Функциональный анализ и его приложения,
т. 13, вып. 3, 1979, 71—72.

УДК 513.62

ПОСТРОЕНИЕ M-ПОВЕРХНОСТЕЙ

О. Я. Виро

1. Обобщенное неравенство Харнака и проблема его точности. Известное неравенство Харнака [1], согласно которому число компонент неособой плоской проективной вещественной алгебраической кривой степени m не превосходит $(m^2-3m+4)/2$, обобщается следующим образом: если A — вещественное алгебраическое многообразие и $\mathbf{C}A$ — его комплексификация, то $\dim H_*(A; \mathbf{Z}_2) \leqslant \dim H_*(\mathbf{C}A; \mathbf{Z}_2)$ (см., например, [2]). Если $\mathbf{C}A$ — неособая гиперповерхность степени m комплексного проективного пространства $\mathbf{C}P^q$, то последнее неравенство приобретает вид $\dim H_*(A; \mathbf{Z}_2) \leqslant q + [(m-1)^q - (-1)^q](1-m^{-1})$; в частности, для поверхности в трехмерном пространстве

$$\dim H_*(A; \mathbf{Z}_2) \leqslant m^3 - 4m^2 + 6m. \tag{1}$$

Неособые проективные вещественные алгебраические многообразия, для которых $\dim H_*(A; \mathbf{Z}_2) = \dim H_*(\mathbf{C}A; \mathbf{Z}_2)$, называются *$M$-многообразиями*.

Харнак [1] доказал точность своего неравенства, т. е. доказал, что для любого m существует плоская M-кривая степени m. В 16-й проблеме Гильберта особо выделен вопрос о топологии M-кривых. Исследования в этом направлении привели, с одной стороны, к построению большого количества M-кривых и, с другой стороны, к доказательству общих теорем Рохлина [3] о топологии M-многообразий любой размерности. Однако, насколько автору известно, имеющиеся в литературе сведения о существовании M-многообразий размерностей $\geqslant 2$ очень скудны: например, существование в $\mathbf{R}P^3$ M-поверхностей степени m доказано только для $m \leqslant 4$.

2. Основной результат. В настоящей заметке строятся в $\mathbf{R}P^3$ M-поверхности любой степени.

Теорема 1. *Для любого натурального числа m в $\mathbf{R}P^3$ существует неособая вещественная алгебраическая поверхность A_m степени m с $(m^3-6m^2+11m)/6$ компонентами, из которых все, кроме одной, гомеоморфны сфере, а одна гомеоморфна при четном m сфере с $(2m^3-6m^2+7m)/6$ ручками, а при нечетном m — проективной плоскости с $(2m^3-6m^2+7m-3)/6$ ручками.*

Построение поверхностей A_m (см. п. 4) обобщает построение M-кривых Харнака [1].

3. Точность усиленного неравенства Петровского — Олейник. Предыдущая теорема доказывает не только точность обобщенного неравенства Харнака, но и точность доказанного Харламовым [4] усиления левого из неравенств

$$-(2m^3-6m^2+7m-6)/3 \leqslant \chi(A) \leqslant (2m^3-6m^2+7m)/3 \tag{2}$$

Петровского — Олейник [5]. Это усиление состоит в том, что если A — неособая проективная вещественная алгебраическая поверхность степени $m \neq 2$ в $\mathbf{R}P^3$, имеющая k_+ компонент, гомеоморфных сфере, и k_0 компонент, гомеоморфных тору, то

$$-(2m^3-6m^2+7m-6)/3 \leqslant \chi(A) - 2(k_+ + k_0).$$

4. Построение поверхностей A_m. Для построения понадобится серия плоских M-кривых $C_1, C_2, \ldots$, удовлетворяющая следующим двум условиям: (i) C_m — кривая степени m, пересекающаяся с некоторым прямолинейным отрезком I_m в m точках, расположенных на одной компоненте C_m^0 кривой C_m; (ii) при нечетном m все овалы кривой C_m расположены вне друг друга, при четном m овал C_m^0 охватывает $(m^2-6m+8)/8$ овалов, лежащих вне друг друга, а остальные $(3m^2-6)/8$ овалов лежат вне C_m^0 и вне друг друга. Такая серия M-кривых была построена Харнаком [1].

Построим для каждого m выпуклый четырехугольник, одной из сторон которого является I_m, и который пересекается с C_m по m дугам, соединяющим сторону I_m с противоположной стороной. При помощи проективных преобразований совместим все эти четырехугольники с одним четырехугольником Q так, чтобы кривые C_m с нечетными m пересекали его основания, а кривые C_m с четными m — его боковые стороны.

Пусть $\gamma_m(x_0, x_1, x_2) = 0$ — уравнение кривой C_m, и пусть многочлены γ_m выбраны так, чтобы на каждой стороне четырехугольника Q все многочлены γ_m, не принимающие на ней значение 0, принимали значения одного знака.

Положим $\alpha_1(x_0, x_1, x_2, x_3) = x_3 + t_1\gamma_1(x_0, x_1, x_2)$ для некоторого $t_1 > 0$ и $A_1 = \{x \in \mathbf{R}P^3 \mid \alpha_1(x) = 0\}$. Пусть многочлен α_{m-1} и поверхность $A_{m-1} = \{x \in \mathbf{R}P^3 \mid \alpha_{m-1}(x) = 0\}$ уже построены. Рассмотрим семейство поверхностей $A_t^{(m)} = \{x \in \mathbf{R}P^3 \mid x_3\alpha_{m-1} + t\gamma_m = 0\}$. Для некоторого $t_m > 0$ поверхности $A_t^{(m)}$ с $t \in (0, t_m]$ неособы и изотопны друг другу. Положим $\alpha_m = x_3\alpha_{m-1} + t_m\gamma_m$ и $A_m = \{x \in \mathbf{R}P^3 \mid \alpha_m(x) = 0\}$.

5. Точность левого неравенства Петровского — Олейник. Следующая теорема показывает, что левое из неравенств (2) точно.

Т е о р е м а 2. *Для любого натурального m в $\mathbf{R}P^3$ существует неособая вещественная алгебраическая поверхность A'_m степени m, гомеоморфная при четном m сфере с $(2m^3 - 6m^2 + 7m)/6$ ручками и при нечетном m — проективной плоскости с $(2m^3 - 6m^2 + 7m - 3)/6$ ручками.*

Поверхности A'_m можно построить тем же способом, что и поверхности A_m, взяв вместо C_m вещественные рациональные кривые, удовлетворяющие условию (i) пункта 4, все особые точки которых являются изолированными вещественными простыми двойными точками. Существование таких кривых доказывается при помощи модификации конструкции Харнака [1].

6. Другие результаты. При помощи той же техники автором сделано также следующее: (i) построены другие серии M-поверхностей в $\mathbf{R}P^3$ и серии M-поверхностей в линейных расслоениях над $\mathbf{R}P^2$; (ii) доказано, что для того чтобы в $\mathbf{R}P^3$ существовала неособая вещественная алгебраическая поверхность A степени m с $\dim H_*(A; \mathbf{Z}_2) = b$, необходимо и достаточно, чтобы $b \equiv m \pmod 2$ и $3(1-(-1)^m)/2 \leqslant b \leqslant m^3 - 4m^2 + 6m$; (iii) в $\mathbf{R}P^4$ построены M-гиперповерхности любой степени. Моя гипотеза состоит в том, что аналогичным образом можно построить M-гиперповерхности любой степени в $\mathbf{R}P^q$ с любым q *).

Ленинградский государственный университет

Поступило в редакцию 21 июля 1978 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. H a r n a c k A., Math. Ann. **10** (1876), 189—199. 2. Г у д к о в Д. А., УМН **XXIX**, вып. 4 (1974), 3—79. 3. Р о х л и н В. А., Функц. анализ **6**, вып. 4 (1972), 58—64. 4. Х а р л а м о в В. М., Функц. анализ **10**, вып. 4 (1976), 55—68. 5. О л е й н и к О. А., П е т р о в с к и й И. Г., Изв. АН СССР, серия матем. **13** (1949), 389—402.

*) П р и м е ч а н и е п р и к о р р е к т у р е. В настоящее время эта гипотеза доказана. Более того, автору удалось доказать то же для произвольных полных пересечений проективного пространства.