数, 其中 $f, g \in \mathcal{O}_{M,x}$ 为 C, D 在 x 处的局部定义函数.

我们可以用更加容易计算的方法定义相交重数. 令 $\nu : \tilde{C} \to C$ 为 C 的正规化, 记 $g_1, \ldots, g_r$ 为 $g \circ \nu$ 在 $\nu^{-1}(x)$ 的局部环里的素因子, $ord_{x_k}(g_k)$ 为 g_k 的消失阶数, 则容易证明:

$$i_x(C,D) = \sum_{k=1}^{r} ord_{x_k}(g_k)$$

由定义我们可以看出, $i_x(C,D)$ 是关于 C, D 对称的, 而由等价定义我们又知道, 它关于 C, D 是双线性的.

更多的我们有, $i_x(C,D) = 1$ 当且仅当 f, g 张成 $\mathcal{O}_{M,x}$ 的极大理想, 即 C, D 在 x 处正则并横截.

给定一不可约曲面 Z, 记 $\iota : Z \to M$ 为嵌入映射,

$$\mathcal{P}_M : H^i(M,\mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_{4-i}(M,\mathbb{Z})$$

为庞加莱对偶. Z 唯一对应了 $H^2(X,\mathbb{Z})$ 中的一个元素：

$$[Z] = \mathcal{P}_M^{-1} \circ i_* \circ \mathcal{P}_Z(1) \in H^2(X,\mathbb{Z})$$

成为 Z 对应的**上同调基本类** *(Fundemental Class of Cohomology)*.

对于除子 D, 由线性推广也可以定义 $[D] \in H^2(X,\mathbb{Z})$ 为除子 D 的上同调基本类.

在紧复曲面 M 上我们有 2 阶同调群上的卡积运算：

$$H_c^2(M,\mathbb{Z}) \times H^2(M,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_c^4(M,\mathbb{Z}) \cong H_0(M,\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$
$$\xi \times \eta \longrightarrow (\xi,\eta)$$

由卡积运算, 我们可以定义两个除子 D,E 在紧复曲面 M 上的相交数：

定义 7. 令 D,E 为 M 上的除子, $(D,E) = DE = ([D],[E])$ 称为两除子的相交数. 同样我们可以定义两线丛 $\mathcal{L},\mathcal{M}$ 在紧复曲面 M 上的相交数为 $(\mathcal{L},\mathcal{M}) = (c_1(\mathcal{L}), c_1(\mathcal{M}))$. 其中 c_1 为第 1 陈类.

如此定义的相交数有如下性质：

命题 8. *(i) 相交数是对称的, 并且关于张量积或者除子加法双线性.*
(ii) 令 $\pi: Y \to X$ 为从曲面 Y 到曲面 X 的恰当映射, 则有

$$(\pi^*(\mathcal{L}), \pi^*(\mathcal{M})) = deg(\pi)(\mathcal{L},\mathcal{M}).$$

(iii) 若 C 为紧曲线, 则

$$(C,\mathcal{M}) = deg(\mathcal{M} \mid C).$$

(iv) 若除子 D,E 没有公共分支, 即它们的交是 0 维的, 则

$$DE = \sum_{x \in D\cap E} i_x(D,E).$$

这些性质的证明可以参见参考文献 [1].

注. 由性质 (iii) 可知, 对于不可约除子 D,E, 他们的相交数即为 $deg\mathcal{O}_D(E)$.
由性质 (i) 知, 相交数与除子加法满足结合率.

1.3 特异曲线及双有理等价

我们知道, 在复流形上进行“手术”, 不像在一般的实流形上那么容易, 下面我们将引入一类在复流形上非常重要的操作, 叫σ-过程. 这个操作即是我们熟知的流形在一点处的“吹起”.

考虑点 $p \in M$, 我们考虑 p 点附近的一个坐标邻域 B, 适当缩小使得 B 可被看为 $\mathbb{C}^n$ 中原点的一个球形邻域. 令 $(z_1, \ldots, z_n)$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的标准坐标, 我们定义 B 在 $\mathbb{C}^n$ 的**吹起** *(Blow-up)*为

$$\widetilde{B} = \{(z, w) \in B \times \mathbb{P}^{n-1} \mid z_i w_j = z_j w_i, \forall 1 \leq i < j \leq n\}.$$

其中 $w = [w_1 : \ldots : w_n]$ 为 $\mathbb{P}^{n-1}$ 的齐次坐标. 注意到若我们用 $U_i = \{w_i \neq 0\}, i = 1, \ldots, n$ 覆盖 $\mathbb{P}^{n-1}$, 则 $B \times \mathbb{P}^{n-1}$ 被开集 $B \times U_i$ 覆盖, 在每个 $B \times U_i$ 上, 我们有全纯坐标

$$(z_1, \ldots z_n, \frac{w_1}{w_i}, \ldots, \frac{w_{i-1}}{w_i}, \frac{w_{i+1}}{w_i}, \ldots, \frac{w_n}{w_i})$$

故 $B \times \mathbb{P}^{n-1}$ 是一个复流形, 进而上面定义的 $\widetilde{B}$ 也是一个复流形. 并且 $\widetilde{B}$ 在 $B \times U_i$ 是由 $n-1$ 条方程

$$z_j = z_i \frac{w_j}{w_i}, \qquad 1 \leq j \neq n, j \neq i.$$

所决定.

注意到映射 $\pi : \widetilde{B} \to B$ 在 B 去掉原点处都是一一对应的, 而在原点处 π 的逆像 $E = \pi^{-1}(0)$ 却等于整条 $\mathbb{P}^{n-1}$. 我们称 E 为一条**特异曲线** *(Exceptional Curve)*. 由于其自相交数 $E^2 = -1$, 故有时又称它为 (-1)-曲线. 更多的我们有任意一条 (-1)-曲线, 都必定是某点的吹起. 故我们可以又称点 p 为特异曲线 E 的**吹落** *(Blow-down)*.

我们还有以下关于吹起的性质:

命题 9. *令 $p : \widetilde{M}^2 \to M^2$ 为点 p 处的吹起, 则 $\mathcal{N}_{E/\widetilde{M}} \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)$, 且有:*
(i) π 诱导了两曲面的亚纯函数域间的同构, 即 $\mathcal{M}(\widetilde{M}) \cong \mathcal{M}(M)$
(ii) $\mathcal{K}_{\widetilde{M}} = p^*(\mathcal{K}_M) \otimes \mathcal{O}_{\widetilde{M}}(E)$ 即 $K_{\widetilde{M}} = p^*(K_M) + E$
(iii) 对于任意的 $i \geq 0$, $p^* : H^i(X, \mathcal{O}_M) \to H^i(\widetilde{M}, \mathcal{O}_{\widetilde{M}})$ 是一个同构.
(iv) 对于 $i = 1$, $p^* : H^i(M, \mathbb{Z}) \to H^i(\widetilde{M}, \mathbb{Z})$ 是一个同构, 对于 $i = 2$, 有

$$H^2(\widetilde{M}, \mathbb{Z}) \cong p^*(H^2(M, \mathbb{Z})) \otimes \mathbb{Z}\{c_1(\mathcal{O}_M(E))\}.$$

其中 (iv) 的证明参见参考文献 [3]. (i) 的证明是由下文提到的 Levi 延拓定理直接得到.

我们用同样的记号记 $\pi : \widetilde{M} \to M$, 其中 $\widetilde{M}$ 为将 p 点邻域 B 替换为 $\widetilde{B}$ 后得到的流形. 拓扑上来说, 吹起后的流形 M 微分同胚于 $M \sharp \overline{\mathbb{P}^2}$. 其中 $\overline{\mathbb{P}^2}$ 是定向相反的 $\mathbb{P}^2$. 由此我们可以将吹起前后的流形的拓扑量对应起来.

$$b_1(\widetilde{M}) = b_1(M), \qquad b_2(\widetilde{M} = b_2(M) + 1, \tag{2}$$

$$\pi_1(\widetilde{M}) = \pi_1(M). \tag{3}$$

其中 b_1, b_2 为第 1 贝蒂数和第二贝蒂数. $\widetilde{M}$ 和 M 的 Picard 群的对应是

$$Pic(\widetilde{M}) = \pi^* Pic(M) \oplus \mathbb{Z}E \cong Pic(M) \oplus \mathbb{Z}. \tag{4}$$

以上 3 式亦是吹起的性质 (iv) 的直接结果.

对于 M 上的一条曲线 C, 其拉回 $\pi^*(C) = \overline{C} + kE$, 其中 $k = i_p(C, C)$ 为 C 在 p 点处的自相交重数, 即 C 在 M 上经过点 p 的次数, 而 $\overline{C}$ 称为 C 的**恰当变换**. 例如令 $p = (0, 0)$, (z_1, z_2) 为 p 附近的坐标, 令 $C : z_1^3 = z_2^2$, 则 $k = i_p(C, C) = 2$, 即 $\pi^*(C) = \overline{C} + 2E$

由吹起的定义可知, π 定义的是一个从 $\widetilde{M} \backslash E$ 到 $M \backslash p$ 上的同构. 我们可以将这个概念推广, 就是所谓的**全纯修正** *(Holomophic Modification)*.

定义 10. 一个全纯修正是一个从紧复曲面 X 到紧复曲面 Y 的全纯满射 f, 使得除开一个真子簇（余维至少为 2）S 外, $f : X \backslash f^{-1}(S) \to Y \backslash S$ 是一个双全纯映射.

若对于两个紧复曲面 X, Y, 存在紧复曲面 Z 及两个全纯修正 $f : Z \to X$ 及 $g : Z \to Y$, 则 X, Y 称为**双有理等价** *(Birational Equivalence)*的, 记作 $X \sim Y$. 映射 $h = g \circ f^{-1}$ 成为双有理映照. 由定义可知, $X \sim Y$, 意味着存在真子集 $S_1 \subset X$ 以及 $S_2 \subset Y$ 使得 $h : X \backslash S_1 \to Y \backslash S_2$ 为双有理映射.

与这一定义相关的结果, 我们有著名的 *Levi* **延拓定理**:

定理 11 (Levi 延拓定理)**.** *令 X 为紧复曲面, $A \subset X$ 是 X 的一个 0 维子集. 则在 $X \backslash A$ 上任意亚纯函数都可唯一地延拓为 X 上的亚纯函数. 特别的, 若 $X \backslash A$ 的函数是全纯的, 则延拓后的函数也是全纯的.*

由双全纯映射的定义可知, 吹起流形 $\widetilde{M}$ 与 M 双有理等价. 并且我们有以下的重要定理:

定理 12. *任意紧复曲面间的双全纯映照 $f : X^2 \to Y^2$ 可以分解为有限多次点的吹起和点的吹落的复合.*

注. 由定义看出, 我们需要证明一个性质或变量是双全纯不变的, 只需要对于流形在一点处的吹起证明其不变即可.

我们在进行紧复曲面分类的时候, 是根据双有理等价类进行分类的. 对此我们感兴趣的是一个双有理等价类中有无一个特定的代表元. 这就是我们所说的**极小曲面**.

定义 13. 一个紧复曲面 M^2 称为**极小曲面**, 若它不是任何一个曲面的吹起. 换句话说, M^2 不包含任何 (-1)-曲线.

注意任意紧复曲面都双全纯等价于某个极小曲面, 因为当我们吹落一条 (-1) 曲线时, 第二贝蒂数 b_2 会降 1(由之前 (2) 式所知). 由于 b_2 是有限的, 故这个过程必定只有有限步. 我们由此可知每一个双全纯等价类必定包含一个极小曲面. 若极小曲面是唯一的, 则上述定理容易证明. 因为可将任意曲面吹落至其双有理等价类中唯一的极小曲面, 则属于同一个等价类中的两张曲面便可以通过有限次的吹起吹落联系起来.

但一般说来极小曲面并不一定唯一. 比如 $\mathbb{P}^2$ 和 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 是双全纯等价的, 且他们都是极小的, 但却不同构.

然而, 我们可以发现对于"大多数"双全纯等价类而言, 极小曲面是唯一的, 这是由下面引理保证的:

引理 14. *若 $\kappa(M) \geq 0$, 则两条 M^2 上任两条特异曲线不交. 故只有唯一的极小曲面双全纯等价于 M^2.*

以上引理中的 $\kappa(M)$ 为 M 的 *Kodaira* 维数, 在下文会有定义. 我们将这个引理的证明放到后面. 本文所研究的直纹面实际上为 Kodaira 维数 $\kappa(M) = -\infty$ 的情形, 故除开以上结果外, 我们对 $\kappa(M) \geq 0$ 的情形将不作进一步讨论.

2 紧复曲面上的拓扑与几何不变量

这一章中我们将讨论紧复曲面上的拓扑与几何不变量. 这些量是曲面分类的依据. 第一节中我们引入一个非常有用的工具——黎曼洛克定理. 为此我们先介绍了陈类. 第二节中我们讨论了紧复曲面上拓扑不变量的一些限制条件. 最后一节我们将定义 Kodaira 维数和代数维数, 我们关注的直纹面便是 Kodaira 维数 $\kappa(M) = -\infty$ 的情形.

2.1 陈类及黎曼洛克定理

令曲面 M 为一张紧复曲面. 首先我们熟知贝蒂数 *(Betti Number)*的定义:

$$b_1 = dimH^1(M, \mathbb{R}), \qquad b_2 = dimH^2(M, \mathbb{R}).$$

在 $H^2(M, \mathbb{R})$ 上, 卡积是一个对称双线性型. 将它对应的正定子空间和负定子空间的维数记为 (b^+, b^-). 则有 $b_2 = b^+ + b^-$. 我们将它们的差 $b^+ - b^-$ 记为 σ, 称为流形 M 的标记 *(Signature)*. b^+, b^- 都为流形的拓扑不变量, 若我们选取相反的定向, 他们的符号会反过来.

我们将达布上同调群的维数记为流形的霍奇数 *(Hodge Number)*:

$$h^{p,q} = dimH^{p,q}(M) = dimH^q(M, \Omega^p_M)$$

根据习惯, 我们记：

$$q = h^{0,1}, \qquad p_g = h^{2,0}.$$

其中 q 称为流形的**不规则度** *(Irregularity)*, p_g 称为流形的**几何亏格** *(Geometry-genus)*.

我们接下去定义曲面 M 上的陈类 c_i. 令 $E \to M$ 为曲面上的向量丛, 由于 $dim M = 2$, 故流形的切丛是 2 维的, 于是我们不妨假设该向量丛的维数为 2. 故有意义的陈类只有 $c_1(E)$ 和 $c_2(E)$.

我们将最高维的陈类 $c_2(E)$ 定义为欧拉类 $e(E)$.

为了定义 $c_1(E)$, 我们考虑**指数序列**：

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^* \to 0, \tag{5}$$

它诱导了一个层的上同调列：

$$\cdots \to H^1(M, \mathcal{O}) \to H^1(M, \mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^2(M, \mathbb{Z}) \to \cdots \tag{6}$$

M 上的线丛 $L \to M$ 对应着 $H^1(M, \mathcal{O}^*)$ 中的一个元素, 也记为 L, 定义该线丛在 δ 下的像为 L 的**第 *1* 陈类**$c_1(L) = \delta(L)$.

我们这样定义第 1 和第 2 陈类 c_1, c_2 后, 我们可以定义**全陈类** *(Total Chern Class)*:

$$c(E) = 1 + c_1(E) + c_2(E) \in H^0(M) \oplus H^1(M) \oplus H^2(M).$$

由定义可知, 全陈类 $c(E)$ 以及第 1, 2 陈类满足：

$$c(E \oplus F) = c(E)c(F), \tag{7}$$

$$c(f^*E) = f^*(c(E)). \tag{8}$$

我们事实上可以利用欧拉列将第 1, 2 陈类计算出来.

为此, 我们将 2 维向量丛 E 射影化, 得到射影向量丛 $\mathbb{P}(E) \xrightarrow{\pi} M$. 对于任意的 $p \in \mathbb{P}(E)$, 我们有 $p = (x, [v])$, 其中 $x \in M$, $[v]$ 代表着原向量丛 E 在 x 处的纤维 E_x 中的一个方向（或一条过原点的直线）.

将 E 用 π 拉回到 $\mathbb{P}(E)$ 上, 得到一个 $\mathbb{P}(E)$ 上的向量丛 $\pi^*(E)$. 则对于上面的 $v \subset E_x$, 我们有：

$$\mathbb{C}v \subset (\pi^*E)_p = E_x.$$

这样我们通过 $\mathbb{C}v$ 定义了一个 M 上的线丛 L, 称为 $\mathbb{P}(E)$ 上的**拖沓丛** *(Tautological Line Bundle)*, 记为 $L = \mathcal{O}_{\mathbb{P}(E)}(-1)$, 可以证明 L 到 $(\pi^*E)_p$ 的嵌入映射的余核为 $L \otimes T_{p|M}$. 这就是**欧拉列** *(Euler Sequence)*.

$$0 \to L \to (\pi^*E)_p \to L \otimes T_{p|M} \to 0.$$

由此及 [7][8], 我们有

$$
\begin{aligned}
\pi^* c_2(E) &= c_2(\pi^* E) \\
&= t_2(c(\pi^* E)) \\
&= t_2(c(L)c(L + T_{p|M}))
\end{aligned} \tag{9}
$$

最后一项由正合列

$$0 \to T_{p|M} \to T_p \to \pi^* T_M \to 0,$$

取行列式可得

$$T_{p|M} = K_p - \pi^* K_M$$

则代入上式得

$$
\begin{aligned}
\pi^* c_2(E) &= t_2(c(L)c(L + T_{p|M})) \\
&= t_2((1 + L)(1 + L + \pi^* K_M - K_p)) \\
&= L \cdot (L + \pi^* K_M - K_p).
\end{aligned} \tag{10}
$$

同样有

$$\pi^* c_1(E) = 2L + \pi^* K_M - K_p. \tag{11}$$

注. 我们将流形的切丛 T_M 上的第 1 和第 2 陈类记为流形的陈类c_1, c_2.

若向量丛 E 可分解为线丛的直和

$$E = L_1 \oplus L_2$$

则由 [7] 知

$$
\begin{aligned}
c(E) &= c(L_1)c(L_2) \\
&= (1 + c_1(L_1))(1 + c_1(L_2)).
\end{aligned} \tag{12}
$$

一般的, 我们可以令 $c(E) = (1 + a_1)(1 + a_2)$, 其中 a_1, a_2 称为虚拟类 *(Virtual Classes)*, 因为它们不一定对应上同调群中的一个类. 但是我们总是有:

$$c_1(E) = a_1 + a_2 \in H^1(M), \qquad c_2(E) = a_1 a_2 \in H^2(M).$$

对于秩 r 的向量丛 E, 我们可定义陈特征 *(Chern Characteristic)*为

$$ch(E) = \sum_{i=1}^{r} e^{a_r} = r + c_1 + \frac{1}{2}(c_1^2 - 2c_2) + \cdots \in H^*(M, \mathbb{Q})$$

显然对于如此定义的陈特征, 有

$$ch(E \oplus F) = ch(E) + ch(F), \qquad ch(E \otimes F) = ch(E)ch(F).$$

对于 2 维向量丛, 显然只有

$$ch(E) = 2 + c_1 + \frac{1}{2}(c_1^2 - 2c_2).$$

我们接下去介绍一个非常重要且漂亮的结果——**黎曼洛克定理**, 又称 *Hirzebruch-黎曼 -洛克定理*.

先定义 *Todd* 类$td(E)$, 对于秩 r 的向量丛 E, 定义

$$td(E) = \prod_{i=1}^{r} \frac{a_i}{1 - e^{-a_i}} \in H_*(M, \mathbb{Q}).$$

对于 $r = 2$ 的情形, 我们有

$$td(E) = 1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2).$$

定理 15 (Hirzebruch-黎曼 -洛克定理)**.** *对于紧复曲面 M 及其上一个全纯向量丛 E, 我们有*

$$\chi(E) = t_n(ch(E) \cdot td(T_M))$$

其中用 t_n 记在 $H^{2n}(M, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ 上的投影. $\chi(E)$ 为 E 的欧拉示性数:

$$\chi(E) = \sum_{q=0}^{n} (-1)^q h^q(E).$$

若取 E 为线丛 $\mathcal{O}_M$, 则 $ch(\mathcal{O}_M) = 1$,

$$\frac{1}{12}(c_1^2 + c_2) = \chi(\mathcal{O}) = 1 - q + p_g. \tag{13}$$

对于秩 r 的向量丛 E, 由黎曼洛克定理及 $c_1(T_M) = -K_M$, 我们有

$$\begin{aligned} h^0(E) - h^1(E) + h^2(E) &= t_2(ch(E) \cdot td(T_M)) \\ &= \frac{r}{12}(K_M^2 + e(M)) - \frac{1}{2}c_1(E)K_M + \frac{1}{2}(c_1^2(E) - 2c_2(E)) \\ &= r(1 - q + p_g) - \frac{1}{2}c_1(E)K_M + \frac{1}{2}(c_1^2(E) - 2c_2(E)) \end{aligned} \tag{14}$$

注意到由达布同构, $h^2(E) = h^0(E^* \otimes K_M)$, 则若令 E 为线丛 L, 则 $r = 1$, 有

$$h^0(L) + h^0(K - L) - h^1(L) = (1 - q + p_g) + \frac{1}{2}L(L - K). \tag{15}$$

由于 h^1 往往不容易计算, 我们有时将此项拿掉, 得到黎曼洛克不等式:

$$h^0(L) + h^0(K - L) \geq \chi(\mathcal{O}) + \frac{1}{2}L(L - K). \tag{16}$$

注. 这是一条十分有用的不等式, 比如当右侧为正时, 我们有 L 和 $K-L$ 中一定有一个有非平凡的整体全纯截面.

本节的最后我们回到从属公式. 我们定义曲面 M 上一条曲线 C 的**亏格**为 $g=h^0(K_C)$, 则由黎曼洛克定理, 我们有

$$\chi(C)=2-2g.$$

对前面提到的正合列

$$0\to\mathcal{T}_C\to\mathcal{T}_M\mid C\to\mathcal{N}_{C|M}\to 0.$$

取 c_1, 从属公式可写为 $(K=K_M)$

$$2g(C)-2=KC+C^2$$

若 C 是一条不可约曲线, 我们可以定义 C 的**算术亏格** *(Arithmetic-genus)*为

$$g(C)=1+\frac{1}{2}(KC+C^2)$$

若 C 是一条带奇点的曲线, 记 $\widetilde{C}$ 为 C 的正规化, 我们有 $g(C)$ 总是大于 $g(\widetilde{C})$.

2.2 拓扑不变量的性质

下面我们观察一些拓扑不变量的性质.

引理 16. **在紧复曲面 M 上, 有下式成立:**

$$2h^{1,0}\le b_1\le h^{1,0}+q, \tag{17}$$

$$2p_g\le b^+. \tag{18}$$

证. 为证 $2h^{1,0}\le b_1$, 我们只需证 $H^{1,0}\cap\overline{H^{1,0}}=0$.

令 ϕ,ψ 为全纯 1 形式, 使得 $\psi-\overline{\phi}=df$ 为恰当的, 则 $\partial f=\psi$, 故 $\partial\bar\partial f=0$. 于是 f 为一个常数, 即 $\phi=\psi=0$. 这就证明了 $H^{1,0}\cap\overline{H^{1,0}}=0$. 由此及 $\overline{H^{1,0}}\to H^{0,1}$ 是单射, 即有 $2h^{1,0}\le b_1$.

为证第二个不等号, 我们考虑正合列

$$0\to\mathbb{C}\to\mathcal{O}\xrightarrow{\partial}\mathcal{O}\to 0$$

由此诱导长正合列

$$\cdots\to H^0(\partial\mathcal{O})\to H^1(M,\mathbb{C})\to H^1(\mathcal{O})\to\cdots$$

同时由于 M 上任何全纯 1 形式都是闭形式, 我们有 $H^0(\partial\mathcal{O}) = H^0(\Omega)$, 则由达布同构知 $dimH^0(\Omega) = h^{1,0}, dimH^1(\mathcal{O}) = h^{0,1}$, 即我们得到 $b_1 \le h^{1,0} + q$.

由以上两个不等号我们知道 $h^{1,0} \le q$, 即 $b_1 \le 2q$.

为证 (18) 式, 注意到对 2 维情形, 也有 $H^{2,0} \cap \overline{H^{2,0}} = 0$, 并且 $H^{1,0} \cap \overline{H^{1,0}}$ 为 $H^2(M,\mathbb{R})$ 一个实维数为 $2h^{2,0} = 2p_g$ 子空间的复化. 又对任意的非零整体全纯 2 形式 ψ, 有

$$\int_M (\psi + \bar{\psi}) \wedge (\psi + \bar{\psi}) = 2\int_M \psi \wedge \bar{\psi} > 0$$

故 $H^2(M,\mathbb{R})$ 上的卡积为正定的, 即 $2p_g \le b^+$ □

由 Hirzebruch 的标记定理, 我们有如下等式

$$\sigma = b^+ - b^- = \frac{1}{3}(c_1^2 - 2c_2). \tag{19}$$

由 [13][19] 式可得,

$$4 - 4q + 4p_g = 4\chi(\mathcal{O}) = \sigma + c_2 = 2(1 - b_1 + b^+)$$

即

$$(2q - b_1) + (b^+ - 2p_g) = 1.$$

由引理我们知道, $2q - b_1$ 与 $b^+ - 2p_g$ 中必然一个为 1, 一个为 0. 于是我们有以下推论.

推论 17. *对于任何紧复曲面 M, $b_1 = h^{1,0} + q$, 其霍奇数必定满足下列两种情况之一:*
(i)$q = h^{1,0}$, 且 $b_1 = 2q, b^+ = 2p_g + 1$,
(ii)$q = h^{1,0} + 1$, 且 $b_1 = 2q + 1, b^+ = 2p_g$.

并且由 $\overline{H^{1,0}} \subset H^{0,1}$ 知若 b_1 是偶数, 则有

$$H^1 = H^{1,0} \otimes H^{0,1}, \qquad \overline{H^{1,0}} = H^{0,1}.$$

但我们知道, 对于 2 维上同调群, 同样的分解总是成立, 即

$$H^2 = H^{2,0} \otimes H^{0,2} \otimes H^{1,1}, \qquad \overline{H^{2,0}} = H^{0,2}.$$

这一结果的证明我们参见参考文献 [1].

2.3 Kodaira 维数与代数维数

为引入 Kodaira 维数, 我们需要先回到第一章第一节, 定义一个线丛何时为**丰裕的** *(Ample)*.

令 L 为曲面 M 的一个全纯线丛, 假设对于某个整数 m, $L^{\otimes m}$ 存在非零截面, 即 $H^0(M, L^{\otimes m})$ 非平凡. 令 $S = \{s_0, \dots, s_k\}$ 为该上同调群的一组基. 则我们可以定义有关 L 的**相关亚纯映射** *(Associated meromophic map)*:

$$\begin{aligned} \Phi_{L^{\otimes m}} : M &\dashrightarrow \mathbb{P}^k \\ p &\mapsto [s_0(p) : \dots : s_k(p)] \end{aligned}$$

若令在 $\mathbb{P}^k$ 上可以差一个射影变换, 那我们便不必关心 S 的选取.

之所以上述映射中我们采用虚线箭头, 是因为它并不一定是点点有定义的. 事实上, 它只对于 $\{s_0, \dots, s_k\}$ 中至少有一个非零的情形有定义. 考虑 S 的公共零点集 $Z = \cap_{i=0}^k \{s_i = 0\}$, 则它在 M 中是一个余维至少为 1 的子簇, 但我们仍可以在 Z 中某些点处定义 $\Phi_{L^{\otimes m}}$.

取 Z' 为 Z 的一个余维 1 的不可约分支, 则对于 Z' 上的光滑点 p 而言, 在 p 在 Z' 的一个邻域内有局部定义函数 $f \in \mathcal{O}_{Z,p}$ 使得在这个邻域内有 $df \neq 0$. 则存在 r 使得 s_i/f^r 在这个邻域内不全为零. 此时在 p 点处我们依然可以定义 $\Phi_{L^{\otimes m}}$. 而此时的**不可定义集** *(indeterminacity)*为余维至少为 2 的子簇. 这也解释了为什么在双有理映射时我们要求避开的子集余维至少为 2.

有了相关亚纯映射, 我们可以谈论一个线丛什么时候是**丰裕的**.

定义 18. 令 L 为紧复流形 M 上的一个全纯线丛, 若它的相关亚纯映射 Φ_L 为 M 到某个射影空间的嵌入映射, 则 L 称为**非常丰裕** *(very ample)*的线丛. L 称为**丰裕的** *(ample)*若存在正整数 m 使得 $L^{\otimes m}$ 为非常丰裕的.

注意当 M 上存在丰裕的线丛, 则它可看作一个射影空间的子流形, 换句话说, M 是一个射影流形. 此时对于任意的 M 上线丛 L', 存在 m 使得 $H^0(M, L' \otimes L^{\otimes m})$ 非平凡. 则 M 上的任意线丛都可写成为 $L_1 \otimes L_2$ 的形式, 其中 L_i 有非平凡截面. 故由 (1.1) 中的论断, 若 M 上存在丰裕的线丛, 则 $Cl(M) \cong Pic(M)$. 由此我们也可以说某个除子 $D \in cl(M)$ 是丰裕的. 关于某个除子 $D \in cl(M)$ 何时是丰裕的, 我们有以下 *Grauert* **法则**.

命题 19 (Grauert 法则)**.** *令 M 为一张紧复曲面. $D \in Cl(M)$ 是丰裕的, 当且仅当 $D^2 > 0$ 以及对 M 上任意一条不可约曲线 C, 有 $DC > 0$.*

由 Grauert 法则, 我们可以马上知道射影性是一个双有理不变量, 这是由下面的推论保证的:

推论 20. *若曲面 $\widetilde{M} \xrightarrow{\pi} M$ 是曲面 M 在一点处的吹起, 则 $\widetilde{M}$ 是射影曲面当且仅当 M 是射影曲面.*

证. 必要性是容易的, 因为 $\widetilde{M}$ 上任一条曲线经过吹落后, 自相交数都只可能降低, 不可能升高, 而两曲线在 p 点处的相交重数也只降不升, 故吹落保持 Grauert 法则中的正性不变. 于是 M 是射影曲面.

充分性的话, 考虑 M 是一张射影曲面, 令它上面的丰裕线丛为 H, 若 H 不经过吹起的 p 点, 则 H 的自相交数和与其他曲线的相交数都不会变, 于是由 Grauert 法则知道 $\widetilde{M}$ 还是一张射影曲面. 若 $p \in H$, 则考虑线丛 $m\pi^*H - E$, 其中 m 为充分大的正整数使得 $(m\pi^*H - dE)^2 > 0$, 则此线丛与 $\widetilde{M}$ 上任意一条曲线 C 的相交数为;

$$(m\pi^*H - dE)C = m\pi^*HC - EC = m\pi^*HC - \mu_p(C) > 0$$

其中 $\mu_p(C)$ 为 C 过 p 的次数, 这个数一定小或等于 π^*HC, 因为 π^*H 里包含了 E. 只需要恰当取 m 一定可以使上式大于 0, 故由 Grauert 法则, 我们得证. □

有了相关亚纯映射的概念, 我们可以定义 *Kodaira* 维数如下:

定义 21. 令 L 为紧复流形 M 上的一个全纯线丛, 则 L 的 *Kodaira* 维数定义为对任意正整数 m, $\Phi_{L^{\otimes m}}$ 的像的最大维数. 记作 $\kappa(L)$.
我们也将 $\kappa(K_M)$ 称为 M 的 Kodaira 维数, 记为 $\kappa(M)$.

若对任意正整数 m, 都有 $h^0(mL) = 0$, 我们则将 L 的 Kodaira 维数记为 $\kappa L = -\infty$. 若 $\kappa(L) > 0$, 则存在正整数 m_0 和常数 $C > 0$, 使得下式成立:

$$C^{-1}m^{\kappa(L)} \le h^0(mL) \le Cm^{\kappa(L)},$$

其中 $m = tm_0$ 为 m_0 的某个正倍数. 我们定义 $P_m(M) = h^0(mK_M)$ 为流形的**多重亏格** *(Pluri-genus)*. 这个控制说明本质上 Kodaira 维数 $\kappa(M)$ 就是 P_m 相对于 m 的增长速度. 由黎曼洛克定理不难知道 Kodaira 维数只会在 $\{-\infty, 0, 1, \ldots, n\}$ 内取值. 其中 $\kappa = -\infty$ 当且仅当对于所有的 m, 有 $h^0(mL) = 0$. 我们使用 $-\infty$ 的缘故是为了让 Kodaira 维数满足可加性 $\kappa(X \times Y) = \kappa(X) + \kappa(Y)$.

Kodaira 维数之所以有用, 首先它得是一个双有理不变量. 即 $\kappa(\widetilde{M}) = \kappa(M)$. 下面我们就来证明这件事情.

我们记 K_M 为 K, $K_{\widetilde{M}}$ 为 $\widetilde{K}$, 则我们有

$$\widetilde{K} = \pi^*K + E.$$

考虑 $\widetilde{M}$ 上一个正除子 $D \in |m\widetilde{K}|$, 我们有 $DE = m\widetilde{K}E = -m$, 其中 E 为 $\widetilde{M}$ 中的特异曲线. 若将 D 中的 E 们扔掉, 记 $D' = D - kE$, 其中 $k \ge 0$, D' 不包含 E. 则 $k - m = D'E \ge 0$, 即 $D - mE$ 仍然是一个正除子. 由此诱导了线性系统间的一个同构:

$$|m\widetilde{K}| \cong |m\widetilde{K} - mE| = |m\pi^*K|$$

故由 (1.1) 中讨论知,

$$H^0(\widetilde{M}, m\widetilde{K}) \cong H^0(\widetilde{M}, m\pi^*K) \cong H^0(M, K),$$

即 $h^0(m\widetilde{K}) = h^0(K)$, 对于任意正整数 m, 这就证明了 $\kappa(\widetilde{M}) = \kappa(M)$.

接下去我们完成 (1.3) 中的引理, 现重新叙述如下:

引理 22. 若 $\kappa(M) \geq 0$, 则两条 M^2 上任两条特异曲线不交. 故只有唯一的极小曲面双全纯等价于 M^2.

证. 由于 $\kappa(M) \geq 0$, 我们知道存在正整数 m 使得 $h^0(mK) > 0$, 即存在正除子 $D \equiv mK$. 令 E_1, E_2 为 M 上的两条特异曲线, 他们的相交数为 d, 即 $E_1E_2 = d$, 则

$$KE_i = E_i^2 = -1, \qquad i = 1, 2$$

于是 $DE_i = -m < 0$, 故 E_i 必然为 D 的一个分支, 记

$$D = n_1E_1 + n_2E_2 + D'$$

其中 D' 不包含 E_i, 那么我们有

$$-m = DE_1 \geq D(n_1E_1 + n_2E_2) = -n_1 + dn_2$$

类似的有 $-m \geq -n_1 + dn_2$, 则若 $d > 0$, 两式相加得 $-2m \geq (d-1)(n_1 + n_2) \geq 0$ 矛盾. 故 $E_1E_2 = 0$. □

而对于 $\kappa(M) = -\infty$ 的情形, M 上的两条特异曲线是可能相交的. 在这个情形下极小曲面便不唯一. 比如将 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 的某个点 p 吹起, 则过这点的两条曲线 E_1, E_2 的自相交数会降 1. 在 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 上我们有 $E_i^2 = 0$, 则在吹起流形 $\widetilde{M}$ 上我们有 $\widetilde{E_i}^2 = -1$, 这两条都成了特异曲线, 并与 p 吹起后得到的特异曲线 $\widetilde{E_p}$ 相交. 除了这三条特异曲线外 $\widetilde{M}$ 并没有其他的特异曲线. 则将 $\widetilde{E_1}, \widetilde{E_2}$ 吹落后, 得到的 E_p 满足 $E_p^2 = 1$. 而这是一张极小曲面, 事实上, 它恰好就是 $\mathbb{P}^2$. 由于 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 中不存在自相交数为 1 的线, 故 $\mathbb{P}^2$ 一定不同构于 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

有关 Kodaira 维数我们还有一个重要的引理, 为此, 我们引入除子的**严格正性** *(nef)*:

定义 23. 一个除子 K 是**严格正**的除子, 若对曲面上的任意正除子 D, 有 $KD \geq 0$.

特别的, 若除子 D 是严格正的, 我们可以观察到它的自相交数一定是非负的, 即 $D^2 \geq 0$. 我们有如下引理:

引理 24. 令 M 是一个极小紧复曲面, 其上 *Kodaira* 维数 $\kappa \geq 0$, 则 K_M 是严格正的.

证. 反设在 M 上存在曲线 C 使得 $KC<0$.

取足够大的 n 使得 $D=nK$ 为正除子. 由于 $CD<0$, C 必然为 D 的某个分支, 我们可以将 D 分解为 $D=mC+D'$, 其中 D' 为正除子, 且不包含 C, 则由 $D'C\geq 0$ 知

$$mC^2=CD-CD'<0$$

即 $C^2<0$, 则由从属公式 $2g(C)-2=KC+C^2<0$ 知

$$KC=C^2=-1,\qquad g(C)=0$$

即 C 为一条特异曲线, 与 M 为极小矛盾. □

这个引理告诉我们, 若 K_M 不是严格正的, 则必有 $\kappa(M)=-\infty$.

另一个曲面上重要的双有理不变量是所谓代数维数.

定义 25. 对于紧复曲面 M, 我们将 $\mathcal{M}(M)$ 关于 $\mathbb{C}$ 的超越扩张度数成为曲面 M 的代数维数, 记为 $a(M)$.

换句话说, 曲面的代数维数即为其上代数无关的整体亚纯函数的个数, 它小于等于流形维数. 由于对于吹起流形 $\widetilde{M}$, 我们有 $\mathcal{M}(\widetilde{M})\cong\mathcal{M}(M)$, 所以有 $a(\widetilde{M})=a(M)$, 即代数维数是双有理不变量.

另外对于 M 上的线丛 L, 若 $\kappa L\geq 0$, 则可令 s_1,s_2 为 $H^0(L)$ 的两个非平凡全纯截面, 则 s_1/s_2 定义了一个 M 上的整体亚纯函数. 我们可以将 $\kappa(L)$ 理解为 L 上线性无关的非平凡截面的个数, 则由上述对应我们知道 $a(M)\geq\kappa(L)$. 特别的, 总是有 $a(M)\geq\kappa(M)$. 下面这个定理讨论了紧复曲面关于代数维数的分类：

定理 26. *令 M 为紧复曲面, 则*
(i)$a(M)=2$ 当且仅当 M 为射影曲面,
(ii)$a(M)=1$ 当且仅当 M 上不可约曲线只有有限条, 且条数 $\leq h^{1,1}+2$,
(iii) 若 $a(M)=0$, 则 M 为椭圆曲面, 即 M 是一条复曲线的全纯纤维化, 其中每个纤维都是一条光滑椭圆曲线.

我们只证明 (i), 关于 (ii)(iii) 的证明, 可以参见参考文献 [10]. 为此, 我们先证明引理：

引理 27. *令 M 为紧复曲面, 若 M 上存在自相交数大于 0 的线丛 L, 则该曲面为射影曲面.*

引理证明. 我们有黎曼洛克不等式：

$$h^0(mL)+h^0(K-mL)\geq\chi+\frac{m^2}{2}L^2-\frac{m}{2}KL$$

故当 m 足够大时, $h^0(mL)$ 和 $h^0(K-mL)$ 中必有一个为正. 由条件 $L^2>0$, 我们总是有对于足够大的 m, $(K-mL)^2>0$, 故我们总能找到一个正除子 D, 使得 $D^2>0$. 对于 mD 应用黎曼洛克不等式, 并且注意到对于足够大的 m, 有 $h^0(K-mD)=0$. 故 $h^0(mD)$ 以 m^2 速度增长. 我们不妨设 $h^0(D)>1$.

映射 $\Phi_{|D|}:M\dashrightarrow\mathbb{P}^N$ 的像必须是 2 维的, 否则 $h^0(mD)$ 不会以平方速度增长. 将 M 去奇点后我们得到一个从 X 到某个射影曲面 N 的满射. 由 Grauert 法则的推论知, 我们只需证 X 是射影曲面. 这里我们需要用到 Grauert 的一个结论: M 上的曲线 C 是特异曲线当且仅当对于 C 的不可约分支 C_i, 有矩阵 (C_i,C_j) 是负定的.

则由 *Stein* 分解, 映射 $f:X\to N$ 可分解为 $g\circ h$, 其中 $h:X\to Y$ 为连通的, $g:Y\to N$ 为有限的, Y 为一光滑紧复曲面. 令 H' 为 N 上一个丰裕除子, 则 $H=g^*H'$ 也是丰裕的. 我们可将 h 看成有限多条特异曲线的吹落. 令其中一条特异曲线为 C. 考虑除子 $D=mh^*H-C$, 其中 m 足够大, 使得 $D^2>0$ 及 mH 是丰裕的. 此时有 $DC_i=-CC_i>0$, 又对于 X 中的任一条曲线 $F\neq C_i$, $h(F)$ 仍是一条曲线, 满足 $CF<mHh(F)$, 故 $DF>0$. 则由 Grauert 法则知 D 为丰裕除子, 即 X 为射影曲面. □

下面我们证明定理 26 的第一部分:

定理 *26(i)* **证明**. 若 M 为射影的, 则 $2\geq a(M)\geq\kappa(M)\geq 2$, 知 $a(M)=2$.

设 $a(M)=2$, 则存在非常值的整体亚纯函数 $f\in\mathcal{M}(M)$. 将 f 局部表达为全纯函数的商 g/h, 则我们可以定义映射

$$\begin{aligned}\phi_f: M &\dashrightarrow \mathbb{P}^1\\ p&\mapsto[g(p):h(p)]\end{aligned}$$

令 $C=\phi^*(p)$ 为正则点 p 处的纤维, 则 $C^2\geq 0$. 若 $C^2>0$, 则由引理知 M 为射影曲面.

若 $C^2=0$, 由 Stein 分解知存在映射 $\pi:M\to\Sigma$ 将 M 打到一个黎曼曲面, 并且其正则纤维 D 满足 $D^2=0$. 当 $a(M)=2$ 时, $\mathcal{M}(M)$ 中必定存在一个亚纯函数 f_0, 使得 f_0 不为 π 的拉回. 则 ϕ_{f_0} 定义的纤维化中存在一个正则纤维 D' 不包含于 D. 此时有

$$(D+D')^2\geq 2DD'>0$$

则由引理可知 M 为射影流形. □

3 直纹面

本章主要讨论一种特殊的紧复曲面——直纹面. 直纹面即为一条曲线的 $\mathbb{P}^1$-丛, 最简单的直纹面即为 $\mathbb{P}^1\times C$ 其中 C 为一条复曲线. 后面我们会看到, 所有的

直纹面都与此平凡直纹面双有理等价. 相反也有类似很强的结论. 由此我们可以看出双有理等价其实是一个比较粗糙的分类方法.

3.1 Hirzebruch 曲面

我们先给出直纹面的定义, 接着我们介绍一类特殊的直纹面——Hirzebruch 曲面.

定义 28. 一个紧复曲面 X^2 称为**直纹面** *(Ruled Surfaces)*, 若它是一条复曲线 C 的 $\mathbb{P}^1$-丛. 一张曲面被称为**双有理直纹面**, 若它双有理等价于一张直纹面.

我们先介绍一个这节会用到的结论.

定理 29. *紧复曲线 C 上的任意直纹面 X 一定是某个 2 维向量丛 $E \xrightarrow{\pi} C$ 的复射影化 $\mathbb{P}(E)$.*

这个定理证明下一节会给出一个用正合列的证明. 这里我们可以先考虑在 C 上的一个可将向量丛平凡化的小邻域, 在上面取一个标准的射影标架场, 则在两个这样的小邻域相交处, 两个标架场之差为一个 $PGL(2, \mathbb{C})$ 里的元素. 由 C 是紧的, 则我们可以选取一个整体的坐标分量使其不为 0, 这样就在 C 上定义了一个 2 维向量丛 E, 使得 $X = \mathbb{P}(E)$.

我们首先观察一下直纹面上的截面. 由熟知的定义知, 对于向量丛 $E \xrightarrow{\pi} C$, 一个**全纯截面**是指映射 $\sigma : C \to X$ 使得

$$\pi \circ \sigma = id_C$$

所以直纹面上可以谈论截面, 而直纹面 $\mathbb{P}(E)$ 上的截面就是 E 的商丛 L, 即

$$0 \to N \to E \to L \to O$$

我们考虑 X 上的拖沓丛 $\mathcal{O}_X(-1)$, 它的对偶丛记作 $\mathcal{O}_X(1)$. 则这个一一对应可以这样给出

$$L = \sigma^* \mathcal{O}_X(1), \qquad \pi^* N = \mathcal{O}_X(1) - \sigma(C).$$

特别的, 我们可以计算 $D = \sigma(C)$ 的自相交数.

$$\begin{aligned} D^2 &= c_1(\sigma^* D) \\ &= c_1(\sigma^*(\mathcal{O}_X(1) - \pi^* N)) \\ &= c_1(L) - c_1(N) \\ &= 2c_1(L) - c_1(E) \end{aligned} \tag{20}$$

所谓“直纹面”可理解为在一条紧黎曼面上“长”出了一个 $\mathbb{P}^1$ 纤维化. 有的曲面可以通过不同的“直纹化”方式得到, 最简单的就是 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$. 上面我们证明

了 $\mathbb{P}^2$ 与 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 是双有理等价的. 我们将这个等价类中的所有曲面称为**有理曲面** *(Rational Surfaces)*. 换句话说, $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 是一张双有理曲面. 我们不妨将这个曲面恰当推广, 考虑一个以 $\mathbb{P}^1$ 为底流形的直纹面, 这样的曲面是 Hirzebruch 首先研究的, 我们便称之为 *Hirzebruch* **曲面**.

我们知道, $\mathbb{P}^1$ 中的超平面 $H_a=\{a_0z_0+a_1z_1=0\}$, 则由于 $\frac{a\cdot z}{b\cdot z}$ 为 $\mathbb{P}^1$ 上的亚纯函数, 故 $H_a\equiv H_b$, 我们将这个线丛称作 $\mathbb{P}^1$ 的**超平面丛** *(Hyperplane Bundle)*, 它就是上面提到的 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$. $\mathbb{P}^1$ 的 Picard 群特别简单, 有 $Pic(\mathbb{P}^1)\cong\mathbb{Z}$, 其中 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ 即为这个群的生成元. 故 $Pic(\mathbb{P}^1)$ 中的元素一定为 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\pm1)^{\otimes n}=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n),n\in\mathbb{Z}$ 的形式.

由于乘上一个线丛不会改变射影丛, 即 $\mathbb{P}(V\otimes L)\cong\mathbb{P}(V)$. 由上述定理及 Grothendieck 的一个结论：**$\mathbb{P}^1$ 上任何一个全纯向量丛一定是线丛的直和**. 我们知道 Hirzebruch 曲面一定可以表达为这样的形式：

$$F_n=\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)).$$

其中 $n\geq0$, 我们将 F_n 称为**第 n 阶 *Hirzebruch* 曲面**

若令 $n\geq1$, 则我们将 $C_n=\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n))\subset F_n$ 称为**中央截面** *(Central section)*, 并且由 $N_{C_n|F_n}\cong\mathcal{O}_{C_n}(-n)$ 可以证明 C_n 的自相交数是 -n.

由 F_n 中央截面的自相交数不同可以知道, 对于不同的 n, F_n 是不同构的. 特别的, F_1 的中央截面自相交数是 -1, 所以它不是极小的. 事实上我们可以证明 F_1 等于 $\mathbb{P}^2$ 吹起一个点. 以上结论还和已知的 $F_0=\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 是吻合的. 可以看到 F_0 中央截面的自相交数为 0, 即 C_0 可以动, 换句话说, 在 F_0 上有超过一种“直纹化”的方式. 进一步, 我们可以证明

命题 30. *除了 $F_0=\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$ 外, $F_n,n>0$ 上只有一种直纹化.*

我们来计算一下 Hirzebruch 曲面上的陈数 c_1^2,c_2.

我们先考虑较一般的情形, 类似 (2.1) 中讨论, 令 $X=\mathbb{P}(V)\xrightarrow{\pi}B$, 令 $L=\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(-1)$ 为 X 上的拖沓从. 我们有欧拉列：

$$0\to L\to\pi^*V\to T_{X|B}\otimes L\to0.$$

我们得到

$$\begin{aligned}\pi^*(1+c_1(V)+c_2(V))&=c(\pi^*V)\\&=(1+T_{X|B}+L)(1+L)\\&=1+(T_{X|B}+2L)+L(T_{X|B}+L)\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\pi^*c_1(V)&=T_{X|B}+2L,\\ \pi^*c_2(V)&=L(T_{X|B}+L).\end{aligned}\tag{21}$$

并且由正合列

$$0 \to T_{X|B} \to T_X \xrightarrow{d\pi} \pi^* T_B \to 0.$$

及 $\pi^* T_B = -\pi^* K_B$ 可知

$$\begin{aligned} c(X) &= c(T_X) \\ &= (1 + T_{X|B})(1 - \pi^* K_B) \\ &= 1 + (T_{X|B} - \pi^* K_B) - T_{X|B}\pi^* K_B. \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} c_1(X) &= T_{X|B} - \pi^* K_B = \pi^* c_1(V) - 2L - \pi^* K_B, \\ c_2(X) &= \pi^* K_B(2L - \pi^* c_1(V)). \end{aligned} \tag{22}$$

当 $V = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$, $B = \mathbb{P}^1$, 则 B 上的标准除子 $K_B = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ 就是超平面丛 H 的 -2 倍, 则

$$\begin{aligned} c_2 &= \pi^*(-2H)(2L - \pi^* c_1(V)) \\ &= \pi^*(-2H)(2L - \pi^* nH) \\ &= -4\pi^* H \cdot L = 4 \end{aligned}$$

又由 $c_1 = -K_X$ 知

$$\begin{aligned} c_1^2 = K_X^2 &= (\pi^*(K_B - c_1(V)) + 2L)^2 \\ &= (\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-2) - \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n) + 2L)^2 \\ &= (\pi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n-2) + 2L)^2 \\ &= (-(n+2)F + 2L)^2 \end{aligned}$$

其中 F 为一条正规纤维. 其在 X 上自相交数 $F^2 = 0$. 又由 2 维 Grothendieck 方程知

$$0 = L^2 - L\pi^* c_1(V) = L^2 - L \cdot nF$$

知 $c_1^2 = -8LF = 8\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \cdot F = 8$. 最后一个等号是由于 F 是正规纤维, 它和截面 $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ 的相交数为 1.

我们发现对于 Hirzebruch 曲面, c_1^2 和 c_2 都与阶数 n 无关. 事实上, 我们可以证明当 n 是偶数时, F_0 微分同胚于 $F_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, 当 n 为奇数时, F_n 微分同胚于 $F_1 = \mathbb{P}^2 \sharp \overline{\mathbb{P}^2}$, 就是说 F_n 分奇偶拓扑上是一样的. 由此我们可以计算出 F_n 上一些拓扑量.

由 Hirzebruch 的标记定理,

$$\sigma = b^+ - b^- = \frac{1}{3}(c_1^2 - 2c_2) = 0 \Longrightarrow b^+ = b^- = \frac{1}{2} b_2$$

又由

$$1 - q + p_g = \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2) = 1 \Longrightarrow q = p_g = \frac{1}{2}b_1$$

后者是基于 Hirzebruch 曲面是代数曲面的事实. 则由之前关于拓扑量的结论知:

$$b_2 = 2b^+ = 2(2p_g + 1) = 2b_1 + 2,$$

则由 $\mathbb{P}^2\sharp\overline{\mathbb{P}^2}$ 和 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 的 $b_1 = 0$ 知其 $b_2 = 2$, 然而对于所有 n, F_n 上都有

$$q = p_g = 0, \qquad b^+ = 1.$$

3.2 直纹面

本节中我们会看见直纹面几乎就是所有的 $\kappa(X^2) = -\infty$ 的极小代数曲面. 由上文定义可知, 直纹面就是一条复曲线 B 上的 $\mathbb{P}^1$ 丛, 上文我们知道紧复曲面 M 上的皮卡群 $Pic(M)$ 同构于 $H^1(M, \mathcal{O}^*)$, 类似的有一条紧复曲线 B 上的 r 阶全纯向量丛的集合一一对应于群 $H^1(B, \mathcal{GL}_r)$ 中的元素, 其中 $\mathcal{GL}_r$ 为 $GL(r, \mathbb{C})$ 对应的层. 我们记 $PGL(r, \mathbb{C}) = GL(r, \mathbb{C})/\mathbb{C}^*$, 并且记 $\mathcal{PGL}(r, \mathbb{C})$ 为 $PGL(r, \mathbb{C})$ 对应的层. 则除掉一个 $\mathbb{C}^*$ 的过程对应着向量丛的射影化, 即我们这样得到的 $H^1(B, \mathcal{PGL}_2)$ 为 B 上的 $\mathbb{P}^1$-丛的集合. 先将本文要证明的主定理陈述如下:

定理 31. *(i)* 紧复曲线 C 上的任意直纹面 X^2 一定是某个 *2* 维向量丛 $E \xrightarrow{\pi} C$ 的复射影化 $\mathbb{P}(E)$.
(ii) 紧复曲线 C 上的任意直纹面 X^2 都与 $C \times \mathbb{P}^1$ 双有理等价. 且 $\mathbb{P}^1 \times C \sim \mathbb{P}^1 \times C'$ 可推出 $C = C'$.
(iii) 所有直纹面除了 F_1 外都是极小曲面.
(iv) 满足 $\kappa(X^2) = -\infty$ 的代数的紧复极小曲面只有直纹面和 $\mathbb{P}^2$, 特别的, 若 $q = 0$, 则 $X = \mathbb{P}^2$ 或者 $X = F_n$.

注. 从 (ii)(iii)(iv) 可以看见, 满足 $\kappa(X^2) = -\infty$ 的紧的代数曲面的双有理等价类唯一决定于某条紧复曲线 C. 这些双有理等价类里不止有一张极小曲面 (直纹面都是极小的, 但它们不都是平凡丛). 然而它们的代表元也相对容易选取, 即是 $C \times \mathbb{P}^1$($\mathbb{P}^2$ 属于 $C = \mathbb{P}^1$ 的等价类).

我们在上文已经见到过 (i). 我们这里给出一个用正合列的证明.

定理 31(i) 的证明. 我们已知对于一条紧复曲线 C, 它的结构群是 $PGL(2, \mathbb{C})$, 上面 $\mathbb{P}^1$-丛的集合是 $H^1(C, \mathcal{PGL}_2)$. 由正合列

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{GL}_2 \to \mathcal{PGL}_2 \to 0$$

得到长正合列

$$\cdots \to H^1(C, \mathcal{GL}_2) \to H^1(C, \mathcal{PGL}_2) \to H^2(C, \mathcal{O}^*) \to \cdots \tag{23}$$

而又由指数序列 (5) 可知

$$\cdots \to H^2(C,\mathcal{O}) \to H^2(C,\mathcal{O}^*) \xrightarrow{\delta} H^3(C,\mathbb{Z}) \to \cdots$$

从这条长正合列可以看出, 由于 C 只有 1 维, 故 $H^2(M,\mathcal{O}) = H^3(C,\mathbb{Z}) = 0$, 故我们得到

$$H^2(C,\mathcal{O}^*) = 0$$

从而由 (23) 式知道 C 上的一个 $\mathbb{P}^1$-丛就一定是从一个全纯 2 向量丛而来的. □

有了 (i) 以后 (ii) 是一个自然的推论.

定理 *31(ii)* **的证明.** 考虑 $X = \mathbb{P}(E)$ 到 $C \times \mathbb{P}^1$ 上的映射

$$(p,[v]) \mapsto (p,[v(e_1),v(e_2)])$$

其中 $p \in C, v \in E_p^*, e_1, e_2$ 为 E 上恰当选取的整体全纯截面使得 $e_1 \wedge e_2$ 不恒等于 0. 则这个映射是一个双有理映射. □

注意到 (ii) 说的就是每个双有理直纹面的等价类都可唯一选取一个 $C \times \mathbb{P}^1$ 作为代表元. 而我们通常选取等价类中的代表元都是取其极小曲面. 但在 $\kappa(X^2) = -\infty$ 的情形下, 极小曲面不唯一. (iii) 即给出了对于直纹面的双有理等价类中极小曲面的情形.

定理 *31(iii)* **的证明.** 令 $X \xrightarrow{\pi} C$ 为一张直纹面, 设 D 是 X^2 上一条 (-1)-曲线, 由 π 的纤维的自相交数都是 0 可知 D 不包含在任一纤维中, 故只有 $\pi(D) = C$, 特别的, $C = \mathbb{P}^1$. 即 X 是一张 Hirzebruch 曲面 F_n, 而由上一节可知, Hirzebruch 曲面中除了 F_1 外都是极小的. □

注意到 (iv) 说明了双有理直纹面若是极小的, 就一定是直纹面和 $\mathbb{P}^2$. 这部分的证明参见参考文献 [1]. 我们在文章的最后关注一下有理曲面, 即 $\mathbb{P}^2$ 的双有理等价类. 我们有：

推论 32 (Castelnuovo 有理性法则)**. 一个代数曲面** X **是有理曲面当且仅当** $P_2(X) = q(X) = 0$.

证. 由于 q 和 P_2 是双有理不变量, 故我们只需观察极小曲面的情形.

若一个代数曲面是有理的, 则它一定等价于 $\mathbb{P}^2$, 由上一节知 $\mathbb{P}^2$ 上 $q = 0, P_2 = h^0(2K_X) = 0$. 则必要性是显然的.

反过来, 若 $P_2 = 0$, 则自然 $p_g = 0$, 则

$$\chi(\mathcal{O}_X) = 1 - q + p_g = 1$$

由黎曼洛克不等式得

$$h^0(-K_X) = h^0(2K_X) + h^0(-K_X) \geq K_X^2 + 1.$$

若 $K_X \geq 0$, 我们有 $h^0(-K_X) \geq 1$, 由 $p_g = 0$ 知 K_X 一定非平凡, 则取横截 $-K_X$ 的一条曲线 C 即有 $-K_X C > 0$, 则 K_X 不可能是严格正的.

而若 $K_X < 0$, 则 K_X 也不能是严格正的. 故对曲面 X 总有 $\kappa(X) < 0$, 即曲面只能是 $\mathbb{P}^2$ 或者 Hirzebruch 曲面, 即一定是有理的. □

致谢

在了论文写作过程中，首先需要感谢的是我的指导老师郑方阳教授。通过他所授的《复几何分析》一课以及他《复微分几何》一书，我学到了有关紧复曲面的大量知识。他的课是我上过最喜欢的课。其次我需要感谢黄兆镇老师。参加他的讨论班四年来对我的影响是巨大的。他也深刻影响了我们对学术的态度。我还需要感谢数学系的老师们。大学四年我从他们那里学到了无数知识。

同时，我还要对在我论文写作过程中给予过我帮助的人表示感谢。

由于作者水平的局限，本文存在许多不足之处，但请专家学者不吝赐教。

参考文献

[1] W. P. Barth, K. Hulek, C. A. M. Peters, and A. Van de Ven. *Compact complex surfaces*, volume 4 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2004.

[2] S. S. Chern. *Complex manifolds without potential theory.* Van Nostrand Mathematical Studies, No. 15. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto, Ont.-London, 1967.

[3] P. Griffiths and J. Harris. *Principles of algebraic geometry.* Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978. Pure and Applied Mathematics.

[4] F. Hirzebruch. Über eine Klasse von einfachzusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.*, 124:77–86, 1951.

[5] F. Hirzebruch and A. Van de Ven. Hilbert modular surfaces and the classification of algebraic surfaces. *Invent. Math.*, 23:1–29, 1974.

[6] K. Kodaira. On the structure of compact complex analytic surfaces. I. *Amer. J. Math.*, 86:751–798, 1964.

[7] K. Kodaira. On the structure of compact complex analytic surfaces. II. *Amer. J. Math.*, 88:682–721, 1966.

[8] K. Kodaira. On the structure of compact complex analytic surfaces. III. *Amer. J. Math.*, 90:55–83, 1968.

[9] K. Kodaira. On the structure of complex analytic surfaces. IV. *Amer. J. Math.*, 90:1048–1066, 1968.

[10] F. Zheng. *Complex differential geometry*, volume 18 of *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.