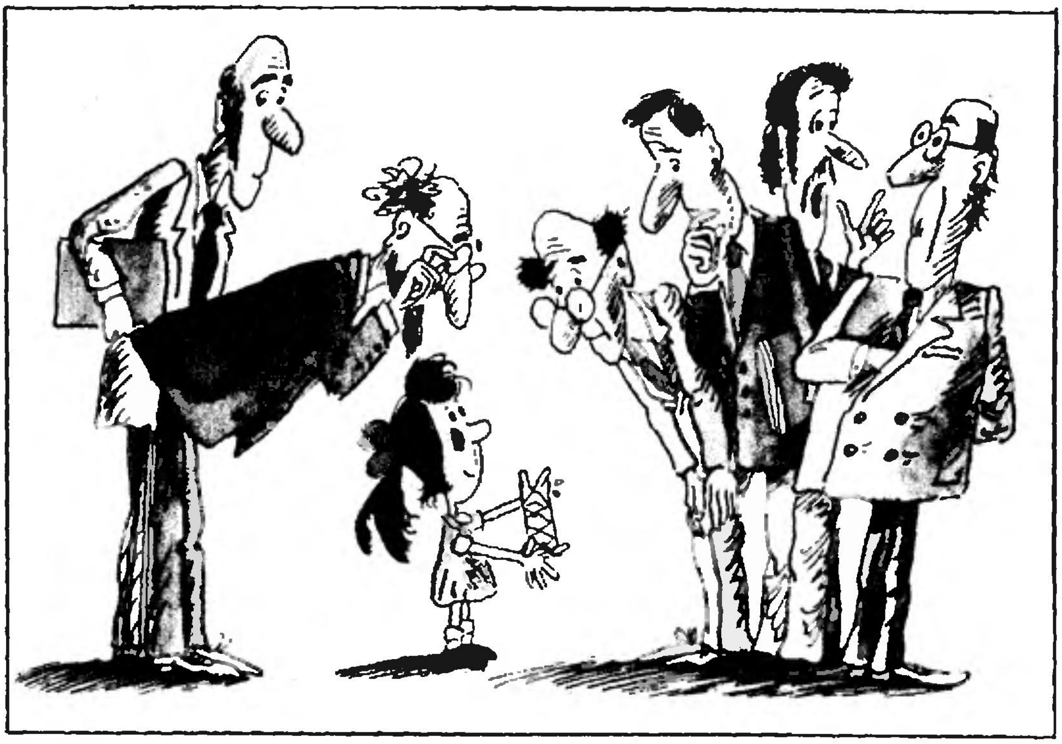


О. Виро

Раскрашенные узлы

Что такое узел

Занимаясь каким-нибудь предметом из реальной жизни, математики обычно заменяют его подходящим математическим объектом. Не избежал этой участи и веревочный узел — он был превращен в узел математический.

Прототип математического узла — это заузленный кусок веревки с закрепленными концами.

Одним из вопросов, побудивших математиков заняться узлами, был вопрос, какие узлы можно развязать, не порвав, и какие нельзя.

Концы веревки приходится закреплять, потому что если не запретить ими манипулировать, все узлы окажутся одинаково завязанными (в самом деле, любой узел на веревке можно развязать, протягивая конец веревки поочередно через петли узла).

Более удобный способ избавиться от заботы о концах веревки — соединить их друг с другом. Эта операция показана на рисунке 1. В результате кусок веревки превращается в заузленное кольцо.

Следующий шаг к математическому узлу — замена веревки линией — осью веревки.

Не всякая линия способна быть осью веревки. Например, кривую с бесконечной последовательностью бесконечно убывающих узелков (рис. 2) невозможно «нарастить» до веревки конечной толщины. Кривые такого рода рассматриваются в математике; они называются *дикими узлами*.

Мы не будем здесь заниматься дикими узлами и, чтобы исключить их, примем следующее определение: *полигональным узлом* называется замкнутая, связная, не имеющая точек самопересечения пространственная ломаная, составленная из конечного числа прямолинейных отрезков.

Это определение вполне соответствует нашему наглядному представлению об узлах. Любой полигональный узел можно нарастить до веревочного кольца и в любом веревочном кольце можно найти ось, составленную из конечного числа отрезков.

Слово «связная» в определении полигонального узла означает, что ломаная не представляется в виде объединения нескольких замкнутых ломаных. Если не настаивать на связности, то получится определение *полигонального зацепления*. На рисунке 3 изображены полигональные узлы, а на рисунке 4 — полигональные зацепления, не являющиеся узлами.

Поскольку в этой статье все узлы и зацепления будут полигональными, слово «полигональный» будет для краткости опускаться.

Как нарисовать узел

При изображении узла выбирают такую точку наблюдения, чтобы, во-первых узел лежал по одну сторону от некоторой плоскости, проходящей через эту точку, и, во-вторых, чтобы никакие три звена узла не казались из нее проходящими через одну точку. Выполнения первого условия можно достичь, выбрав точку наблюдения достаточно далеко от узла. Из удовлетворяющей этому условию точки весь узел можно спроектировать на плоскость, то есть как бы охватить одним взглядом. Для выполнения второго условия нужно, чтобы всякая прямая, проходящая через точку наблюдения, задевала не более двух звеньев узла. Выполнения этого условия можно достичь сколь угодно малым смещением точки наблюдения.

В том месте, где изображения двух непересекающихся звеньев узла пересекаются, нужно указать, какое звено проходит ближе, а какое — дальше. Для этого изображение дальнего звена прерывают, как это сделано на рисунках 3 и 4.

Изображение узла, выполненное с соблюдением этих правил, называется *диаграммой* узла.

Что значит «одинаково заузленные» узлы

Веревочные кольца, которые получаются друг из друга в результате изгибов, растяжений, сжатий и других непрерывных деформаций, естественно считать *одинаково заузленными*. Это наглядное представление об одинаковой заузленности при переходе к полигональным узлам превращается в понятие и з о т о п н о с т и: два узла (или, более общо, два зацепления) называются *изотопными*, если от одного к другому можно перейти, последовательно выполняя преобразования, которые называются элементарными изотопиями. *Элементарная изотопия* — это или замена одного из звеньев узла двумя новыми отрезками, которые вместе с ним образуют контур треугольника, пересекающегося с прежним узлом только по замененному звену*), или обратная операция — замена двух соседних звеньев одним отрезком, который вместе с ними образует контур треугольника, пересекающегося с прежним узлом только по заменяемым звеньям. На рисунке 5 показаны два узла, получающиеся друг из друга элементарной изотопией.

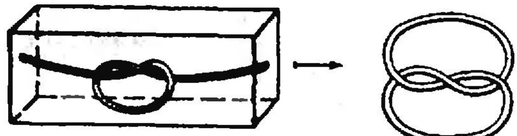


Рис. 1.

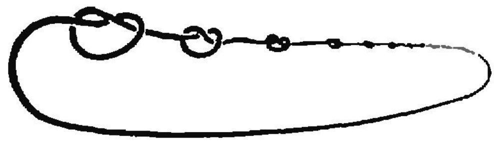
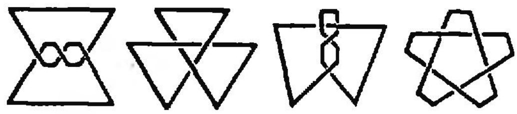
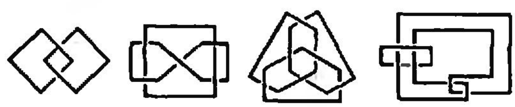


Рис. 2.



а) б) в) г)

Рис. 3.



а) б) в) г)

Рис. 4.

*) Эти «два новых отрезка» вместе с заменяемым звеном могут образовывать «вырожденный» треугольник — отрезок. В этом случае элементарная изотопия сводится к добавлению внутри звена новой вершины.

Рис. 5.

Треугольник, участвующий в определении элементарной изотопии, нужно воспринимать как траекторию деформации.

Упражнение 1. Докажите, что узлы с одинаковыми диаграммами изотопны.

Узел, изотопный контуру треугольника, называется *тривиальным*. Узлы, изображенные на рисунке 5, тривиальны. Последовательность элементарных изотопий, соединяющих их с контуром треугольника, показана на рисунке 6.

Ясно, что контуры любых двух треугольников изотопны, так что все тривиальные узлы изотопны друг другу. Тем не менее, тривиальные узлы могут быть весьма замысловатыми.

Упражнения

2. Докажите тривиальность узлов, изображенных на рисунке 7.

3. Докажите, что узлы, изображенные на рисунках 3, а и 3, б, изотопны.

Как доказывать неизотопность узлов

Определение изотопности немедленно ставит перед нами проблему: *существуют ли неизотопные узлы?*

Пока мы не сможем ответить на этот вопрос, все узлы будут для нас «на одно лицо».

Мы знаем, что очень затейливые узлы могут оказаться тривиальными. С другой стороны, если мы попытаемся развязать веревочное кольцо, изображенное на рисунке 8, а, то скоро придем к убеждению, что это невозможно. Но как доказать соответствующее математическое утверждение? Как доказать, что изображенный на рисунке 8, б узел нетривиален? (Этот узел носит название *трилистник*.)

Напомню, что нетривиальность узла — это невозможность его превращения при помощи элементарных изотопий в контур треугольника. Сложность знакомых нам примеров тривиальных узлов (см. рис. 7) показывает, как нелегко по виду узла узнать, тривиален он или нет. Единственный мыслимый способ доказательства нетривиальности узла — найти какое-нибудь свойство узлов, сохраняющееся при элементарных изотопиях, которым наш узел обладает, а контур треугольника не обладает.

Свойство узла, сохраняющееся при элементарных изотопиях, называется *инвариантным свойством* или просто *инвариантом* узла (инвариант — слово латинского происхождения, буквально означает «неизменный»).

В теории узлов изучаются главным образом их инвариантные свойства. Примером инвариантного свойства может служить тривиальность. Легко определить и много других инвариантов. Например, инвариантами узла являются наименьшее из чисел звеньев и наименьшее из чисел скрещиваний в диаграммах изотопных ему узлов.

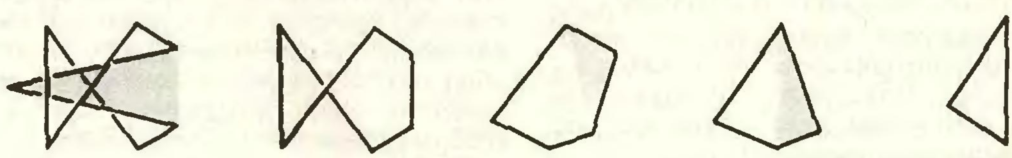


Рис. 6.

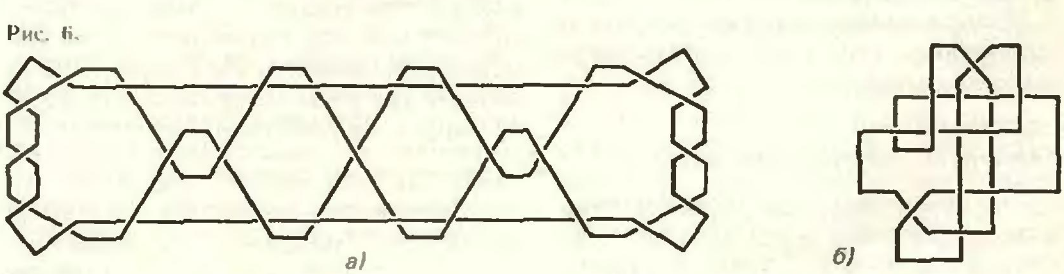
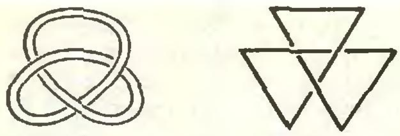


Рис. 7.



а) б)

Рис. 8.

Однако введение этих и многих аналогичных инвариантов не помогает решить старые вопросы, а *приводит* к постановке новых. Дело в том, что вычисление этих инвариантов вызывает те же затруднения, что и доказательство нетривиальности узла.

Помочь при доказательстве нетривиальности узла может только легко вычислимый инвариант, определяющийся не через целый класс изотопных узлов, а непосредственно *по диаграмме узла*. Такой инвариант мы сейчас введем.

Раскрашиваем диаграммы узлов в три цвета

Напомню, что диаграмма узла — это его изображение на плоскости, в котором изображения никаких трех звеньев не проходят через одну точку и в местах, где должны были бы пересекаться изображения непересекающихся звеньев, изображение дальнего звена прерывается. Из-за этих прерываний диаграмма узла оказывается составленной из нескольких непересекающихся ломаных. Эти ломаные будем называть *участками* диаграммы. Их число равно числу прерываний, то есть числу скрещиваний.

Для доказательства неизотопности узлов оказывается полезно раскрашивать их диаграммы, соблюдая некоторые правила.

Раскраску диаграммы узла в черный, красный и синий цвета будем *называть правильной,* если каждый ее участок окрашен в один цвет и вблизи каждой точки скрещивания либо все три участка окрашены в один цвет, либо встречаются все три цвета. Примеры правильной раскраски показаны на рисунке 9, примеры *неправильной — на рисунке* 10.

Упражнения

4. Докажите, что диаграммы узлов, *изображенные* на рисунках 6 и 7, нельзя правильно раскрасить, использовав все три цвета, то есть докажите, что эти диаграммы допускают только три одноцветные правильные раскраски.

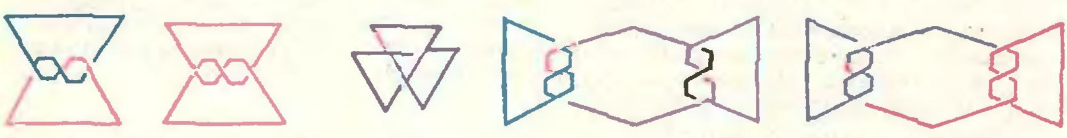
5. Докажите, что число правильных раскрасок диаграммы трилистника (рис. 8,*б*) равно девяти.

Теорема 1 (Основная теорема о трехцветных раскрасках). *Число правильных раскрасок диаграммы узла в три цвета является инвариантом узла.*

Прежде чем доказывать теорему 1, обсудим некоторые ее применения. Вот простейшее следствие:

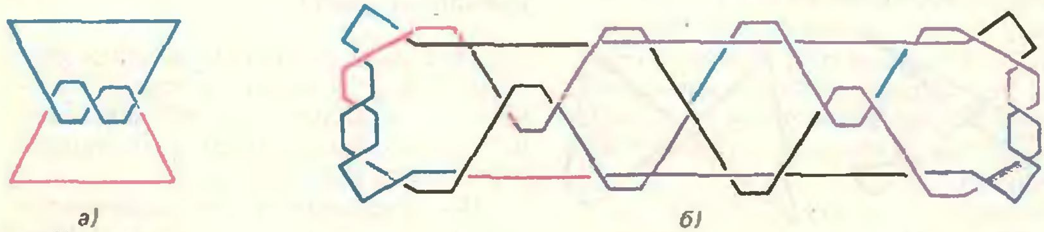
Следствие 1. *Если диаграмма узла допускает правильную раскраску, в которой участвуют все три цвета, то узел нетривиален.*

Это следствие сразу позволяет получить результат, сформулированный в упражнении 4 (узлы, о которых там идет речь, тривиальны). Но неизмеримо важнее то, что из него вытекает нетривиальность трилистника и многих других узлов.



а) б) в) г) д)

Рис. 9.



а) б)

Рис. 10.

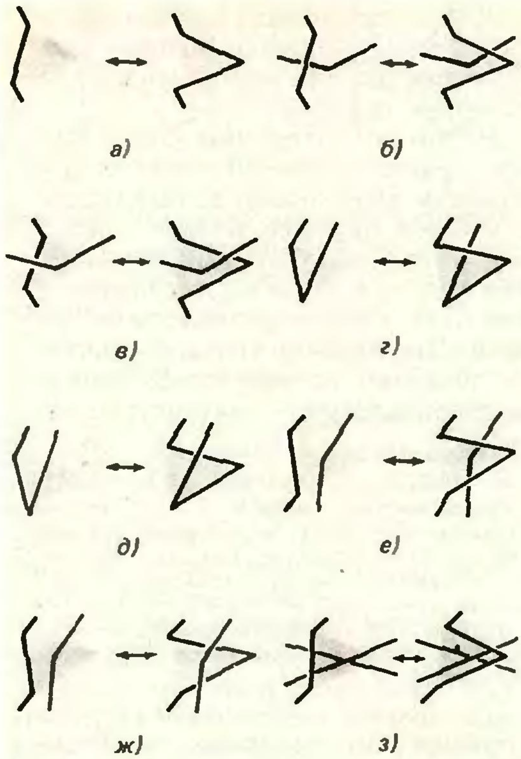


Рис. 11.

Упражнение 6. Докажите (опираясь на теорему 1), что трилистник не изотопен узлам, изображенным на рисунках 3,в и 3,г, и что узел, изображенный на рисунке 9,г, не изотопен ни трилистнику, ни этим узлам.

Узлы, изображенные на рисунках 3,в и 3,г, нетривиальны. Однако это невозможно доказать правильными трехцветными раскрашиваниями, так что теорема 1, хотя и позволяет доказывать неизотопность узлов во многих случаях, не дает универсального способа доказательства.

Упражнение 7. Постройте бесконечную последовательность узлов, у которых числа правильных трехцветных раскрасок диаграмм попарно различны. (По теореме 1 любые два узла этой последовательности неизотопны.)

Теорема 1 останется верной, если в ней вместо слова «узел» написать слово «зацепление».

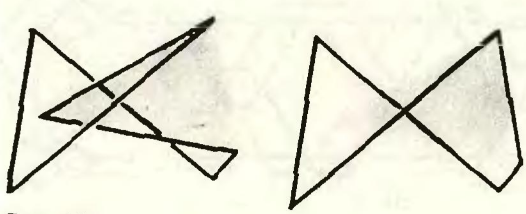


Рис. 12.

Замечание. *Если диаграмма зацепления не допускает правильной раскраски, в которой присутствовало бы более одного цвета, то зацепление невозможно расцепить* (то есть оно не изотопно никакому зацеплению, состоящему из узлов, которые располагаются по разные стороны от некоторой плоскости).

Упражнение 8. Докажите, что зацепления, изображенные на рисунке 4, не расцепляются.

Как доказать теорему 1

Теорема 1 очевидным образом вытекает из следующих двух теорем, доказательства которых несложны, но довольно громоздки; прилежный читатель, несомненно, найдет их самостоятельно.

Теорема 2. *Всякую элементарную изотопию зацепления можно заменить конечной последовательностью элементарных изотопий, каждая из которых изменяет диаграмму зацепления одним из способов, изображенных на рисунке 11.*

Например, элементарную изотопию, изображенную на рисунке 12, можно заменить последовательностью элементарных изотопий, показанных на рисунке 13 (цифрами указан порядок выполнения элементарных изотопий).

Теорема 3. *Между правильными трехцветными раскрасками диаграмм, получающихся друг из друга операциями, изображенными на рисунке 11, существует взаимно однозначное соответствие, при котором в соответствующих раскрасках неизменяющиеся части диаграмм окрашены одинаково.*

Для всех операций, кроме операции, изображенной на рисунке 11,з, утверждение теоремы 3 очевидно. В последнем случае доказательство легко сводится к картинкам, показанным на рисунке 14.

Почему же число правильных раскрасок диаграммы — инвариант узла?

Я надеюсь, что читатель доказал теоремы 2 и 3, а вместе с ними и теорему 1. Однако что же ответить на вопрос, вынесенный в заголовок этого параграфа?

Вы убедились в инвариантности числа правильных раскрасок, но, ве-

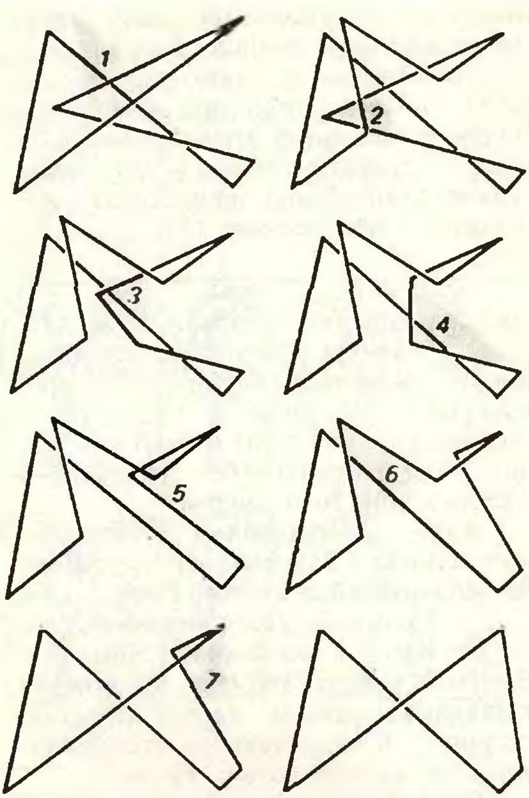


Рис. 13.

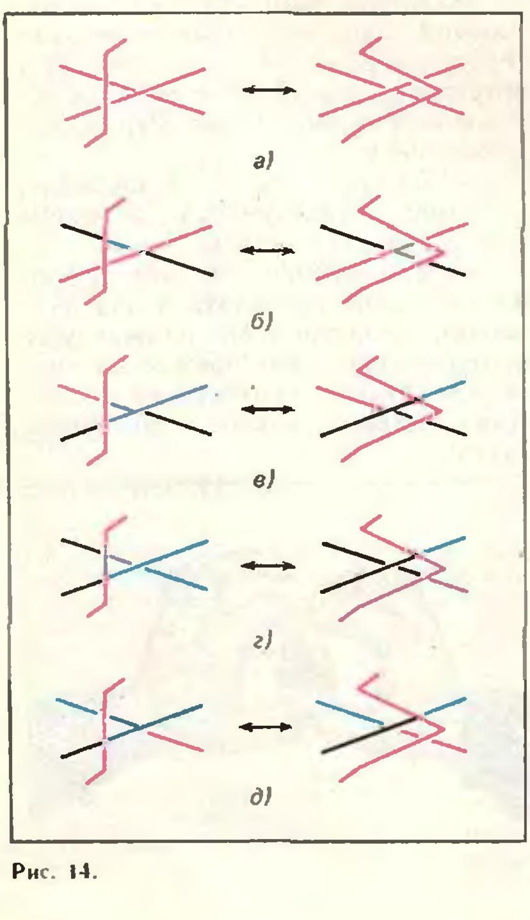


Рис. 14.

роятно, скажете, что хотели бы узнать о настоящих причинах этого удивительного явления. Вы ждете объяснений и хотите понять, как математики додумались раскрашивать диаграммы узлов. Не могло же, кроме того, это доказательство быть первым доказательством! Так можно доказать инвариантность любого инварианта, *определяемого по диаграмме узла*, совершенно не понимая, откуда он взялся! Ведь непонятно, почему нужно раскрашивать в три цвета и как возникли правила раскраски. Наконец, неясно, как это обобщить, а это — верный признак непонимания.

Почему же я выбрал такой путь доказательства? На то были две причины. Во-первых, настоящие доказательства теоремы 1, проясняющие суть дела, связаны со сложными вспомогательными объектами, которые занимают почетное место в современной математике, но которых нет в школьной математике. Мне же хотелось представить чисто элементарное доказательство существования нетривиальных узлов. В литературе, а тем более в популярной литературе, таких доказательств не было. Во-вторых, опираясь на теорему 2, действительно можно доказать инвариантность любого инварианта, определяемого по диаграмме. Попытайтесь придумать совершенно новый инвариант и доказать его инвариантность таким образом. Если получится, сообщите, это может оказаться очень интересным! Известно много инвариантов, определяемых по диаграмме узла, но в определениях большей их части встречаются неэлементарные математические понятия. Поэтому опасность придумать что-нибудь известное не велика.

Чем в действительности объясняется инвариантность числа правильных раскрасок? Важнейшим инвариантом *узла является его группа*. Сама по себе группа узла — непростой объект. Это множество, в котором определена операция, своими свойствами напоминающая сложение целых чисел. Доказать, что группы двух узлов различны, может быть очень трудно. Один из простейших способов сделать это состоит в изучении отображений групп узлов в более простые множества с операциями. Например, в множество всех перемещений плоскости, переводящих в себя некоторый правильный треугольник. Оказывается, правильные трехцветные раскраски диаграммы узла — это отображения группы узла в множество этих перемещений, обладающие специальными свойствами, и, поскольку группа узла не изменяется при изотопиях, число правильных трехцветных раскрасок тоже остается неизменным. Таков план «более правильного» доказательства теоремы 1*).

Амеба... в пиджаке

Эта история произошла в Москве летом 1966 года на Международном конгрессе математиков.

После одного из рабочих дней Конгресса в непринужденной обстановке собрались несколько математиков-топологов. Кроме советских ученых, среди них были выдающийся алгебраический тополог Дж. Ф. Адамс из Великобритании, его соотечественник, не менее известный геометрический тополог Е. К. Зиман и аспирант последнего Колин Рурк. Продолжался извечный спор о взаимоотношениях геометрии и алгебры. Темпераментный геометр Зиман нападал на алгебраиста Адамса, обвиняя его (а в его лице и всех алгебраистов) в отсутствии воображения и в практической беспомощности.

— Со всеми вашими изощренными алгебраическими инвариантами вы не в состоянии решить простейшие практические задачи,— сказал Зиман.— Вот, например, такую:

Зиман соединил большой и указательный пальцы на левой и на правой руках так, что получились два зацепленных кольца (рис. 1).

— Могу ли я расцепить эти кольца, не разжимая пальцы? — спросил он.— Я имею в виду, разумеется, что мое тело можно свободно деформировать (без разрывов и склеек), как тело амебы.

Адамс не спешил с ответом, и тут вступил в разговор доселе скромно молчавший аспирант Рурк.

— Нельзя,— уверенно заявил он.

— Как! — воскликнул Зиман.— Вы, мой ученик, геометр, не можете правильно решить такую простую задачу?! Я понимаю — эти беспомощные алгебраисты... Но вы!

Однако Рурк упорствовал. Вскоре, как водится среди англичан, было заключено пари. Тут же, на бумажной салфетке, Зиман нарисовал серию превращений амебы (рис. 2) и потребовал немедленной выплаты условленной суммы. Ответ Рурка был лаконичным:

— Да, но... вы — в пиджаке.

Зиман призадумался, а затем стал рассуждать вслух:

— Да, конечно, все эти деформации можно проделать и под пиджаком, но после этого пиджак уже не будет сидеть как прежде на амебе. Он будет связывать ей руки... Даже одного рукава для этого хватит.

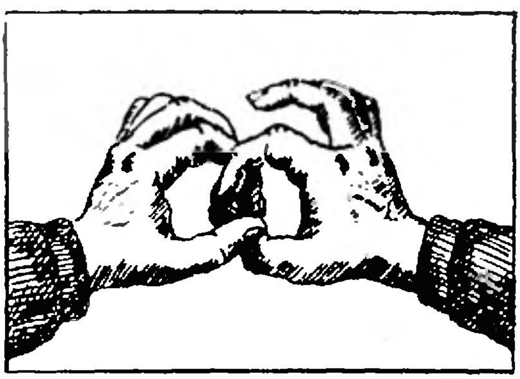


Рис. 1.

*) Такое доказательство и сама идея раскрашивать диаграммы узлов принадлежат американскому топологу. Р. Фоксу — см. его статью «Metacyclic invariants of knots and links» (Canadian Journal of Mathematics, 1980, № 2, vol. 22, pp. 193—201). Об узлах с несколько иной точки зрения можно прочитать в статье «Узел на столе математика» («Квант», 1975, № 7).

Пока Зиман нехотя доставал из кармана бумажник, его окончательно расстроила завершающая эту историю реплика Адамса:

— Кстати, хотел бы я знать, как вы это докажете без инвариантов?

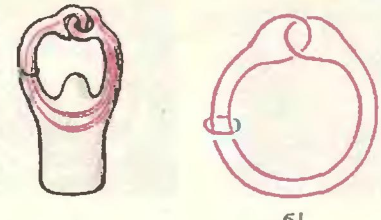


Рис. 3. а) б)

Опираясь на инвариант, описанный в статье О. Виро, докажем, что амеба в пиджаке не может расцепить пальцы.

Проведем мысленно две замкнутые кривые: синюю — по пиджаку вокруг правой руки (рукав) и красную, соединяющую внутри амебы большие и указательные пальцы правой и левой рук (рис. 3,*а*). Эти две кривые образуют зацепление (рис. 3,*б*), изотопное изображенному на рисунке 4,*г* на с. 9. Если бы амеба смогла разнять руки, то она смогла бы снять пиджак. Но это невозможно, поскольку зацепление рисунка 4,*г* расцепить нельзя (см. упражнение 8 на с. 12).

О. В.

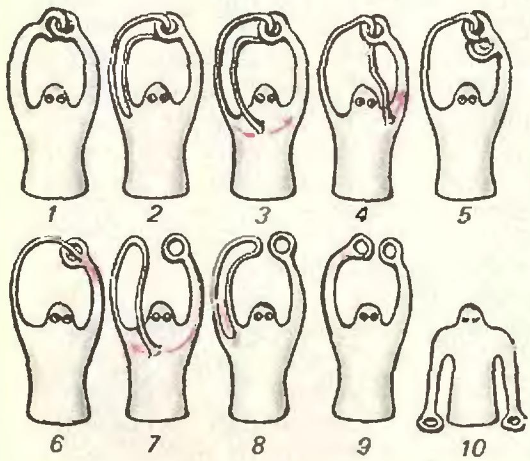


Рис. 2.

Задачи наших читателей

1. а) Возьмем число 16. Между единицей и шестеркой вставим число 15 — получим число 1156. В середину этого числа снова вставим 15 — получим 111556 и т. д. Докажите, что все такие числа (вида 11...155...56) являются квадратами целых чисел.

б) То же про числа 4489, 444889, ..., получающиеся из 49 вставкой в середину числа 48.

2. а) Между цифрами числа 961 вставили по n нулей. Докажите, что при любом n получится квадрат целого числа.

б) Найдите другие трехзначные числа, обладающие тем же свойством.

3. а) Докажите, что дроби

$$\frac{19}{95}, \frac{199}{995}, \frac{1999}{9995}, \ldots, \frac{199\ldots9}{99\ldots95} \ldots$$

можно «сократить», «зачеркнув» все девятки.

б) Есть ли еще дроби, допускающие подобное обращение?

И. Суев

4. Обозначим через $S(n)$ сумму цифр числа n. Докажите, что последовательность $S(1979)$, $S(1979^2)$, $S(1979^3)$, ... не ограничена.

А. Келирен