1986 г. май—июнь *т. 41, вып. 3(249)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 515.16

УСПЕХИ В ТОПОЛОГИИ ВЕЩЕСТВЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ ЗА ПОСЛЕДНИЕ ШЕСТЬ ЛЕТ

О. Я. Виро

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

Топология вещественных алгебраических многообразий как самостоятельная область выделилась немногим более ста лет назад. Теперь ее появление принято датировать (см., например, [72], [11], [69]) 1876 г., когда была опубликована знаменитая работа А. Харнака [57] о числе компонент плоской проективной вещественной алгебраической кривой. До этой работы, и в самом деле, вопросы топологии алгебраических кривых не отделялись от прочих, как правило, более тонких геометрических вопросов, из-за чего они рассматривались лишь в неоправданно простых ситуациях. Внимание математического сообщества было привлечено к топологии вещественных алгебраических многообразий Д. Гильбертом в 1900 г., когда он включил основные ее задачи в свой знаменитый список проблем ([17], 16-я проблема). Не имея своей целью в настоящей статье, как это видно уже из ее названия, излагать всю историю топологии вещественных алгебраических многообразий (читатель может познакомиться с нею, например, по обзорам О. А. Олейник [72], Д. А. Гудкова [11] и В. И. Арнольда и О. А. Олейник [69]), не могу не упомянуть здесь наиболее важные работы, определившие лицо этой области. В начальный период основополагающую роль сыграли работы таких мастеров как Д. Гильберт [58], [59], К. Роон [61], [62] и Ф. Клейн [60]. К этому времени относится и работа В. Рэгсдейл [29], в которой на основе анализа результатов Харнака и Гильберта были высказаны гипотезы, во многом предвосхитившие последующее развитие топологии кривых. Главная из этих гипотез до сих пор остается важнейшей нерешенной проблемой (см. ниже § 3). Существенный вклад внесли затем представители итальянской алгебро-геометрической школы, в частности, Л. Брюзотти [53] и А. Комесатти [55], [56], (см. обзор Л. Брюзотти [54]). Новый этап был открыт работами

И. Г. Петровского [63], [25]. В них были получены глубокие результаты о топологии плоских кривых и создана техническая основа многих последующих работ. В 1949 г. О. А. Олейник и И. Г. Петровский [70] получили первые общие результаты о топологии вещественных алгебраических многообразий произвольной размерности — знаменитые неравенства Петровского — Олейник, представляющие собой оценки такого важнейшего топологического инварианта как эйлерова характеристика. Аналогичные результаты для кривых, лежащих на произвольной поверхности в трехмерном пространстве, были получены О. А. Олейник [71]. В 1969 г. Д. А. Гудков [65] закончил изотопическую классификацию неособых плоских проективных вещественных алгебраических кривых степени 6 и сформулировал ряд гипотез, оказавших чрезвычайно стимулирующее воздействие на развитие предмета. В 1971 г. В. И. Арнольд [1] доказал ослабленный вариант одной из гипотез Гудкова и ряд новых ограничений на топологию плоских кривых и открыл глубокие связи топологии плоских вещественных алгебраических кривых с топологией четырехмерных многообразий. Полностью эта гипотеза Гудкова была доказана В. А. Рохлиным [31]; в действительности, Рохлин доказал ее обобщение на случай многообразий произвольной размерности. Другие гипотезы Гудкова (в столь же обобщенном виде) были доказаны В. М. Харламовым [67] и Д. А. Гудковым и А. Д. Крахновым [66]. Здесь я прерву перечень наиболее замечательных работ. В течение последних тринадцати лет топология вещественных алгебраических многообразий вследствие привлечения новых топологических средств, начатого В. И. Арнольдом [1] и В. А. Рохлиным [31], развивалась особенно интенсивно. Этому развитию посвящено несколько обзоров. Его начальный этап (до 1974 г.) отражен в обзоре Д. А. Гудкова [11]. Состояние топологии плоских кривых на 1978 г. описано в обзорах Дж. Вилсона [47] и В. А. Рохлина [33]. Топологии поверхностей был посвящен доклад В. М. Харламова [14] на Международном конгрессе математиков в Хельсинки. Широкий обзор всего предмета, снабженный списком нерешенных задач, был опубликован в 1979 г. В. И. Арнольдом и О. А. Олейник [69]. В своем докладе [45] на Международном конгрессе математиков в Варшаве я попытался описать развитие предмета в период с 1978 по 1983 г. Настоящая статья представляет собой существенно расширенный вариант этого доклада, дополненный информацией о последних достижениях. Как и в [45], я не пытаюсь дать здесь полный обзор и ограничиваюсь следующими темами:

(i) комплексные топологические характеристики неособых плоских проективных вещественных алгебраических кривых (см. §§ 1—5);

(ii) комплексные топологические характеристики неособых вещественных алгебраических поверхностей, § 6;

(iii) новые ограничения на топологию неособых плоских вещественных алгебраических кривых, § 4;

(iv) классификация кривых и поверхностей относительно жестких изотопий, § 7;

(v) построение вещественных алгебраических многообразий с предписанными топологическими свойствами, § 8.

Я совершенно не затрагиваю здесь следующие направления, в которых в 1978—1984 гг. были выполнены значительные работы. Без их рассмотрения настоящий обзор остается, к сожалению, весьма не полным.

(i) Индексы особенностей полиномиальных векторных полей, см. А. Г. Хованский [18], А. Н. Варченко [64] и С. М. Гусейн-Заде [68].

(ii) Новые ограничения на топологию неособых вещественных алгебраических поверхностей, найденные В. В. Никулиным [23] (в § 4 формулируются, однако, ограничения на топологию кривых, являющиеся следствиями этих ограничений).

(iii) Кривые на поверхностях и, в частности, на квадриках, см. Д. А. Гудков [12] и В. И. Звонилов [49], [50].

(iv) Особые кривые, см. В. И. Звонилов [48].

(v) Точки перегиба и двойные касательные кривых степени 4 с произвольными особенностями, см. Д. А. Гудков и Г. С. Небукина [52].

Я глубоко благодарен В. А. Рохлину, Дж. Вилсону, В. М. Харламову, В. В. Никулину и В. И. Арнольду за ценные обсуждения и предложения.

Этот обзор я посвящаю памяти моего учителя Владимира Абрамовича Рохлина. Топология вещественных алгебраических многообразий, в которой он активно работал последние тринадцать лет своей жизни, обязана ему не только рядом первоклассных результатов, но и существенным расширением арсенала технических средств и становлением новой более широкой точки зрения на основные объекты и задачи. Его изящные и глубокие работы оказывали и еще долго будут оказывать определяющее влияние на развитие этой области.

§ 1. Вещественные алгебраические кривые как комплексные объекты

Рассмотрим сначала неособые плоские проективные вещественные алгебраические кривые. Для краткости будем называть их просто *кривыми*. Множество вещественных точек кривой A будет обозначаться через $\mathbb{R}A$. Оно представляет собой гладкое замкнутое одномерное подмногообразие вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. Его компоненты гомеоморфны окружности. Если степень кривой четна, то все они располагаются в $\mathbb{R}P^2$ двусторонне. Если степень нечетна, то имеется ровно одна односторонняя компонента. Двусторонние компоненты называются *овалами*. Изотопический тип включения $\mathbb{R}A \hookrightarrow \mathbb{R}P^2$ (или, что то же, топологический тип пары $(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}A)$) определяется схемой взаимного расположения компонент кривой $\mathbb{R}A$, эту схему называют *вещественной схемой* кривой A.

Согласно традиции, восходящей к Гильберту, главным вопросом топологии вещественных алгебраических кривых считался вопрос о том, какие вещественные схемы реализуются кривыми данной степени. Однако уже Ф. Клейн [20] ставил вопрос шире. Он интересовался также тем, как вещественная схема кривой A связана с расположением ее вещественной части $\mathbb{R}A$ в множестве $\mathbb{C}A$ ее комплексных точек.

$\mathbb{C}A$ есть ориентированное гладкое связное замкнутое двумерное подмногообразие комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$, инвариантное относительно инволюции conj: $\mathbb{C}P^2 \to \mathbb{C}P^2$: $(z_0 : z_1 : z_2) \mapsto (\bar{z}_0 : \bar{z}_1 : \bar{z}_2)$. Кривая $\mathbb{R}A$ есть множество неподвижных точек сужения этой инволюции на $\mathbb{C}A$. Она может разбивать или не разбивать $\mathbb{C}A$. В первом случае A называется *разбивающей* или кривой *типа* I, во втором случае — *неразбивающей* или кривой *типа* II. В первом случае $\mathbb{R}A$ разбивает $\mathbb{C}A$ на две связные половины, естественные ориентации этих половин определяют на $\mathbb{R}A$ (как на общем крае) две противоположные ориентации, которые называются *комплексными ориентациями* кривой. Вещественная схема кривой, обогащенная указанием типа кривой и, в случае типа I, описанием комплексных ориентаций, называется *комплексной схемой* кривой. Говорят, что вещественная схема кривой степени m принадлежит *типу* I (*типу* II), если любая кривая степени m с этой вещественной схемой принадлежит типу I (типу II). В противном случае (т. е. если существуют и кривые типа I и кривые типа II такой степени с такой вещественной схемой) говорят, что вещественная схема принадлежит *неопределенному типу*.

Деление кривых на типы ввел Ф. Клейн [20]. Комплексные ориентации в топологию вещественных алгебраических кривых были введены В. А. Рохлиным [32]. Как я недавно узнал, они появлялись в работе И. Г. Петровского [26] о лакунах дифференциальных уравнений в частных производных. Комплексные схемы были введены 6 лет назад в работе Рохлина [33]. В новейшем развитии предмета они занимают центральное положение. В последние годы распространилось более широкое понимание задач топологии вещественных алгебраических многообразий, при котором в качестве основного объекта выступают вещественные многообразия вместе с их расположением в комплексификации, а не вещественные многообразия сами по себе (ср. Рохлин [35]).

Для отв та на вопрос, какой может быть вещественная и комплексная схема кривой данной степени, необходима работа в двух направлениях: во-первых, необходимо найти ограничения, налагаемые алгебраической природой кривой на ее схемы; во-вторых, необходимо найти методы построения кривых данной степени с заданной схемой.

Значительная часть известных ограничений следует из сравнительно небольшого числа чисто топологических свойств алгебраических кривых. Поэтому наряду с алгебраическими кривыми полезно рассмотреть объекты, топологически иммитирующие их. Ориентированное гладкое связное замкнутое двумерное подмногообразие M комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$ будем называть *гибкой кривой степени* m, если:

(i) оно реализует класс $m[\mathbb{C}P^1] \in H_2(\mathbb{C}P^2)$;

(ii) его род равен $(m-1)(m-2)/2$;

(iii) оно инвариантно относительно conj;

(iv) поле его касательных плоскостей на $M \cap \mathbb{R}P^2$ можно продеформировать в классе плоскостей, инвариантных относительно conj, в поле прямых пространства $\mathbb{C}P^2$, касательных к $M \cap \mathbb{R}P^2$. (Возможно, это определение не является окончательным; например, будущие исследования могут привести к добавлению новых условий.) С $\mathbb{R}P^2$ гибкая кривая пересекается по гладкому одномерному подмногообразию, которое называется ее вещественной частью. Очевидно, множество комплексных точек алгебраической кривой степени m является гибкой кривой степени m. Все сказанное выше об алгебраических кривых и их схемах распространяется без изменений на случай гибких кривых. Будем говорить, что ограничения на схемы кривых степени m, доказанные для схем гибких кривых степени m, имеют *топологическое происхождение*. Известная классификация схем кривых степени $\leqslant 6$ (см. ниже § 8) обеспечивается ограничениями топологического происхождения, сформулированными ниже в § 3, так что для $m \leqslant 6$ все ограничения имеют топологическое происхождение.

§ 2. Числовые характеристики и кодирование схем кривых

Чтобы сформулировать ограничения на схемы, введем некоторые понятия и числовые характеристики, связанные со схемами. Говорят, что два овала образуют *инъективную пару*, если один из них охватывается другим. Совокупность овалов, любые два из которых образуют инъективную пару, называется *гнездом*. Инъективная пара овалов кривой типа I называется *положительной*, если ориентации овалов, определяемые комплексной ориентацией, индуцируются ориентацией ограничиваемого ими кольца. Овалы разбивающей кривой нечетной степени делятся на положительные и отрицательные. Именно, рассмотрим ленту Мёбиуса, остающуюся от $\mathbb{R}P^2$ после удаления внутренности овала. Если целочисленные гомологические классы, реализуемые в ней овалом и удвоенной односторонней компонентой с ориентациями, определяемыми комплексной ориентацией, различаются знаком, то овал называется *положительным*, в противном случае он называется *отрицательным*. В случае разбивающей кривой четной степени на положительные и отрицательные делятся только невнешние овалы. Именно, невнешний овал *положителен*, если он со тавляет с охватывающим его нешним овалом положительную пару, и *отрицателен* в противном случае. Овал называется *четным*, если он лежит внутри четного числа других овалов. Эйлерова характеристика компоненты дополнения кривой называется *характеристикой* овала, ограничивающего эту компоненту извне. Компонента дополнения кривой называется *четной*, если каждый из овалов, ограничивающих ее изнутри, охватывает нечетное число других овалов.

Важнейшими характеристиками вещественной схемы являются следующие числа: l — число овалов; p — число четных овалов; n — число нечетных овалов; l^+, l^0 и l^- — числа овалов с положительными, нулевыми и отрицательными характеристиками; p^+, p^0, p^- и n^+, n^0, n^- — аналогичные числа четных и нечетных овалов; π и ν — числа четных и нечетных непустых овалов, ограничивающих извне четные компоненты дополнения кривой; h_r — наибольшее количество овалов, входящих в объединение $\leqslant r$ гнезд; h'_r — наибольшее количество овалов набора, содержащегося в объединении $\leqslant r$ гнезд и не содержащего овала, который охватывал бы все остальные овалы этого набора. Характеристиками комплексной схемы кривой типа I являются также: Π^+ и Π^- — числа положительных и отрицательных инъективных пар, Λ^+ и Λ^- — числа положительных и отрицательных овалов.

Для описания вещественных схем мы будем пользоваться следующей системой обозначений. Связная односторонняя кривая кодируется символом $\langle J\rangle$; кривая, состоящая из одного овала,— символом $\langle 1\rangle$; пустая кривая — символом $\langle 0\rangle$. Если символом $\langle A\rangle$ закодирован некоторый набор овалов, то набор овалов, получающийся из него присоединением одного овала, охватывающего все старые, кодируется символом $\langle 1\langle A\rangle\rangle$. Кривая, представляющаяся в виде объединения двух непересекающихся наборов овалов, которые кодируются символами $\langle A\rangle$ и $\langle B\rangle$ и таковы, что ни один овал одного набора не охватывается овалом другого, кодируется символом $\langle A \amalg B\rangle$. Кроме того, мы будем пользоваться двумя сокращениями: во-первых, если $\langle A\rangle$ — код некоторого набора овалов, то фрагмент другого кода, имеющий вид $A \amalg \ldots \amalg A$, где A повторяется n раз, сокращенно обозначается через $n \times A$; во-вторых, фрагменты кода, имеющие вид $n \times 1$, сокращенно обозначаются через n.

Эта система обозначений преобразуется в систему обозначений для комплексных схем следующим образом. В зависимости от типа кривой ее код снабжается нижним индексом I или II. В случае типа I коды положительных овалов снабжаются верхним индексом $^+$, а коды отрицательных — верхним индексом $^-$.

§ 3. Старые ограничения на схемы кривых

В этом параграфе рассматриваются ограничения, полученные к 1978 г. Рассмотрим сначала ограничения на вещественные схемы кривых степени m, имеющие топологическое происхождение (см. [33] и [47]).

(3.1) Неравенство Харнака. $l \leqslant (m^2 - 3m + 3 + (-1)^m)/2$. Кривые с $l = (m^2 - 3m + 3 + (-1)^m)/2$ называются *M-кривыми*, кривые с $l = (m^2 - 3m + 3 + (-1)^m)/2 - a$ называются *$(M - a)$-кривыми*.

В следующих ограничениях (3.2) — (3.9) степень m четна, $m = 2k$.

Экстремальные свойства неравенства Харнака.

(3.2) *В случае M-кривой (т. е. если $l = (m^2 - 3m + 4)/2$)* $p - n \equiv k^2 \bmod 8$.

(3.3) *В случае $(M - 1)$-кривой (т. е. если $l = (m^2 - 3m + 2)/2$)* $p - n \equiv k^2 \pm 1 \bmod 8$.

Усиленные неравенства Петровского.

(3.4) $p - n^- \leqslant (3k^2 - 3k + 2)/2$,

(3.5) $n - p^- \leqslant (3k^2 - 3k)/2$.

Усиленные неравенства Арнольда.

(3.6) $p^- + p^0 \leqslant (k^2 - 3k + 3 + (-1)^k)/2$,

(3.7) $n^- + n^0 \leqslant (k^2 - 3k + 2)/2$.

Экстремальные свойства усиленных неравенств Арнольда.

(3.8) *Если k четно и $p^- + p^0 = (k^2 - 3k + 4)/2$, то $p^- = p^+ = 0$.*

(3.9) *Если k нечетно и $n^- + n^0 = (k^2 - 3k + 2)/2$, то $n^- = n^+ = 0$ и имеется только один внешний овал.*

Кроме неравенства Харнака было известно только одно ограничение топологического происхождения, применимое в случае нечетного m.

(3.10) *Если $m \neq 4$, то $l^- + l^0 \leqslant (m-3)^2/4 + (m^2 - h^2)/4h^2$, где h — любое целое число, которое есть делитель числа m и степень нечетного простого числа.*

Для четных m это следует из (3.6) — (3.9), для нечетных m это неравенство Виро — Звонилова ([33], 1.3).

Экстремальное свойство неравенства (3.10).

(3.11) *Если $l^- + l^0 = (m-3)^2/4 + (m^2 - h^2)/4h^2$, где h есть делитель числа m и степень нечетного простого числа p, то существуют такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{Z}_p$ и такие компоненты $B_1, \ldots, B_r$ дополнения $\mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}A$ с $\chi(B_1) = \ldots = \chi(B_r) = 0$, что граница цепи $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i [B_i] \in C_2(\mathbb{R}P^2;\ \mathbb{Z}_p)$ есть $[\mathbb{R}A]$.*

Теперь рассмотрим ограничения топологического происхождения на *комплексные* схемы кривых степени m, обсуждавшиеся в [33].

(3.12) *Если кривая разбивающая, то $l \equiv [m/2] \bmod 2$.*

Формулы Рохлина.

(3.13) *Если m четно и кривая разбивающая, то*

$$2(\Pi^+ - \Pi^-) = l - m^2/4.$$

(3.14) *Если m нечетно и кривая разбивающая, то*

$$\Lambda^+ - \Pi^- + 2(\Pi^+ - \Pi^-) = l - (m^2 - 1)/4.$$

Экстремальные свойства неравенства Харнака.

(3.15) *Любая M-кривая принадлежит типу* I.

(3.16) Сравнение Харламова ([33], 3.4) — Марэна [21]). *Любая $(M-2)$-кривая четной степени m с $p - n \equiv m^2/4 + 4 \bmod 8$ принадлежит типу* I.

Экстремальные свойства усиленных неравенств Арнольда.

(3.17) *Если $m \equiv 0 \bmod 4$ и $p^- + p^0 = (m^2 - 6m + 16)/8$, то кривая принадлежит типу* I.

(3.18) *Если $m \equiv 2 \bmod 4$ и $n^- + n^0 = (m^2 - 6m + 8)/8$, то кривая принадлежит типу* I.

Ограничения, не имеющие топологического происхождения, как правило, труднообозримы. Большая их часть является следствиями теоремы Безу, т. е. следствиями того факта, что две неприводимые кривые степеней m и q либо совпадают, либо пересекаются не более, чем в mq точках. Сформулирую некоторые из них. Более общие формулировки см. в [11] и [33]. Для $m \leqslant 11$ они являются следствиями приводимых здесь формулировок.

(3.19) $$h_2 \leqslant m/2.$$

В частности, если $h_1 = [m/2]$, то $l = [m/2]$.

(3.20) $$h'_5 \leqslant m.$$

В частности, если $h'_4 = m$, то $l = m$.

(3.21) *Если $r \leqslant 8$, то $h_r + [(8-r)/2] \leqslant 3m/2$.*

В частности, если $h_7 = [3m/2]$, то $l = [3m/2]$.

(3.22) *Если $r \leqslant 13$, то $h'_r + [(13-r)/2] \leqslant 2m$.*

В частности, если $h'_{12} = 2m$, то $l = 2m$.

Кроме ограничений этого типа в [33] было только два ограничения (которые формулируются ниже как (3.23) и (3.24)), не доказанные для схем гибких кривых.

(3.23) Неравенство Звонилова. *Если m нечетно, то*

$$l^- + l^0 \leqslant (m^2 - 4m + 3)/4.$$

В многих случаях оно слабее, чем (3.10), но в некоторых — сильнее. Наименьшее значение m, для которого (3.23) сильнее, чем (3.10), равно 693.

(3.24) *Если $h_1 = [m/2]$, то кривая принадлежит типу* I.

Рохлин отметил ([33], 3.6), что, модифицируя доказательство (3.24), можно получить некоторые другие известные ограничения, однако следующее ограничение, которое также получается этими средствами, но не вытекает из теорем, перечисленных выше, им не было замечено.

(3.25) *Если $h_1' = m$, то кривая принадлежит типу* I.

В заключение этого параграфа я хотел бы упомянуть наиболее старую гипотезу топологии плоских вещественных алгебраических кривых. Она была выдвинута В. Рэгсдейл [29] в 1906 г. и состоит в том, что

$$p \leqslant (3m^2 - 6m + 8)/8 \text{ и } n \leqslant (3m^2 - 6m)/8$$

для любой кривой четной степени m. В 1938 г. И. Г. Петровский [25] предложил следующую более слабую гипотезу:

$$p \leqslant (3m^2 - 6m + 8)/8 \text{ и } n \leqslant (3m^2 - 6m + 8)/8.$$

Для любого $m \geqslant 8$, $m \equiv 0 \bmod 4$ в 1980 г. я построил [40] кривую степени m с вещественной схемой $\langle (m^2 - 6m)/8 \amalg 1 \langle (3m^2 - 6m + 8)/8 \rangle \rangle$. Таким образом, второе неравенство Рэгсдейл не верно для $m \geqslant 8$, $m \equiv 0 \bmod 4$. Вопрос о том, верна ли гипотеза Петровского, остается открытым. Он допускает более широкую постановку: верно ли, что если X — множество неподвижных точек антиголоморфной инволюции неособой односвязной компактной комплексной поверхности $\mathscr{X}$, то $\dim H_1(X; \mathbb{Z}_2) \leqslant h^{1,1}(\mathscr{X})$.

§ 4. Новые ограничения на схемы кривых

Сначала рассмотрим ограничения топологического происхождения.

Неравенства Рохлина [34].

(4.1) *Если кривая принадлежит типу* I *и $m \equiv 0 \bmod 4$, то*

$$4\nu + p - n \leqslant (m^2 - 6m + 16)/2.$$

(4.2) *Если кривая принадлежит типу* I *и $m \equiv 2 \bmod 4$, то*

$$4\pi + n - p \leqslant (m^2 - 6m + 14)/2.$$

Сопоставление этих ограничений на комплексную схему с (3.15) и (3.16) дает ограничения на вещественную схему, содержащие новую информацию для $m \geqslant 10$, см. [34]. Доказательства теорем (4.1) и (4.2) напоминают доказательства неравенств (3.6) и (3.7), но в отличие от всех предыдущих доказательств этой области в них используются неалгебраические разветвленные накрытия, а именно, двулистные накрытия с базой $\mathbb{C}P^2$, разветвленные над поверхностями, составленными из половины кривой $\mathbb{C}A$ и половины проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$. Недавно Т. Фидлер [8] нашел новые ограничения, аналогичные неравенствам (4.1) и (4.2) и доказываемые аналогичным образом. Новым элементом в этих доказательствах является использование вспомогательных мнимых прямых и коник. (Оно делает доказательства непригодными в случае гибких кривых.)

В 1982 г. Т. Фидлер [7] и В. В. Никулин [23] независимо и разными методами получили близкие друг к другу ограничения. Доказательства Фидлера родственны марэновским доказательствам [21] экстремальных свойств неравенства Харнака. Они основаны на применении обобщенного Гийу и Марэном [13] сравнения Рохлина [30], [3]. Фидлер применил его к поверхностям, лежащим в $\mathbb{C}P^2$, тогда как Марэн работал в S^4.

Доказательства Никулина основаны на изучении арифметической роли, которую играют гомологические классы вещественных циклов в квадратичной форме индексов пересечения двулистного накрывающего многообразия $\mathbb{C}P^2$ с ветвлением над $\mathbb{C}A$. Никулин получил свои результаты о кривых как следствия теорем о вещественных алгебраических поверхностях. Эти теоремы являются единственными ограничениями в топологии вещественных алгебраических поверхностей, которые были получены в течение последних 6 лет. Мы не будем здесь их рассматривать (см. [23]).

В обеих работах имеются результаты о кривых всех четных степеней, но при одних значениях степени сильнее результаты одной работы, при других — другой. Не обсуждая каждую работу в отдельности, сформулирую самые сильные результаты.

Новые экстремальные свойства неравенства Харнака.

(4.3) (Фидлер [7]). *Если* $m \equiv 4 \bmod 8$, *кривая является М-кривой и характеристика каждого четного овала четна, то* $p - n \equiv -4 \bmod 16$.

(4.4) (Никулин [23]). *Если* $m \equiv 0 \bmod 8$, *кривая является М-кривой и характеристика каждого четного овала делится на* 2^r, *то либо* $p - n \equiv 0 \bmod 2^{r+3}$, *либо* $p - n = 4^q\chi$, *где* $q \geqslant 2$ *и* $\chi \equiv 1 \bmod 2$.

(4.5) (Никулин [23]). *Если* $m \equiv 2 \bmod 4$, *кривая является М-кривой и характеристика каждого нечетного овала делится на* 2^r, *то* $p - n \equiv 1 \bmod 2^{r+3}$.

Теоремы (4.3) — (4.5) содержат новую информацию для $m \geqslant 12$ (см. Фидлер [7]; Никулин [23] утверждал, что (4.5) содержит новую информацию для $m = 10$, но его пример, как и любой аналогичный пример с $m = 10$, не удовлетворяет старому ограничению (3.9)). Любопытно, что если гипотеза Рэгсдейл — Петровского верна, то условия теорем (4.3) — (4.5) никогда не реализуются (см. Фидлер [7]).

Новые сравнения для вещественных схем кривых типа I.

(4.6) *Если* $m \equiv 0 \bmod 2$, *кривая принадлежит типу* I *и характеристика каждого нечетного овала четна, то* $p - n \equiv m^2/4 \bmod 8$.

(4.7) *Если* $m \equiv 0 \bmod 4$, *кривая принадлежит типу* I *и характеристика каждого четного овала четна, то* $p - n \equiv 0 \bmod 8$.

Теорема (4.6) была доказана А. Л. Слепяном [36] в 1980 г. Он показал, что она является формальным следствием формулы Рохлина (3.13), так что, строго говоря, не нова. Теорема (4.7) и специальный случай теоремы (4.6) были доказаны Никулиным [23]. Обе теоремы можно получить и методом Фидлера [7]. Теорема (4.7) содержит новую информацию для $m \geqslant 8$: комплексная схема $\langle 1 \langle 6^+ \amalg 7^- \rangle\rangle_{\mathrm{I}}$ степени 8 удовлетворяет всем старым ограничениям, но не удовлетворяет (4.7).

Займемся теперь ограничениями не топологического происхождения. В рассматриваемый период был открыт новый класс таких ограничений. Эти ограничения еще менее обозримы, чем следствия теоремы Безу. Удовлетворительные общие формулировки для них не найдены. Поэтому ограничусь обсуждением их источников, несколькими специальными формулировками и общей ссылкой на работы [6] и [41].

Большая часть этих новых ограничений доказывается при помощи построения вспомогательных кривых типа I (как правило, степеней 1 или 2) или семейств таких кривых и применением теоремы Безу вместе с нижеследующими теоремами (4.8), (4.9) и старыми ограничениями, сформулированными выше в § 3.

(4.8) Формула Рохлина для пары кривых. *Пусть* A_1, A_2 — *кривые типа* I *степеней* m_1, m_2, *трансверсальные друг другу и имеющие* r *вещественных точек пересечения. Пусть* C — *кривая степени* $m = m_1 + m_2$, *полученная из* $A_1 \cup A_2$ *в результате такого малого возмущения, что комплексные ориентации кривых* A_1, A_2 *определяют ориентацию кривой*

$\mathbb{R}C$. *Для кривой* $\mathbb{R}C$ *с этой ориентацией положим*

$$\sigma=\begin{cases} m^2/4-l+2(\Pi^+-\Pi^-), & \textit{если } m \textit{ четно},\\ (m^2-1)/4-l+2(\Pi^+-\Pi^-)+\Lambda^+-\Lambda^-, & \textit{если } m \textit{ нечетно}.\end{cases}$$

Тогда σ *четно и* $0 \leqslant \sigma \leqslant m_1 m_2 - r$. *Кривая* C *принадлежит типу* I *тогда и только тогда, когда* $\sigma = 0$ (*т. е. когда для ориентации ее вещественной части, определяемой комплексными ориентациями кривых* A_1 *и* A_2, *выполнена формула Рохлина*). *Если* $\sigma = 0$, *то эта ориентация является комплексной.*

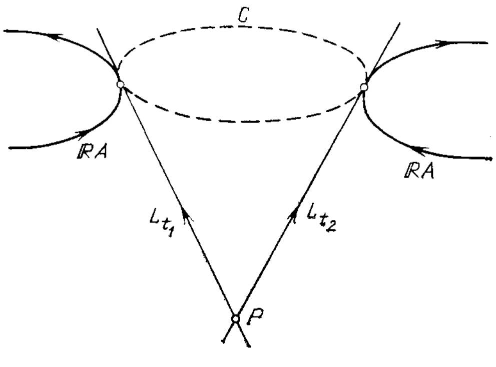


Рис. 1

Специальные случаи теоремы (4.8) были найдены Фидлером ([33] 3.7), Марэном [21] и Г. М. Полотовским, окончательный вариант — В. И. Звониловым и автором. Теорема (4.8) является частным случаем обобщения формулы Рохлина на произвольные особые кривые, найденного В. И. Звониловым [48]. Открытая как основа для построений кривых с предписанной комплексной схемой, теорема (4.8) оказалась мощным ограничением на взаимное расположение двух кривых типа I, а при помощи вспомогательных построений ее удалось превратить в источник ограничений на схемы кривых.

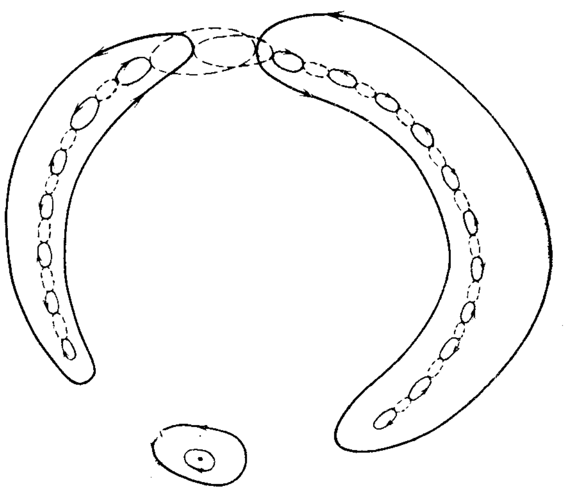


Рис. 2

Пусть $\mathscr{L} = \{L_t\}_{t \in \mathbb{R}P^1}$ — пучок вещественных прямых. (Прямая $L_{(t_0:t_1)}$ определяется уравнением $t_0\lambda_0(x)+t_1\lambda_1(x)=0$, где $\lambda_0(x)=0$ и $\lambda_1(x)=0$ — уравнения прямых $L_{(1:0)}$ и $L_{(0:1)}$. Все прямые L_t проходят через одну точку P.) Пусть A — неособая кривая степени m. Предположим, что через P не проходят вещественные прямые, касающиеся кривой A в мнимых точках или касающиеся кривой A в точке перегиба. Тогда пересечение $\mathbb{C}A \cap (\bigcup_{t\in\mathbb{R}P^1} \mathbb{C}L_t)$ состоит из $\mathbb{R}A$ и конечного числа открытых гладких дуг. Замыкание множес $(\mathbb{C}A \cap (\bigcup_{t\in\mathbb{R}P^1} \mathbb{C}L_t))\setminus\mathbb{R}A$ обозначим через S_PA. Это гладкое замкнутое одномерное подмногообразие поверхности $\mathbb{C}A$, оно пересекается с $\mathbb{R}A$ в точках касания кривой $\mathbb{R}A$ и прямых $\mathbb{R}L_t$.

(4.9) (Фидлер [6]) *Пусть* $\{L_t\}_{t\in U}$ — *множество прямых пучка* $\mathscr{L}$, *пересекающих компоненту* C *кривой* S_PA, *и пусть* L_{t_1}, L_{t_2} — *крайние прямые этого множества* (*так что* L_{t_1}, L_{t_2} *касаются кривой* $\mathbb{R}A$ *в* $C \cap \mathbb{R}A$). *Пусть прямые* L_t, $t \in U$ *согласованно ориентированы. Если* A *принадлежит типу* I *и ориентация прямой* L_{t_1} *согласована в точке касания с комплексной ориентацией кривой* A, *то и ориентация прямой* L_{t_2} *согласована в точке касания с этой комплексной ориентацией кривой* A (см. рис. 1).

В силу (4.9) комплексные ориентации цепочки овалов, соединенных компонентами множества S_PA чередуются (см. рис. 2). Если каждая прямая

$L_t \in \mathscr{L}$ пересекает $\mathbb{R}A$ в $\geqslant m-2$ точках, то такие цепочки легко обнаруживаются (см. рис. 2, где $m=8$). В этом случае теорему (4.9) можно получить как простое следствие теоремы (4.8) (см. [41], 1.4).

Рассмотрим некоторые специальные ограничения, полученные при помощи (4.8) и (4.9).

(4.10) *Не существует кривой степени* 7 *с вещественной схемой* $\langle J \amalg 1\langle 14\rangle\rangle$.

(4.11) *Пусть* $\langle \alpha \amalg 1\langle\beta\rangle \amalg 1\langle\gamma\rangle \amalg 1\langle\delta\rangle\rangle$ — *вещественная схема кривой степени* 8 *с ненулевыми* β, γ *и* δ.

(i) *Если* $l=22$ (*т. е. если* $\alpha+\beta+\gamma+\delta=19$), *то* β, γ *и* δ *нечетны.*

(ii) *Если* $l=20$ *и* $p-n \equiv 4 \bmod 8$, *то два из чисел* β, γ *и* δ *нечетны, а одно четно.*

Теорема (4.10) была анонсирована в заметке автора [40] и опубликована с различными доказательствами в [41] и [6]. Теорема (4.11 (i)) для $\alpha=0$,

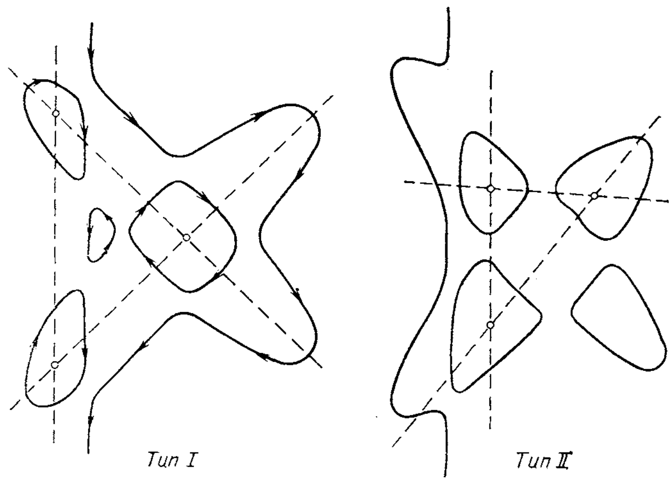


Рис. 3

$\beta=1$ была найдена Фидлером [6]. В том виде, как она сформулирована выше, теорема (4.11) была доказана в [41]. Первые ограничения такого сорта были открыты Фидлером. Идея применить теорему (4.8) вместо фидлеровского чередования ориентаций принадлежит Рохлину.

Другим применением теорем (4.8) и (4.9) было обнаружение связи между расположением кривой в $\mathbb{R}P^2$ относительно прямых и коник, с одной стороны, и комплексной схемой, с другой. Например, тип кривой степени 5 с $l=4$ определяется ее расположением относительно прямых (см. рис. 3 или Фидлер [6]). Аналогичные связи типа кривой с другим ее геометрическим инвариантом, числом ее вещественных θ-характеристик, были открыты Б. Гроссом и Дж. Харрисом [10].

В 1984 г. я обнаружил новую возможность получения ограничений нетопологического происхождения. Она основана на построении перепонок в $\mathbb{C}P^2$ с границами в S_pA. Здесь я ограничусь тем, что анонсирую одно специальное ограничение, полученное этим методом.

(4.12) *Если* $\langle 1\langle\alpha\rangle \amalg 1\langle\beta\rangle \amalg 1\langle\gamma\rangle\rangle$ — *вещественная схема* M*-кривой степени* 8, *то тройка* (α, β, γ) *не может быть ни одной из следующих семи троек:* (1, 3, 15), (1, 5, 11), (1, 9, 9), (3, 3, 13), (3, 5, 11), (3, 7, 9), (5, 5, 9). *Не существует кривой степени* 8 *с вещественной схемой* $\langle 4 \amalg 1\langle 3\rangle \amalg 1\langle 3\rangle \amalg 1\langle 9\rangle\rangle$.

Таким образом, в силу (4.11) и (4.12) вещественная схема M-кривой степени 8, которая имеет вид $\langle 1\langle\alpha\rangle \amalg 1\langle\beta\rangle \amalg 1\langle\gamma\rangle\rangle$, может иметь только схемы $\langle 1\langle 1\rangle \amalg 1\langle 1\rangle \amalg 1\langle 17\rangle\rangle$, $\langle 1\langle 1\rangle \amalg 1\langle 7\rangle \amalg 1\langle 11\rangle\rangle$ и $\langle 1\langle 5\rangle \amalg 1\langle 7\rangle \amalg 1\langle 7\rangle\rangle$. Недавно Е. И. Шустин показал, что эти три схемы действительно реализуются.

§ 5. Утверждение Клейна

Более ста лет назад Ф. Клейн ([20], с. 155) в несколько неопределенной манере написал, что кривая типа I *не допускает развития.*

В 1978 г. В. А. Рохлин ([33], 3.9), ссылаясь на фактический материал и эту фразу Клейна, предложил гипотезу, что любая кривая данной степени с данной вещественной схемой принадлежит типу I, если и только если эта схема не является частью большей вещественной схемы кривой той же степени.

Г. М. Полотовский [27] заметил, что из справедливости части «если» этой гипотезы и из теоремы (4.11(i)) вытекали бы новые ограничения на вещественные схемы кривых степени 8, а Е. И. Шустин [37] построил кривые степени 8 с вещественными схемами $\langle 10 \amalg 1\langle 1\rangle \amalg 1\langle 2\rangle \amalg 1\langle 4\rangle\rangle$ и $\langle 6 \amalg 1\langle 2\rangle \amalg 1\langle 4\rangle \amalg 1\langle 5\rangle\rangle$, не удовлетворяющими этим ограничениям. Таким образом, существует вещественная схема степени 8 типа II (например, $\langle 10 \amalg 1\langle 1\rangle \amalg 1\langle 2\rangle \amalg 1\langle 4\rangle\rangle$ или $\langle 11 \amalg 1\langle 1\rangle \amalg 1\langle 2\rangle \amalg 1\langle 4\rangle\rangle$), которая не является частью большей вещественной схемы степени 8. Неизвестно, верно ли, что любая максимальная вещественная схема данной степени принадлежит типу I. Интересно, справедлива ли гипотеза, поставленная Рохлиным, в случае гибких кривых.

Мне кажется, что несмотря на привлекательность и фундаментальность вопроса о соотношении между максимальностью вещественной схемы и ее принадлежностью типу I, слова Клейна нужно понимать более буквально. Именно, имеется следующая несложная теорема, которая по духу и по доказательству близка к пионерской работе Клейна.

(5.1) *Пусть A_t — непрерывное семейство вещественных алгебраических кривых (не обязательно плоских). Если A_0 имеет только одну особую точку, и эта точка — невырожденная двойная, остальные A_t неособы, и если кривые A_t с $t < 0$ — разбивающие, то число компонент кривой $\mathbb{R}A_t$ с $t > 0$ не превосходит числа компонент кривой $\mathbb{R}A_t$ с $t < 0$.*

По-видимому, эта теорема является частным случаем теоремы о многообразиях произвольной размерности (ср. следующий параграф). Недавно А. Марэн (частное сообщение) переоткрыл теорему (5.1) и доказал с ее помощью, что *во всяком пучке плоских кривых четной степени $m \geqslant 4$ имеется кривая с числом компонент $\leqslant (m^2 - 3m - 2)/2$.* (Последнее для $m \equiv 0 \bmod 4$ было опубликовано с неправильным доказательством А. Л. Чепонкусом [2], правильное доказательство для $m = 4$ было найдено Ю. С. Численко [4].) Для $m = 4$ отсюда следует, что через любые 13 вещественных точек плоскости проходит связная вещественная кривая степени 4, что, в свою очередь, влечет (3.22). Вероятно, можно ожидать дальнейшего прогресса в топологическом исследовании вещественных пучков кривых, которое интересно и само по себе, и как источник ограничений нетопологического происхождения

§ 6. Комплексные топологические характеристики поверхностей

Перенесение теории комплексных топологических характеристик кривых на случай многообразий больших размерностей еще только начинается, и время для обзора еще не настало. Сформулирую лишь несколько определений и фактов, относящихся к случаю поверхностей.

Имеются три типа неособых вещественных алгебраических поверхностей: I abs (I абсолютный), I rel (I относительный) и II. Поверхность A относится: к типу I abs, если ее вещественная часть $\mathbb{R}A$ реализует нуль группы $H_2(\mathbb{C}A; \mathbb{Z}_2)$; к типу I rel, если $\mathbb{R}A$ и плоские сечения поверхности $\mathbb{C}A$ реализуют один элемент группы $H_2(\mathbb{C}A; \mathbb{Z}_2)$; к типу II в остальных случаях.

Для поверхностей типов I abs и I rel автор [42] определил структуры, аналогичные комплексным ориентациям кривых типа I. Это определение удобно сформулировать в аналитической ситуации, обобщающей случаи поверхностей типов I abs и I rel. Пусть $\mathscr{X}$ — неособая комплексная поверхность с $H_1(\mathscr{X}; \mathbb{Z}_2) = 0$; пусть $c\colon \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ — антиголоморфная инволюция и $\mathscr{Y} \subset \mathscr{X}$ — неособая кривая (возможно, пустая), инвариантная относительно c. Положим $X = \operatorname{fix}(c)$ и $Y = X \cap \mathscr{Y}$. Пусть X и $\mathscr{Y}$ реализуют один элемент группы $H_2(\mathscr{X}; \mathbb{Z}_2)$ (в случае $\mathscr{Y} = \varnothing$ это означает, что X реализует нуль). Тогда $X \smallsetminus Y$ обладает двумя выделенными противоположными ориентациями и выделенной спинорной структурой, которые определяются следующими своими свойствами и называются *комплексными*.

Пусть a_0 и a_1 — точки из $X \smallsetminus Y$. Комплексная ориентация поверхности $X \smallsetminus Y$ и естественная ориентация многообразия $\mathscr{X}$ определяют ориентации слоев D_0, D_1 трубчатой окрестности поверхности X в $\mathscr{X}$, лежащих над a_0 и a_1. Пусть $b_i \in \partial D_i$ и u_i — путь в ∂D_i, соединяющий b_i с $c(b_i)$ и согласованный с ориентацией диска D_i, и пусть $s\colon I \to \mathscr{X} \smallsetminus (X \cup \mathscr{Y})$ — путь, соединяющий b_0 с b_1. Тогда петля $su_1(c \circ s)^{-1}u_0^{-1}$ реализует нуль группы $H_1(\mathscr{X} \smallsetminus (X \cup \mathscr{Y}); \mathbb{Z}_2)$.

Укажу другой способ введения тех же комплексных ориентаций. Легко показать, что существует единственное двулистное накрытие многообразия $\mathscr{X} \smallsetminus \mathscr{Y}$, разветвленное над $X \smallsetminus Y$, и что композиция этого накрытия и естественной проекции $\mathscr{X} \smallsetminus \mathscr{Y} \to (\mathscr{X} \smallsetminus \mathscr{Y})/c$ является четырехлистным циклическим накрытием, разветвленным над образом поверхности $X \smallsetminus Y$. Группа автоморфизмов этого четырехлистного разветвленного накрытия имеет две образующие. Они поворачивают слои трубчатой окрестности поверхности $X \smallsetminus Y$ в накрывающем пространстве на угол $\pi/2$ в двух противоположных направлениях. Таким образом, образующие определяют две противоположные ориентации нормального расслоения поверхности $X \smallsetminus Y$. Вместе с естественной ориентацией объемлющего многообразия эти ориентации определяют комплексные ориентации поверхности $X \smallsetminus Y$.

Пусть $\mathscr{Y}'$ — другая кривая, инвариантная относительно $c\colon \mathscr{X} \to \mathscr{X}$ и реализующая тот же элемент группы $H_2(\mathscr{X}; \mathbb{Z}_2)$, и пусть $Y' = \mathscr{Y}' \cap X$. Тогда $Y \cup Y'$ разбивают поверхность X на две части, комплексная ориентация поверхности $X \smallsetminus Y$ и комплексная ориентация поверхности $X \smallsetminus Y'$ совпадают на одной из этих частей и противоположны на другой. Таким образом, для вещественной неособой поверхности в $\mathbb{R}P^3$ мы имеем, на самом деле, две противоположные комплексные ориентации поверхности $\mathbb{R}A$ в случае типа I abs и две противоположные ориентации прообраза поверхности $\mathbb{R}A$ при накрытии $S^3 \to \mathbb{R}P^3$ в случае типа I rel.

Квадратичная форма $H_1(X \smallsetminus Y; \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$, отвечающая (см. [19]) выделенной спинорной структуре поверхности $X \smallsetminus Y$, относит классу, реализуемому гладко вложенной окружностью $S \subset X \smallsetminus Y$, класс вычета 1 + (коэффициент зацепления в $\mathscr{X}$ объединения $X \cup \mathscr{Y}$ и окружности, которая получается из S в результате сдвига вдоль касательного к S векторного поля, умноженного на $\sqrt{-1}$)mod 2.

Эта спинорная структура может быть охарактеризована и тем, какие значения она принимает на оснащенных окружностях. Ее значение на окружности $S \subset X \smallsetminus Y$, снабженной полем V векторов, касательных к X, равно коэффициенту зацепления (modulo 2) в $\mathscr{X}$ поверхности $X \cup \mathscr{Y}$ и окружности, получающейся из S в результате малого сдвига вдоль векторного поля $\sqrt{-1}V$.

Комплексные ориентации и спинорные структуры поверхностей допускают применения, аналогичные применениям комплексных ориентаций кривых. Сформулирую только одну теорему, доказанную с их помощью — аналог утверждения Клейна, доказанный В. М. Харламовым и автором.

(6.1) *Пусть A_t — непрерывное семейство вещественных алгебраических поверхностей в $\mathbb{R}P^3$. Если A_0 имеет только одну особую точку, и эта точка — невырожденная двойная, остальные A_t неособы и, если поверхности A_t с $t < 0$ принадлежат типу* I abs, *то число* $\dim H_*(\mathbb{R}A_t; \mathbb{Z}_2)$ *с* $t > 0$ *не превосходит числа* $\dim H_*(\mathbb{R}A_t; \mathbb{Z}_2)$ *с* $t < 0$.

При выполнении некоторых условий вещественная часть $\mathbb{R}A$ алгебраической поверхности A обладает другими дополнительными структурами, определяемыми расположением $\mathbb{R}A$ в $\mathbb{C}A$, которые не имеют аналогов в случае кривых. Если $\mathbb{R}A$ реализует в $\mathbb{C}A$ гомологический класс, двойственный $w_2(\mathbb{C}A)$, то $\mathbb{R}A$ обладает выделенной спинорной структурой. По существу она была введена Рохлиным [30] и Гийу и Марэном [13]: для ориентируемого $\mathbb{R}A$ соответствующую ей квадратичную форму $H_1(\mathbb{R}A;\ \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$ ввел Рохлин [30], в общем случае соответствующую квадратичную форму $H_1(\mathbb{R}A;\ \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_4$ ввели Гийу и Марэн [13].

Если первый класс Черна $c_1(\mathbb{C}A) \in H^2(\mathbb{C}A;\ \mathbb{Z})$ делится на n, то существует выделенный элемент группы $H^1(\mathbb{R}A;\ \mathbb{Z}_n)$. Значение, принимаемое этим когомологическим классом на ориентированной окружности S, которая ограничивает компактную ориентированную гладкую поверхность $F \subset \mathbb{C}A$, касательную к $\mathbb{R}A$ вдоль S, равно (modulo n) препятствию к продолжению касательного и нормального векторных полей окружности S в $\mathbb{R}A$ до пары векторных полей на F, линейно независимых над $\mathbb{C}$. Этот класс тесно связан с классом Маслова лагранжева многообразия. Он был введен Н. Ю. Нецветаевым. Н. Ю. Нецветаев заметил, кроме того, что для $n = 2$ этот класс и две спинорные структуры, обсуждавшиеся выше, связаны между собой: когда поверхность обладает любыми двумя из этих трех дополнительных структур, она обладает и третьей, и сумма квадратичных форм $H_1(\mathbb{R}A;\ \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$, отвечающих этим двум спинорным структурам, и линейной формы $H_1(\mathbb{R}A; \mathbb{Z}_2) \to \mathbb{Z}_2$, отвечающей классу Нецветаева, равна нулю.

§ 7. Изотопии

Жесткая изотопия кривой степени m есть изотопия в классе (неособых) кривых степени m (т. е. путь в пространстве неособых кривых степени m). Это понятие естественно вводится и для других аналогичных классов вещественных алгебраических многообразий; например, для поверхностей в $\mathbb{R}P^3$.

Классификация кривых степени $\leqslant 4$ и поверхностей степени $\leqslant 3$ относительно жестких изотопий была известна в прошлом веке. С точностью до жесткой изотопии кривая степени $\leqslant 4$ определяется своей вещественной схемой, а поверхность степени $\leqslant 3$ — топологическим типом своей вещественной части.

Комплексные схемы кривых степени $\leqslant 4$

m	Комплексные схемы кривых степени m
1	$\langle J\rangle_{\mathrm{I}}$
2	$\langle 1\rangle_{\mathrm{I}}$, $\langle 0\rangle_{\mathrm{II}}$.
3	$\langle J \amalg 1^-\rangle_{\mathrm{I}}$, $\langle J\rangle_{\mathrm{II}}$.
4	$\langle 4\rangle_{\mathrm{I}}$, $\langle 3\rangle_{\mathrm{II}}$, $\langle 1\langle 1^-\rangle\rangle_{\mathrm{I}}$, $\langle 2\rangle_{\mathrm{II}}$, $\langle 1\rangle_{\mathrm{II}}$, $\langle 0\rangle_{\mathrm{II}}$.

Типы поверхностей степени $\leqslant 3$

(здесь P_r — проективная плоскость с r ручками, S_r — сфера с r ручками, $\amalg$ — дизъюнктная сумма)

m	Топологические типы поверхностей степени m
1	P_0
2	S_1 S_0, $\varnothing$.
3	P_3, P_2, $P_0 \amalg S_0$, P_1, P_0.

Классификация кривых степеней 5 и 6 с точностью до жестких изотопий, была завершена в 1978—1980 гг. в работах Рохлина [33], Никулина [22] и Харламова [15]. Рохлин [33] показал, что для кривых степени $\geqslant 5$ класс кривой относительно жестких изотопий уже не определяется вещественной схемой; поставил вопрос, до какой степени класс кривой относительно жестких изотопий определяется комплексной схемой, и дал классификацию комплексных схем кривых степеней 5 и 6, показав, в частности, что комплексная схема кривой степени $\leqslant 6$ определяется вещественной схемой и типом кривой (см. также Марэн [21]). То, что вещественная схема и тип действительно определяют кривую с точностью до жестких изотопий, было доказано для кривых степени 5 Харламовым [15] и для кривых степени 6 — Никулиным [22]. (Никулин пришел к этой проблеме независимо от работы Рохлина [33].)

Имеется 9 классов жестко изотопных кривых степени 5. Их комплексные схемы: $\langle J \amalg 3^+ \amalg 3^- \rangle_{\mathrm{I}}$, $\langle J \amalg 5 \rangle_{\mathrm{II}}$, $\langle J \amalg 1^+ \amalg 3^- \rangle_{\mathrm{I}}$, $\langle J \amalg 4 \rangle_{\mathrm{II}}$, $\langle J \amalg 3 \rangle_{\mathrm{II}}$, $\langle J \amalg 1^- \langle 1^- \rangle \rangle_{\mathrm{I}}$, $\langle J \amalg 2 \rangle_{\mathrm{II}}$, $\langle J \amalg 1 \rangle_{\mathrm{II}}$, $\langle J \rangle_{\mathrm{II}}$.

Имеется 64 класса жестко изотопных кривых степени 6. Вещественные схемы кривых степени 6:

(i) $\langle 9 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle$, $\langle 5 \amalg 1 \langle 5 \rangle \rangle$, $\langle 1 \amalg 1 \langle 9 \rangle \rangle$;

(ii) $\langle 10 \rangle$, $\langle 8 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle$, $\langle 5 \amalg 1 \langle 4 \rangle \rangle$, $\langle 4 \amalg 1 \langle 5 \rangle \rangle$, $\langle 1 \amalg 1 \langle 8 \rangle \rangle$, $\langle 1 \langle 9 \rangle \rangle$;

(iii) $\langle \alpha \amalg 1 \langle \beta \rangle \rangle$ с $\alpha + \beta \leqslant 8$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 7$, $1 \leqslant \beta \leqslant 8$;

(iv) $\langle \alpha \rangle$ с $0 \leqslant \alpha \leqslant 9$;

(v) $\langle 1 \langle 1 \langle 1 \rangle \rangle \rangle$.

Шесть из этих схем, а именно схемы $\langle 9 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle$, $\langle 5 \amalg 1 \langle 5 \rangle \rangle$, $\langle 1 \amalg 1 \langle 9 \rangle \rangle$, $\langle 6 \amalg 1 \langle 2 \rangle \rangle$, $\langle 2 \amalg 1 \langle 6 \rangle \rangle$ и $\langle 1 \langle 1 \langle 1 \rangle \rangle \rangle$, принадлежат типу I. Восемь схем, а именно $\langle 9 \rangle$, $\langle 4 \amalg 1 \langle 4 \rangle \rangle$, $\langle 1 \langle 8 \rangle \rangle$, $\langle 5 \amalg 1 \langle 1 \rangle \rangle$, $\langle 3 \amalg 1 \langle 3 \rangle \rangle$, $\langle 1 \amalg 1 \langle 5 \rangle \rangle$, $\langle 2 \amalg 1 \langle 2 \rangle \rangle$ и $\langle 1 \langle 4 \rangle \rangle$, принадлежат неопределенному типу. Остальные схемы принадлежат типу II.

Для кривых степени 7 проблема классификации с точностью до жестких изотопий не решена. Имеются примеры, показывающие, что ни вещественная схема и тип, ни комплексная схема не определяют класса жестко изотопных кривых степени 7. Рохлин [33] построил две кривые степени 7 типа I с вещественной схемой $\langle J \amalg 3 \amalg 1 \langle 3 \rangle \rangle$, различающиеся комплексными ориентациями (их комплексные схемы — $\langle J \amalg 1^+ \amalg 2^- \amalg 1^- \langle 1^+ \amalg 2^- \rangle \rangle_{\mathrm{I}}$ и $\langle J \amalg 3^- \amalg 1^+ \langle 3^+ \rangle \rangle_{\mathrm{I}}$). Марэн [21] и Фидлер [6] построили пары кривых степени 7, имеющих одну комплексную схему, но не являющихся жестко изотопными. В частности, Фидлер [6] построил две кривые степени 7 типа II с той же вещественной схемой $\langle J \amalg 3 \amalg 1 \langle 3 \rangle \rangle$, не являющиеся жестко изотопными. Причина, по которой кривые в этих примерах Фидлера и Марэна не являются жестко изотопными, состоит в следующем (см. [21] и [6]). Если вещественная схема кривой степени m обусловливает существование прямой, пересекающей эту кривую в m вещественных точках, т. е. если неравенство (3.19) обращается в равенство, то расположение овалов кривой относительно прямой сохраняется неизменным при жесткой изотопии.

Гибкой изотопией называется изотопия в классе гибких кривых. Так как комплексная схема сохраняется при гибкой изотопии, то для степени $\leqslant 6$ гибкая изотопность равносильна жесткой. Рохлин [33] выдвинул гипотезу, согласно которой кривые одинаковой степени с одинаковыми комплексными схемами гибко изотопны (в [33] гибкие изотопии называются эквивариантными изотопиями). Эта гипотеза вместе с примерами Фидлера и Марэна приводит к предположению, что для кривых степени 7 гибкая и жесткая изотопности не равносильны. Не исключено, что гомотопический тип пространства $\mathbb{C}P^2 \setminus (\mathbb{R}P^2 \cup \mathbb{C}A)$ может служить дополнительным инвариантом относительно гибких изотопий. Его первое исследование было предпринято С. М. Финашиным [9]: для большого класса кривых (в частности, для кривых степени $\leqslant 5$) он вычислил фундаментальную группу этого пространства и построил пару кривых степени 7 с комплексной схемой $\langle J \amalg 2 \amalg 1 \langle 2 \rangle \rangle_{\mathrm{II}}$, которые обладают гомотопически эквивалентными пространствами $\mathbb{C}P^2 \setminus (\mathbb{R}P^2 \cup \mathbb{C}A)$, но не являются жестко изотопными. Возможно, они гибко изотопны.

Проблема классификации поверхностей степени 4 с точностью до жестких изотопий оказалась тоньше, чем для кривых степеней 5 и 6. Сначала была решена более грубая проблема. Два неособых вещественных проективных многообразия называются *грубо проективно эквивалентными*, если одно из них посредством проективного преобразования может быть переведено в многообразие, жестко изотопное второму. Это отношение совпадает с жесткой изотопностью, если четна размерность объемлющего проективного пространства, так как в этом случае группа проективных преобразований связна. В случае нечетной размерности, грубая проективная классификация может оказаться грубее классификации с точностью до жестких изотопий. Однако для поверхностей степеней $\leqslant 3$ эти классификации совпадают. Поверхности степени 4 были расклассифицированы сначала с точностью до грубой проективной эквивалентности (см. В. В. Никулин [22]). Две поверхности степени 4 грубо проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда они принадлежат одному типу (речь идет о типах I abs, I rel и II, см. §6), их вещественные части гомеоморфны и гомотопны в $\mathbb{R}P^3$. Этот результат был получен как следствие следующей более общей теоремы Никулина [22]: две вещественные К3-поверхности, вложенные в $\mathbb{R}P^N$ полной линейной системой, грубо проективно эквивалентны, если и только если их формы пересечений в $H_2(\mathbb{C}A)$ с инволюцией, индуцированной комплексным сопряжением, и с гомологическим классом гиперплоского сечения, изоморфны. (Жесткая изотопическая классификация кривых степени 6, обсуждавшаяся выше, была получена в [22] по существу тоже как следствие этой теоремы.)

Теорема Никулина (как и предшествовавшие ей результаты Харламова о топологической и вещественно изотопической классификации поверхностей степени 4) опирается на такие фундаментальные факты комплексной алгебраической геометрии, как теорема Торелли и теорема об эпиморфности отображения периодов для К3 поверхностей.

Имеются 134 грубых проективных классов поверхностей степени 4. Из них 62 состоят из поверхностей, не стягиваемых в $\mathbb{R}P^3$. Топологические типы нестягиваемых поверхностей степени 4:

(i) $S_{10}\amalg S_0$, $S_6\amalg 5S_0$, $S_2\amalg 9S_0$;
(ii) S_{10}, $S_9\amalg S_0$, $S_6\amalg 4S_0$, $S_5\amalg 5S_0$, $S_2\amalg 8S_0$, $S_1\amalg 9S_0$;
(iii) $S_\alpha\amalg \beta S_0$ с $\alpha+\beta\leqslant 9$, $1\leqslant\alpha\leqslant 9$, $0\leqslant\beta\leqslant 8$;
(iv) $S_1\amalg S_1$ (обе компоненты не стягиваемы).

Любая нестягиваемая поверхность степени 4, гомеоморфная $S_{10}\amalg S_0$, $S_6\amalg 5S_0$, $S_2\amalg 9S_0$, $S_7\amalg 2S_0$, $S_3\amalg 6S_0$ или $S_1\amalg S_1$, принадлежит типу I abs. Любая нестягиваемая поверхность степени 4, гомеоморфная S_9, $S_5\amalg 4S_0$, $S_1\amalg 8S_0$, $S_6\amalg S_0$, $S_4\amalg 3S_0$, $S_2\amalg 5S_0$ или $S_3\amalg 2S_0$, принадлежит типу I abs или II, и для каждого из этих топологических типов обе возможности действительно реализуются. Остальные нестягиваемые поверхности степени 4 принадлежат типу II.

Топологические типы поверхностей степени 4, стягиваемых в $\mathbb{R}P^3$:

(i) $S_\alpha\amalg\beta S_0$ с $\alpha+\beta\leqslant 9$, $1\leqslant\alpha\leqslant 9$, $0\leqslant\beta\leqslant 8$;
(ii) αS_0 с $1\leqslant\alpha\leqslant 10$;
(iii) $\varnothing$;
(iv) $S_1\amalg S_1$.

Любая стягиваемая поверхность степени 4, гомеоморфная $S_1\amalg S_1$ или $S_\alpha\amalg\beta S_0$ с $\alpha+\beta=9$ и $\alpha\equiv 1 \bmod 2$, принадлежит типу I abs. Любая стягиваемая поверхность степени 4, гомеоморфная $S_\alpha\amalg\beta S_0$ с $\alpha+\beta=9$ и $\alpha\equiv 0 \bmod 2$, принадлежит типу I rel. Любая стягиваемая поверхность степени 4, гомеоморфная $S_6\amalg S_0$, $S_4\amalg 3S_0$, $S_2\amalg 5S_0$, $8S_0$, $S_3\amalg 2S_0$ или $S_4\amalg 4S_0$, принадлежит типу I abs или типу II, и для каждого из этих типов обе возможности реализуются. Любая стягиваемая поверхность степени 4, гомеоморфная S_7, $S_5\amalg 2S_0$, $S_3\amalg 4S_0$, $S_1\amalg 6S_0$, $S_4\amalg S_0$, $S_2\amalg 3S_0$, S_3 или $S_1\amalg 2S_0$, принадлежит типу I rel или типу II, и для каждого из этих типов обе возможности реализуются. Остальные стягиваемые поверхности степени 4 принадлежат типу II.

Поверхность называется *зеркальной*, если она жестко изотопна своему зеркальному образу. Для зеркальных и только для зеркальных поверхностей грубая проективная классификация совпадает с классификацией относительно жестких изотопий. Все поверхности степени $\leqslant 3$ зеркальны.

В. М. Харламов [16] показал, что это не так для степени 4. Более того, он выяснил, какие поверхности степени 4 не зеркальны и, тем самым, завершил классификацию поверхностей степени 4 с точностью до жестких изотопий. Нестягиваемая поверхность степени 4 не зеркальна, если и только если она гомеоморфна $S_\alpha \amalg \beta S_0$ с $\beta \geqslant 4$. Стягиваемая поверхность степени 4 не зеркальна, если и только если она гомеоморфна $S_\alpha \amalg \beta S_0$ с $\alpha \geqslant 3$ и $\beta \geqslant 3$. Таким образом, имеется 170 классов жестко изотопных поверхностей степени 4. Первоначально этот результат был получен при помощи довольно сложных рассуждений, связанных с пространством модулей поверхностей степени 4. Недавно В. М. Харламов упростил значительную часть доказательств. Он нашел простые геометрические препятствия к тому, чтобы поверхность степени 4 была зеркальной. Они связаны с недавней работой автора [46] о конфигурациях точек и прямых пространства $\mathbb{R}P^3$.

Набор попарно непересекающихся прямых пространства $\mathbb{R}P^3$ называется *неособой конфигурацией прямых*. Набор точек пространства $\mathbb{R}P^3$, любые k из которых с $k \leqslant 4$ не лежат в $(k-2)$-мерном проективном подпространстве пространства $\mathbb{R}P^3$, называется *неособой конфигурацией точек*. Изотопия неособой конфигурации (прямых или точек) в классе неособых конфигураций называется *жесткой*. Неособая конфигурация называется *зеркальной*, если она жестко изотопна своему зеркальному образу. В [46] неособые конфигурации p прямых с $p \leqslant 5$ расклассифицированы с точностью до жестких изотопий. Для $p = 3$ имеется два класса, для $p = 4$ — три класса, и для $p = 5$ — семь классов. Для $p \leqslant 5$ любые две неособые конфигурации p прямых, не являющиеся жестко изотопными, различаются при помощи коэффициентов зацепления входящих в них прямых. Однако существуют две неособые конфигурации 10 прямых, которые не отличимы друг от друга при помощи коэффициентов зацепления, но не являются жестко изотопными. В [46] я доказал, кроме того, что любая неособая конфигурация p прямых с $p \equiv 3 \bmod 4$ не зеркальна, что для любого $p \not\equiv 3 \bmod 4$ существует зеркальная неособая конфигурация p прямых, и что не зеркальна любая неособая конфигурация q точек с $q \equiv 6 \bmod 8$ или с $q \equiv 3 \bmod 4$ и $q \geqslant 7$.

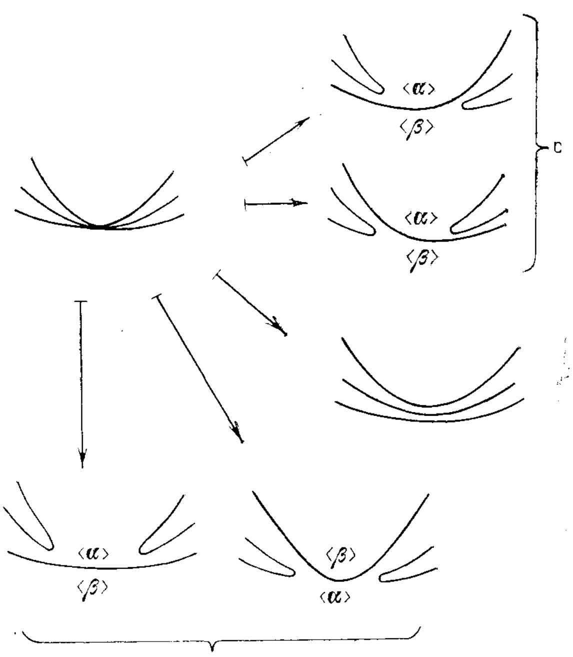
Связь между этими результатами и классификацией поверхностей степени 4 с точностью до жестких изотопий демонстрируется следующим примером. В силу неравенства Харнака никакая плоскость не может пересекать 4 сферические компоненты нестягиваемой поверхности степени 4. Поскольку любая неособая конфигурация шести точек не зеркальна, любая нестягиваемая поверхность степени 4 с шестью сферическими компонентами не зеркальна.

В заключение этого параграфа я сформулирую один старый результат о жестких изотопиях, долгое время остававшийся вне поля зрения специалистов по топологии вещественных алгебраических многообразий. В 1968 г. В. Нуй [24] доказал, что любые две гиперповерхности степени m в $\mathbb{R}P^n$, состоящие из $[m/2]$ сфер, вложенных одна в другую, жестко изотопны. Недавно Б. А. Дубровин [5] получил этот результат для случая плоских кривых другим способом.

§ 8. Построения

В классических работах по топологии вещественных алгебраических кривых построения производились следующим образом: сначала строились две неособые трансверсальные друг другу кривые, затем их объединение подвергалось малому возмущению, устраняющему особенности. Для построения двух кривых степени 6 Д. А. Гудкову пришлось немного выйти за рамки этой схемы и подвергать возмущению не распадающуюся кривую, а образ неособой кривой при квадратичном преобразовании. Однако, как и прежде, все возмущаемые кривые имели только невырожденные двойные особенности. Появлению сложных особенностей в контексте построений топологии вещественных алгебраических кривых мешали два обстоятельства: во-первых, не очень сложные особенности не дают ничего нового по сравнению с невырожденными двойными точками — выгода от усложнения рассматриваемых особенностей появляется лишь при переходе к невырожденным пятикратным точкам и точкам касания трех ветвей; во-вторых, для целенаправленного возмущения кривых со сложными особенностями необходима специальная техника.

В 1980 г. я предложил способ построения возмущений кривой с полуквазиоднородной особенностью. При таком возмущении окрестность особой точки заменяется заранее заготовленным модельным фрагментом кривой. Для некоторых особенностей, в частности, для точек квадратичного касания трех неособых ветвей, мне удалось получить полную классификацию их устранений (т. е. фрагментов кривой, возникающих на месте особенности после возмущения), см. [43]. Для невырожденных пятикратных точек и точек квадратичного касания четырех неособых ветвей мне удалось построить большой запас устранений (см. [44]). Ю. С. Численко [3] продолжила эту работу и построила много упрощений для точек квадратичного касания пяти неособых ветвей. Е. И. Шустин [38] завершил топологическую классификацию



α	β
4	0
0	4
3	0
0	3
2	0
1	1
0	2
1	0
0	1
0	0

α=	3	2	1	0	0
β=	0	0	0	1	0

Рис. 4

устранений невырожденных пятикратных точек и получил новые результаты об устранениях точек квадратичного касания четырех неособых ветвей.

(8.1) *Любая точка квадратичного касания трех неособых вещественных ветвей может быть устранена так, чтобы на ее месте появился любой из* 31 *фрагментов, показанных на рис.* 4. *Любое устранение такой точки приводит к появлению одного из этих фрагментов.*

(8.2) *Любая невырожденная пятикратная точка с пятью вещественными ветвями может быть устранена так, чтобы на ее месте появился один из фрагментов, показанных на рис.* 5. *Любое устранение такой точки приводит к появлению одного из этих фрагментов.*

При помощи нового метода построений, который состоит в комбинации конструкции устранения полуквазиоднородной особенности, рассмотренной выше, некоторой традиционной техники построений и широкого использования кремоновых преобразований, удалось решить некоторые задачи, недоступные при старом методе. Прежде всего мне удалось завершить классификацию вещественных схем кривых степени 7.

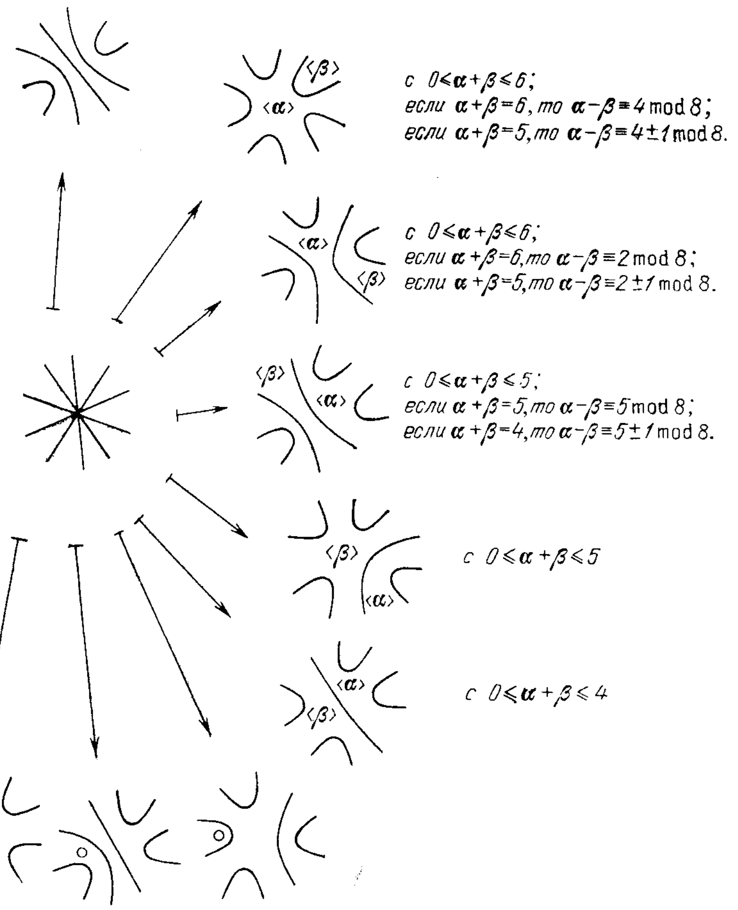


Рис. 5

(8.3) *Существуют кривые степени* 7 *со следующими вещественными схемами*:

(i) $\langle J \amalg \alpha \amalg 1 \langle \beta \rangle \rangle$ *с* $\alpha + \beta \leqslant 14$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 13$, $1 \leqslant \beta \leqslant 13$;

(ii) $\langle J \amalg \alpha \rangle$ *с* $0 \leqslant \alpha \leqslant 15$;

(iii) $\langle J \amalg 1 \langle 1 \langle 1 \rangle \rangle \rangle$.

Любая кривая степени 7 *имеет одну из этих* 121 *вещественных схем*.

К 1980 г. оставалось неизвестным, существуют ли кривые степени 7 со схемами $\langle J \amalg 1 \langle 14 \rangle \rangle$, $\langle J \amalg 10 \amalg 1 \langle 4 \rangle \rangle$ и $\langle J \amalg \alpha \amalg 1 \langle \beta \rangle \rangle$ с $13 \leqslant \alpha + \beta \leqslant 14$, $3 \leqslant \alpha$, $6 \leqslant \beta$. Нереализуемость схемы $\langle J \amalg 1 \langle 14 \rangle \rangle$ утверждается теоремой (4.10), сформулированной выше. Схемы $\langle J \amalg \alpha \amalg 1 \langle \beta \rangle \rangle$ с $6 \leqslant \alpha + \beta \leqslant 14$, $1 \leqslant \alpha$, $2 \leqslant \beta$ реализуются следующим образом (см. [43]). Строятся 4 кривые степени 7 с двумя особыми точками, в каждой из которых касаются друг друга три неособые ветви. Эти 4 кривые показаны на рис. 6. Затем эти кривые подвергаются всевозможным возмущениям (см. (8.1)). Схема $\langle J \amalg 4 \amalg 1 \langle 10 \rangle \rangle$ не только не была, но, как заметили В. И. Звонилов и Т. Фидлер, и не может быть реализована прежним способом.

$p=19,\ n=3$	$p=15,\ n=7$	$p=11,\ n=11$	$p=7,\ n=15$	$p=3,\ n=19$
$\langle 18 \perp\!\!\!\perp 1\langle 3\rangle\rangle$ $\langle 17 \perp\!\!\!\perp 1\langle 1\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 2\rangle\rangle$	$\langle 14 \perp\!\!\!\perp 1\langle 7\rangle\rangle$ $\langle 13 \perp\!\!\!\perp 1\langle 1\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 6\rangle\rangle$ $\langle 13 \perp\!\!\!\perp 1\langle 2\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 5\rangle\rangle$ $\langle 13 \perp\!\!\!\perp 1\langle 3\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 4\rangle\rangle$	$\langle 10 \perp\!\!\!\perp 1\langle 11\rangle\rangle$ $\langle 9 \perp\!\!\!\perp 1\langle 1\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 10\rangle\rangle$ $\langle 9 \perp\!\!\!\perp 1\langle 2\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 9\rangle\rangle$ $\langle 9 \perp\!\!\!\perp 1\langle 3\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 8\rangle\rangle$ $\langle 9 \perp\!\!\!\perp 1\langle 4\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 7\rangle\rangle$ $\langle 9 \perp\!\!\!\perp 1\langle 5\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 6\rangle\rangle$	$\langle 6 \perp\!\!\!\perp 1\langle 15\rangle\rangle$ $\langle 5 \perp\!\!\!\perp 1\langle 1\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 14\rangle\rangle$ $\langle 5 \perp\!\!\!\perp 1\langle 2\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 13\rangle\rangle$ $\langle 5 \perp\!\!\!\perp 1\langle 3\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 12\rangle\rangle$ $\langle 5 \perp\!\!\!\perp 1\langle 4\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 11\rangle\rangle$ $\langle 5 \perp\!\!\!\perp 1\langle 5\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 10\rangle\rangle$ $\langle 5 \perp\!\!\!\perp 1\langle 6\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 9\rangle\rangle$ $\langle 5 \perp\!\!\!\perp 1\langle 7\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 8\rangle\rangle$	$\langle 2 \perp\!\!\!\perp 1\langle 19\rangle\rangle$? $\langle 1 \perp\!\!\!\perp 1\langle 2\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 17\rangle\rangle$? $\langle 1 \perp\!\!\!\perp 1\langle 5\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 14\rangle\rangle$? $\langle 1 \perp\!\!\!\perp 1\langle 8\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 11\rangle\rangle$?
$\langle 16 \perp\!\!\!\perp 3\langle 1\rangle\rangle$	$\langle 12 \perp\!\!\!\perp 2\langle 1\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 5\rangle\rangle$ $\langle 12 \perp\!\!\!\perp 1\langle 1\rangle \perp\!\!\!\perp 2\langle 3\rangle\rangle$	$\langle 8 \perp\!\!\!\perp 2\langle 1\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 9\rangle\rangle$ $\langle 8 \perp\!\!\!\perp 1\langle 1\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 3\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 7\rangle\rangle$ $\langle 8 \perp\!\!\!\perp 1\langle 1\rangle \perp\!\!\!\perp 2\langle 5\rangle\rangle$ $\langle 8 \perp\!\!\!\perp 2\langle 3\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 5\rangle\rangle$	$\langle 4 \perp\!\!\!\perp 2\langle 1\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 13\rangle\rangle$ $\langle 4 \perp\!\!\!\perp 1\langle 1\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 3\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 11\rangle\rangle$ $\langle 4 \perp\!\!\!\perp 1\langle 1\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 5\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 9\rangle\rangle$ $\langle 4 \perp\!\!\!\perp 1\langle 1\rangle \perp\!\!\!\perp 2\langle 7\rangle\rangle$ $\langle 4 \perp\!\!\!\perp 1\langle 3\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 5\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 7\rangle\rangle$	$\langle 2\langle 1\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 17\rangle\rangle$ $\langle 1\langle 1\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 7\rangle \perp\!\!\!\perp 1\langle 11\rangle\rangle$ $\langle 1\langle 5\rangle \perp\!\!\!\perp 2\langle 7\rangle\rangle$
$\langle 1 \perp\!\!\!\perp 1\langle 2 \perp\!\!\!\perp 1\langle 17\rangle\rangle\rangle$? $\langle 9 \perp\!\!\!\perp 1\langle 2 \perp\!\!\!\perp 1\langle 9\rangle\rangle\rangle$ $\langle 11 \perp\!\!\!\perp 1\langle 2 \perp\!\!\!\perp 1\langle 7\rangle\rangle\rangle$? $\langle 17 \perp\!\!\!\perp 1\langle 2 \perp\!\!\!\perp 1\langle 1\rangle\rangle\rangle$	$\langle 1 \perp\!\!\!\perp 1\langle 6 \perp\!\!\!\perp 1\langle 13\rangle\rangle\rangle$? $\langle 5 \perp\!\!\!\perp 1\langle 6 \perp\!\!\!\perp 1\langle 9\rangle\rangle\rangle$ $\langle 7 \perp\!\!\!\perp 1\langle 6 \perp\!\!\!\perp 1\langle 7\rangle\rangle\rangle$ $\langle 9 \perp\!\!\!\perp 1\langle 6 \perp\!\!\!\perp 1\langle 5\rangle\rangle\rangle$ $\langle 11 \perp\!\!\!\perp 1\langle 6 \perp\!\!\!\perp 1\langle 3\rangle\rangle\rangle$ $\langle 13 \perp\!\!\!\perp 1\langle 6 \perp\!\!\!\perp 1\langle 1\rangle\rangle\rangle$	$\langle 1 \perp\!\!\!\perp 1\langle 10 \perp\!\!\!\perp 1\langle 9\rangle\rangle\rangle$ $\langle 3 \perp\!\!\!\perp 1\langle 10 \perp\!\!\!\perp 1\langle 7\rangle\rangle\rangle$ $\langle 5 \perp\!\!\!\perp 1\langle 10 \perp\!\!\!\perp 1\langle 5\rangle\rangle\rangle$ $\langle 7 \perp\!\!\!\perp 1\langle 10 \perp\!\!\!\perp 1\langle 3\rangle\rangle\rangle$ $\langle 9 \perp\!\!\!\perp 1\langle 10 \perp\!\!\!\perp 1\langle 1\rangle\rangle\rangle$	$\langle 1 \perp\!\!\!\perp 1\langle 14 \perp\!\!\!\perp 1\langle 5\rangle\rangle\rangle$ $\langle 3 \perp\!\!\!\perp 1\langle 14 \perp\!\!\!\perp 1\langle 3\rangle\rangle\rangle$ $\langle 5 \perp\!\!\!\perp 1\langle 14 \perp\!\!\!\perp 1\langle 1\rangle\rangle\rangle$	$\langle 1 \perp\!\!\!\perp 1\langle 18 \perp\!\!\!\perp 1\langle 1\rangle\rangle\rangle$

Кроме того, я построил контрпримеры к одному из неравенств, составляющих гипотезу Рэгсдейл (см. § 3) и M-кривые степени 8, реализующие 42 новых вещественных схемы (старый метод дал 10 схем) (см. [44]). Недавно Е. И. Шустин [51] реализовал M -кривыми степени 8 шесть новых вещественных схем. В таблице на с. 63 перечислены все вещественные схемы M-кривых степени 8, реализованные к концу 1984 г.
Эти результаты привели меня к следующей гипотезе [40]:

(8.4) Гипотеза. *Пусть* $\langle \alpha \amalg 1 \langle \beta \amalg 1 \langle \gamma \rangle\rangle\rangle$ — *вещественная схема M-кривой степени* 8 *с* $\gamma \neq 0$. *Тогда* α *и* γ *нечетны.*

Далее, новым методом были реализованы около 500 вещественных схем M-кривыми степени 10 (см. Ю. С. Численко [3]) (старый метод дал 38 схем);

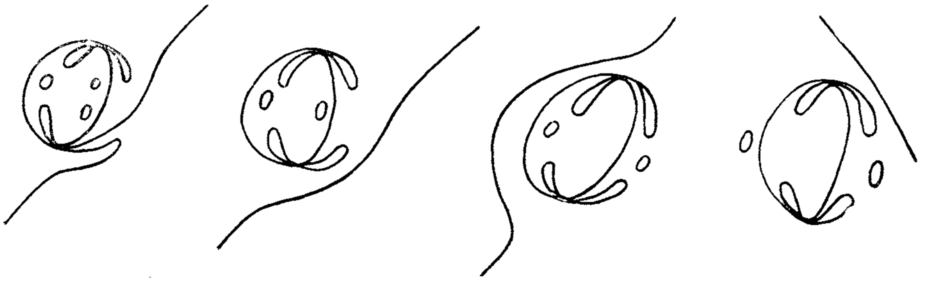


Рис. 6

и 327 вещественных схем (M — 2)-кривыми степени 8 (см. Г. М. Полотовский [28]). Кривые Шустина, упомянутые в § 5, также были построены новым методом.

Можно ожидать, что новый метод будет применен и для построения поверхностей. Сейчас к построениям поверхностей, которые были отражены в обзоре Харламова [14], можно добавить только построения из моей заметки [39]. В [39] были построены поверхности больших степеней, опровергающие имевшуюся гипотезу о максимальном числе компонент поверхности данной степени, и, кроме того, все изотопические типы неособых поверхностей степени 4, кроме одного, были реализованы способом, более элементарным, чем в прежних построениях (обзор прежних построений поверхностей см. в [14]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Арнольд В. И. О расположении овалов вещественных плоских алгебраических кривых, инволюциях четырехмерных гладких многообразий и арифметике целочисленных квадратичных форм.— Функцион. анализ и его прил., 1971, т. 5, вып. 3, с 1—9.

[2] Чепонкус А. Л. О гнездах вещественных плоских алгебраических кривых.— Лит. мат. сб., 1976, т. 16, № 4, с. 239—243.

[3] Численко Ю. С. M-кривые десятой степени.— Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1982, т. 122, с. 146—161.

[4] Численко Ю. С. Пучки вещественных алгебраических кривых.— Тезисы Ленинградской топологической конференции.— Л., 1982, с. 28.

[5] Дубровин Б. А. Матричные конечнозонные операторы.— Итоги науки и техники. Современные проблемы математики.— М.: ВИНИТИ, 1983, т. 23, с. 33—78.

[6] Фидлер Т. Пучки прямых и топология вещественных алгебраических кривых.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1982, т. 46, № 6, с. 853—863.

[7] Фидлер Т. Новые сравнения в топологии вещественных плоских алгебраических кривых.— ДАН СССР, 1983, т. 270, № 1, с. 56—58.

[8] Фидлер Т. Дополнительные неравенства в топологии вещественных плоских алгебраических кривых.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1986.

[9] Ф и н а ш и н С. М. Топология дополнения вещественной алгебраической кривой в $\mathbb{C}P^2$.— Зап. науч. сем. ЛОМИ, 1982, т. 122, с. 137—145.

[10] G r o s s B. H., H a r r i s J. Real algebraic curves.— Ann. sci. Ec. Norm. Sup., 4e serie, 1981, t. 14, p. 157—182.

[11] Г у д к о в Д. А. Топология вещественных проективных алгебраических многообразий.— УМН, 1974, т. 29, вып. 4, с. 3—79.

[12] Г у д к о в Д. А. О топологии алгебраических кривых на гиперболоиде.— УМН, 1979, т. 34, вып. 6, с. 26—32.

[13] G u i l l o u L., M a r i n A. Une extension d'un théorèm de Rohlin sur la signature.— Comp. Rendus, 1977, v. 285, N 3, p. 95—97.

[14] Х а р л а м о в В. М. Вещественные алгебраические поверхности.— Труды Международного конгресса математиков.— Хельсинки, 1978, с. 421—428.

[15] Х а р л а м о в В. М. Жесткая изотопическая классификация вещественных плоских кривых степени 5.— Функцион. анализ и его прил., 1981, т. 15, вып. 1, с. 88—89.

[16] Х а р л а м о в В. М. К классификации неособых поверхностей степени 4 в $\mathbb{R}P^3$ относительно жестких изотопий.— Функцион. анализ и его прил., 1984, т. 18, вып. 1, с. 49—56.

[17] H i l b e r t D. Mathematische probleme.— Arch. Math. Phys. (3), 1901, v. 1, p. 213—237.

[18] Х о в а н с к и й А. Г. Индекс полиномиального векторного поля.— Функцион. анализ и его прил., 1979, т. 13, вып. 1, с. 49—58.

[19] J o h n s o n D. Spin-structures and quadratic forms on surfaces.— J. London Math. Soc., 1980, v. 22, № 2, p. 365—373.

[20] K l e i n F. Gesammelte mathematische Abhandlungen. B. 2.— Berlin, 1922.

[21] M a r i n A. Quelques remarques sur les courbes algèbriques planes réelles.— Preprint.

[22] Н и к у л и н В. В. Целочисленные квадратичные формы и некоторые их геометрические приложения.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1979, т. 43, № 1, с. 111—177.

[23] Н и к у л и н В. В. Инволюции целочисленных квадратичных форм и их приложения к вещественной алгебраической геометрии.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1983, т. 47, № 1, с. 109—188.

[24] N u i j W. A note on hyperbolic polynomials.— Math. Scand., 1968, v. 23, p. 69—72.

[25] P e t r o v s k y I. G. On the topology of real plane algebraic curves.— Ann. Math., 1938, v. 39, N 1, p. 187—209.

[26] P e t r o v s k y I. G. On the diffusion of waves and the lacunas for hyperbolic equations.— Мат. сб., 1945, т. 17 (59), с. 289—370.

[27] П о л о т о в с к и й Г. М. (M-2)-кривые 8-го порядка и некоторые гипотезы.— УМН, 1981, т. 36, вып. 4, с. 235—236.

[28] П о л о т о в с к и й Г. М. О классификации (M-2)-кривых 8-го порядка.— Методы качественной теории дифференциальных уравнений.— Горький, 1983, вып. 5, с. 127—138.

[29] R a g s d a l e V. On the arragement of the real branches of plane algebraic curves.— Amer. J. Math., 1906, v. 28, p. 377—404.

[30] Р о х л и н В. А. Доказательство гипотезы Гудкова.— Функцион. анализ и его прил., 1972, т. 6, вып. 2, с. 62—64.

[31] Р о х л и н В. А. Сравнения по модулю 16 в шестнадцатой проблеме Гильберта.— Функцион. анализ и его прил., 1972, т. 6, вып. 4, с. 58—64.

[32] Р о х л и н В. А. Комплексные ориентации вещественных алгебраических кривых.— Функцион. анализ и его прил., 1974, т. 8, вып. 4, с. 71—75.

[33] Р о х л и н В. А. Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых.— УМН, 1978, т. 33, вып. 5, с. 77—89.

[34] Р о х л и н В. А. Новые неравенства в топологии вещественных плоских алгебраических кривых.— Функцион. анализ и его прил., 1980, т. 14, вып. 1, с. 37—43.

[35] Р о х л и н В. А. Два аспекта топологии вещественных алгебраических кривых.— В кн.: Труды Ленинградской международной топологической конференции.— Л.: Наука, 1983.

[36] Слепян А. Л. О квазикомплексных ориентациях плоских кривых.— Дипломная работа, ЛГУ, 1980.
[37] Шустин Е. И. Контрпримеры к гипотезе Рохлина.— Функцион. анализ и его прил., 1985, т. 19, вып. 1, с. 77—78.
[38] Шустин Е. И. Метод Гильберта — Роона и бифуркации сложных особых точек кривых 8-го порядка.— УМН, 1983, т. 38, вып. 6, с. 157—158.
[39] Виро О. Я. Построение многокомпонентных вещественных алгебраических поверхностей.— ДАН СССР, 1979, т. 248, № 2, с. 279—282.
[40] Виро О. Я. Кривые степени 7, кривые степени 8 и гипотеза Рэгсдейл.— ДАН СССР, 1980, т. 254, № 6, с. 1305—1310.
[41] Виро О. Я. Плоские вещественные кривые степеней 7 и 8: новые запреты.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1983, т. 47, № 5, с. 1135—1150.
[42] Виро О. Я. Комплексные ориентации вещественных алгебраических поверхностей.— УМН, 1982, т. 37, вып. 4, с. 93.
[43] Viro O. Y. Gluing of plane real algebraic curves and constructions of curves of degrees 6 and 7.— Proc. Leningrad Intern. Topology Conference, 1982, p. 187—200.
[44] Виро О. Я. Склеивание алгебраических гиперповерхностей, устранения особенностей и построения кривых.— В кн.: Труды Ленинградской международной топологической конференции.— Л.: Наука, 1983, с. 149—197.
[45] Виро О. Я. Успехи последних 5 лет в топологии вещественных алгебраических многообразий.— Proc. Intern. Congress of Math., Warszawa 1983, Aug. 16—24, p. 525—611.
[46] Виро О. Топологические задачи о точках и прямых трехмерного пространства.— ДАН СССР, 1986, т. 284, № 5, с. 1049—1052.
[47] Wilson G. Hilberts sixteenth problem.— Topology, 1978, v. 17, p. 53—74.
[48] Звонилов В. И. Комплексные ориентации вещественных алгебраических кривых с особенностями.— ДАН СССР, 1983, т. 268, N 1, с. 22—26.
[49] Звонилов В. И. Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых на поверхности.— Функцион. анализ и его прил., 1982, т. 16, вып. 3, с. 56—57.
[50] Звонилов В. И. Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых на гиперболоиде и эллипсоиде.— Функцион. анализ и его прил., 1986.
[51] Шустин Е. И. Независимость устранений особых точек и новые M-кривые степени 8.— УМН, 1985, т. 40, вып. 4.
[52] Гудков Д. А., Небукина Г. С. Точки перегиба и двойные касательные кривых четвертого порядка.— Деп. ВИНИТИ №№ 420782, 1783, 70484.
[53] Brusotti L. Sulla generazzione di curve piane algebriche reali mediante «piccola variazione» di una curva spezzata.— Ann. di Matem. (3), 1913, v. 22, p. 117—169.
[54] Brusotti L. Su talune questione di realita nei loro metodi, resultati e pro le me, Colloque sur les questions de realite en geometrie.— Liege, 1955, p. 105—129; Paris, 1956.
[55] Comessatti A. Sulla connessione delle superficie algebriche reali.— Ann. di Matem., 1927—1928, v. 4, No. 5, p. 299—317.
[56] Comessatti A. Sulla connessione e sui numeri base delle superficie algebriche reali.— Rend. Semin. Matem. Padova, 1932, v. 3, p. 141—162.
[57] Harnack A. Über Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven.— Math. Ann. 1876, B. 10, S. 189—199.
[58] Hilbert D. Über die reelen Züge algebraischen Curven.— Math. Ann. 1891, B. 38, S. 115—138.
[59] Hilbert D. Über das Gestalt einer Fläche vierter Ordnung.— Göttingen Nachrichten, 1909, S. 308—313.
[60] Klein F. Über eine neue Art von Riemann'schen Flachen.— Math. Ann., 1876, B. 10, S. 398—416.
[61] Rohn K. Die Flächen vierter Ordnung hinsichtlich ihrer Knotenpunkte und ihrer Gestattung.— Math. Ann., 1887, B. 29, S. 81—96.

[62] Rohn K. Die Maximalzahl und Anordnung der Ovale bei der ebenen Curve 6 Ordnung und bei Flache 4 Ordnung.— Math. Ann. 1913, B. 73, S. 177—229.

[63] Petrovsky I. Sur le topologie des courbes réelles et algèbriques.— C. R. Acad. Sci. Paris, 1933, p. 1270—1272.

[64] Варченко А. Н. О локальном вычете и форме пересечений в исчезающих когомологиях.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1985, т. 49, № 1, с. 32—54.

[65] Гудков Д. А., Уткин Г. А. Топология кривых 6-го порядка и поверхностей 4-го порядка.— Уч. зап. Горьковского ун-та, 1969, вып. 87.

[66] Гудков Д. А., Крахнов А. Д. О периодичности эйлеровой характеристики вещественных алгебраических $(M - 1)$-многообразий.— Функцион. анализ и его прил., 1973, т. 7, вып. 2, с. 15—19.

[67] Харламов В. М. Новые сравнения для эйлеровой характеристики вещественных алгебраических многообразий.— Функцион. анализ и его прил., 1973, т. 7, вып. 2, с. 74—78.

[68] Гусейн-Заде С. М. Индекс особой точки градиентного векторного поля.— Функцион. анализ и его прил., 1984, т. 18, вып. 1, с. 7—12.

[69] Арнольд В. И., Олейник О. А. Топология действительных алгебраических многообразий.— Вестн. МГУ, сер. 1, 1979, № 6, 7—17.

[70] Олейник О. А., Петровский И. Г. О топологии действительных алгебраических поверхностей.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1949, № 13, с. 389—402.

[71] Олейник О. А. О топологии действительных алгебраических кривых на алгебраической поверхности.— Мат. сб., 1951, т. 29 (71), с. 133—156.

[72] Олейник О. А. К шестнадцатой проблеме Гильберта.— В кн.: Проблемы Гильберта.— М., 1969, с. 182—195.

Ленинградский государственный
университет им. А. А. Жданова

Поступила в редакцию
22 мая 1985 г.