АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ НИЗКИХ ТЕМПЕРАТУР

А.Э.Еременко, М.Ю.Любич

ИТЕРАЦИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

П р е п р и н т 6-84

Харьков - 1984

УДК 517. 535.4

А.Э.Еременко,
М.Ю.Любич

ИТЕРАЦИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Изучены итерации целых функций из одного специального класса S. Доказано, что функции из S не имеют блуждающих компонент множества нормальности. Каждая орбита из множества нормальности поглощается целиком областей Фату или Зигеля. Множество таких циклов конечно. Для функций $f \in S$ доказана одна гипотеза И. Бэйкера о вполне инвариантных областях. При некоторых условиях установлено, что легебова мера множества Жюлиа равна нулю. В качестве иллюстрации рассмотрено семейство $f_c(z) = \exp z + c \in S$. Приведен пример целой функции $f \notin S$, с односвязной блуждающей областью, орбита которой имеет бесконечное множество предельных точек.

Препринт Физико-технического института низких температур АН УССР, Харьков, 1984, № 6

A.E. Eremenko
M.Yu.Ljubič

ITERATES OF ENTIRE FUNCTIONS

Iteration of entire functions of a special class S is studied. The functions in S have not wandering component of the set of normality. Every orbit in the set of normality falls down into a Fatou domain or a Siegel domain. The set of such domains is finite. The I.Baker's conjecture on completely invariant domains is proved for the functions $f \in S$. We prove under some assumptions that the Lebesgue measure of the Julia set is zero. As an illustration the family $f_c(z) = \exp z + c \in S$ is considered. We give an example of the entire function $f \notin S$ with symply connected wandering domain the orbit of which has infinite set of limit points.

The preprint of the Physico-Technical Institute
of Low Temperarures,
UkrSSR Academy of Sciences,
Kharkov, 1984, N 6

В В Е Д Е Н И Е

В 1918–1920 гг. Г.Жюлиа [1] и П.Фату [2,3] исследовали глобальное асимптотическое поведение траекторий рационального отображения сферы $\overline{\mathbb{C}}$. Их описание было неполным, главным образом, ввиду возможности существования так называемых блуждающих областей. Эта трудность была преодолена в 1982 г. Д.Сулливаном [4], который доказал, что блуждающих областей нет. Для итераций целых функций ситуация сложнее: И.Бэйкер [5] привел пример целой функции с блуждающей областью. В настоящей работе установлено, что для некоторого класса целых функций сохраняются основные факты, справедливые для рациональных функций.

Для целой функции f через f^m обозначим ее m-ю итерацию. Открытое множество $R(f) \subset \mathbb{C}$, на котором семейство $\{f^m\}$ нормально, называется множеством нормальности функции f, а его дополнение $J(f) = \mathbb{C} \setminus R(f)$ – множеством Жюлиа. Итерации целых функций впервые исследовал П.Фату [6], который, в частности, показал, что $J(f)$ есть непустое совершенное вполне инвариантное множество. Множество $E \subset \mathbb{C}$ называется вполне инвариантным, если $f^{-1}E = E$. Множество Жюлиа либо нигде не плотно, либо совпадает с плоскостью $\mathbb{C}$. Первый пример целой функции f, для которой $J(f) = \mathbb{C}$, приведен в [7], а в [8] М.Мисюревичем доказана гипотеза П.Фату о том, что $J(\exp z) = \mathbb{C}$.

Исследуем итерации целых функций класса S_q, введенного А.Шпайзером (см., например, [9, 10]). Этот класс определяется так: $f \in S_q$, если найдутся q точек $a_1, \dots, a_q$ таких, что отображение $f : \mathbb{C} \setminus f^{-1}\{a_1, \dots, a_q\} \to \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_q\}$

является неразветвленным накрытием. Минимальная система точек $a_1, \dots, a_q$ с этим свойством называется множеством базисных точек функции f. Функции класса S_q играют важную роль в общей теории мероморфных функций [9, 10]. Примерами таких функций являются многочлены, $\exp z \in S_1$, $\sin z \in S_2$. Если h, p – многочлены степеней m, n, соответственно, то функция $\int^z h(\zeta) \exp p(\zeta) d\zeta \in S_{m+n}$. Обозначим через S объединение классов S_q. Множество S замкнуто относительно суперпозиции.

Компонента $\mathcal{D}$ множества нормальности $R(f)$ называется периодической периода p, если $f^p \mathcal{D} \subset \mathcal{D}$, при этом $\bigcup_{i=0}^{p-1} f^i \mathcal{D}$ называется циклом компонент. Точка $a \in \mathbb{C}$ называется периодической периода n, если $f^n a = a$, при этом $\{f^i a\}_{i=0}^{p-1}$ называется циклом (точки a). Порядок p периодической точки (или компоненты) есть наименьший из периодов; мультипликатор периодической точки a – это $(f^p)'(a) = \lambda$. Цикл называется притягивающим, если $|\lambda| < 1$, нейтральным рациональным, если λ есть корень из 1, нейтральным иррациональным, если $\lambda = \exp(2\pi i \alpha)$, α иррационально, и отталкивающим, если $|\lambda| > 1$.

Из результатов И.Бэйкера [11] следует, что периодические компоненты множества нормальности для целых функций односвязны. Из классических результатов вытекает, что периодические компоненты целых функций бывают трех типов:

a) Области Фату. Все траектории, начинающиеся в $\mathcal{D}$, сходятся к притягивающему или нейтральному рациональному циклу $\{a_k\}_{k=0}^{p-1}$. В этом случае открытое множество $\bigcup_{i=0}^{p-1} f^i \mathcal{D}$ называется областью непосредственного притяжения цикла $\{a_k\}$.

b) Области Зигеля. Отображение $f^p | \mathcal{D}$, где p – порядок цикла, аналитически сопряжено с иррациональным вращением круга.

c) Все траектории начинающиеся в $\mathcal{D}$, стремятся к ∞.

В разд. I для полноты приведены доказательства этих фактов. Первый основной результат разд.1, теорема 1, состоит в том, что для трансцендентных функций класса S случай c) невозможен. Согласно одной теореме П.Фату [3] в случае a) отображение $f | f^i \mathcal{D}$ при некотором $i \in [0, p-1]$ будет многолистным. Поэтому если $f \in S_q$, то каждый цикл областей Фату должен содержать одну из базисных точек. Таким образом, количество циклов областей Фату для функций класса S_q конечно и не превышает q. Затем показано, что число циклов Зигеля не превосходит $2q$ (теорема 2).

Компонента $\mathcal{D}$ множества нормальности называется блуждающей, если $f^m \mathcal{D} \cap f^n \mathcal{D} = \emptyset$ при всех $m > n \geq 0$. Следуя Д.Сулливану [4] покажем, что функции класса S не могут иметь блуждающих компонент (теорема 3). Таким образом, каждая компонента нормальности $\mathcal{D}$ функции $f \in S$, начиная с некоторого момента, попадает в цикл Фату или Зигеля.

В разд. II приведены некоторые приложения результатов разд.I и различные примеры. Мы показываем, что если $\mathcal{D}$ – вполне инвариантная компонента множества $R(f)$, где функция $f \in S$ трансцендентна, то $R(f) = \mathcal{D}$. Это доказывает для функций класса S одну гипотезу И.Бэйкера [11]. Затем приводится пример I инвариантной области, которую целая функция f однолистно отображает на себя. В частности, эта область типа c). Пример 2 показывает, что у целых функций бывают односвязные блуждающие компоненты $\mathcal{D}$, на которых все итерации f^m однолистны. Заметим, что в примере И.Бэйкера [5] блуждающая компонента многосвязна, и f^m многолистны на этой компоненте. В примере 3 построена целая функция, имеющая блуждающую область, орбита которой имеет бесконечно много предельных точек.

Далее в разд. II исследуется плоская мера Лебега множества $J(f)$ для функций класса S и конечного порядка роста. Показано, что если такая функция имеет хотя бы одно конечное асимптотическое значение и если орбиты базисных точек, лежащих на $J(f)$, поглощаются отталкивающими циклами, то либо $\operatorname{mes} J(f) = 0$, либо $J(f) = \mathbb{C}$. Для рациональных функций этот факт установлен в [12].

В заключение рассматривается семейство $f_c(z) = \exp z + c$. При $c > -1$ справедливо $J(f_c) = \mathbb{C}$, что обобщает упомянутый выше результат М.Мисюревича [8], а при $c \leq -1$ множество нормальности $R(f)$ связно, а мера множества Жюлиа равна нулю. Бифуркационная диаграмма этого семейства похожа на диаграмму известного квадратичного семейства $z^2 + c$ [13, 14].

Авторы глубоко признательны Г.А.Маргулису за ценные консультации и участникам семинара Ю.И.Любича за полезное обсуждение результатов.

I. ДИНАМИКА ФУНКЦИИ КЛАССА S НА МНОЖЕСТВЕ НОРМАЛЬНОСТИ

Используем некоторые результаты И.Бэйкера.

ТЕОРЕМА А [15]. Для любой целой функции f отталкивающие периодические точки плотны в множестве Жюлиа $J(f)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\mathcal{D}$ – многосвязная компонента множества нормальности $R(f)$. Тогда $f^m(z) \to \infty$ равномерно на компактах в $\mathcal{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что некоторая подпоследовательность f^{m_k} равномерно ограничена на компактах в $\mathcal{D}$. Пусть Γ – замкнутая жорданова кривая, нестягиваемая в $\mathcal{D}$. Тогда $|f^{m_k}|\Gamma| \le M$ и, следовательно, $|f^{m_k}|V| \le M$, где V – область, ограниченная кривой Γ. По теореме А внутри Γ есть отталкивающая периодическая точка b. Тогда $|(f^{m_k})'(b)| \to \infty$, и мы получаем противоречие.

Пример трансцендентной целой функции, имеющей многосвязную компоненту множества нормальности, приведен в [5].

ТЕОРЕМА В [11]. Для трансцендентной функции f всякая неограниченная компонента множества $R(f)$ односвязна.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Всякая инвариантная компонента множества $R(f)$ трансцендентной целой функции f односвязна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограниченные компоненты односвязны в силу предложения 1, неограниченные – в силу теоремы В.

Следующая теорема является аналогом теоремы Вольфа-Данжуа ([16], гл. VI, § 43), относящейся к функциям в круге.

ТЕОРЕМА С. Пусть $\mathcal{D}$ – инвариантная компонента множества нормальности $R(f)$ целой функции f. Тогда имеет место одна из следующих возможностей:

a) Все траектории в области $\mathcal{D}$ сходятся к притягивающей неподвижной точке $a \in \mathcal{D}$ или к нейтральной неподвижной точке $a \in \partial\mathcal{D}$ с мультипликатором, равным 1.

b) Существует конформное однолистное отображение φ области $\mathcal{D}$ на единичный круг U, удовлетворяющее уравнению Шрёдера $\varphi(fz) = \lambda\varphi(z)$, где $\lambda = \exp 2\pi i\alpha$ с иррациональным α.

c) Все траектории, начинающиеся в $\mathcal{D}$, сходятся к ∞.

Область $\mathcal{D}$ называется областью Фату в случае а) и областью Зигеля – в случае b).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что все предельные функции нормального семейства $\{f^m\}$ в области $\mathcal{D}$ постоянны. Соединим произвольную точку $z \in \mathcal{D}$ с точкой fz кривой $\Gamma \subset \mathcal{D}$. В силу сделанного предположения сферическая длина кривой $f^m\Gamma$ стремится к 0 при $m \to \infty$. В частности, $d(f^m z, f^{m+1} z) \to 0$, $m \to \infty$, где d – сферическое расстояние. Если $f^m z \not\to \infty$, то существует конечная предельная точка $a = \lim f^{m_k} z$ траектории точки z. Имеем

$$d(fa, a) = \lim d(f^{m_k} z, f^{m_k+1} z) = 0,$$

то есть a – неподвижная точка. Таким образом, все предельные точки траектории неподвижны. Поскольку длина $f^m\Gamma$ стремится к 0, то кривая $\gamma = \bigcup_{m=0}^{\infty} f^m\Gamma$ имеет те же предельные точки, что и траектория $\{f^m z\}$. Предельное множество любой кривой связно, а множество неподвижных точек счетно, следовательно, кривая γ имеет предел $a \in \bar{\mathcal{D}}$. В частности, $f^m z \to a$. Все остальные траектории сходятся к той же точке, поскольку предельные функции семейства $\{f^m\}$ по предположению постоянны.

Если неподвижная точка $a \in \mathcal{D}$, то из леммы Шварца следует, что a – притягивающая. Если $a \in \partial\mathcal{D}$, то легко видеть, что a – нейтральная неподвижная точка. П. Фату показал ([3], с.242-248), что в этом случае мультипликатор точки a равен 1.

Предположим теперь, что среди предельных функций семейства $\{f^m\}$ есть функция $g = \lim f^{m_k}$, которая непостоянна. Пусть $\alpha = g(a) \ne g(b) = \beta$. Через ρ обозначим гиперболическую метрику в области $\mathcal{D}$ (область $\mathcal{D}$ гиперболична, так как в ее дополнении лежит множество $J(f)$). Поскольку аналитические функции не увеличивают гиперболическое расстояние, имеем

$$\rho(\alpha, \beta) = \lim \rho(f^{m_{k+1}} a, f^{m_{k+1}} b) \le$$

$$\le \lim \rho(f^{m_k+1} a, f^{m_k+1} b) = \rho(f\alpha, f\beta).$$

Следовательно, f однолистно отображает область $\mathcal{D}$ на себя. Рассмотрим однолистное конформное отображение φ_0 области $\mathcal{D}$ на единичный круг $\mathcal{U}$. Тогда

$$\varphi_0 f \varphi_0^{-1}(z) = \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z} = h(z) \quad (|a|<1).$$

Так как среди предельных функций семейства $\{h^m\}$ есть непостоянная функция, то h имеет неподвижную точку b внутри круга $\mathcal{U}$. Пусть $\varphi_1(z)=\dfrac{z-b}{1-\bar{b}z}$. Тогда функция $\varphi=\varphi_1\circ\varphi_0$ удовлетворяет уравнению Шрёдера. Теорема доказана.

Пример инвариантной области, в которой все траектории сходятся к ∞, дает функция $f(z)=e^{-z}+z+1$. Этот пример приведен П.Фату в [6]. Пример, когда реализуется случай b), приведен К.Л.Зигелем [17].

Если $\mathcal{D}$ – периодическая компонента ($f^p\mathcal{D}=\mathcal{D}$), то в формулировку теоремы 1 должны быть внесены очевидные изменения: в случае a) все траектории сходятся к притягивающему или нейтральному рациональному циклу, а в случае b) функция φ удовлетворяет уравнению $\varphi(f^p z)=\lambda\varphi(z)$. При этом компонента $\mathcal{D}$ по-прежнему называется областью Фату в случае a) и областью Зигеля–в случае b).

Точка $z\in\mathbb{C}$ называется особой точкой функции f^{-1}, если у нее не существует такой окрестности V, что сужение f на полный прообраз $f^{-1}V$ является неразветвленным накрытием. Для функции $f\in S$ особые точки f^{-1} совпадают с определенными во Введении базисными точками.

ТЕОРЕМА $\mathcal{D}$.

a) Пусть $\{\mathcal{D}_i\}_{i=0}^{p-1}$ – цикл областей Фату. Тогда функция f многолистна в одной из областей $\mathcal{D}_i$. Область $f\mathcal{D}_i$ содержит особую точку функции f^{-1}.

b) Пусть $\{\mathcal{D}_i\}_{i=0}^{p-1}$ – цикл областей Зигеля. Тогда граница $\partial\mathcal{D}_i$ содержится в $\overline{\bigcup_c\{f^m c\}_{m=0}^{\infty}}$, где c пробегает все особые точки функции f^{-1}.

Для рациональных функций эта теорема доказана П.Фату ([3] ; с. 61–65, 70)), и доказательство без изменений переносится на случай целых функций. В разд. II приведен пример компоненты множества нормальности, которая однолистно отображается на себя и, следовательно, все орбиты в ней стремятся к ∞.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть существует кривая γ, уходящая на ∞, на которой функция f ограничена. Тогда все компоненты множества нормальности $R(f)$ односвязны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное. Тогда в некоторой компоненте $\mathcal{D}$ множества нормальности $R(f)$ найдется замкнутая жорданова кривая Γ, внутри которой есть точки множества $J(f)$. В силу предложения 1 $f^m\Gamma\to\infty$, $m\to\infty$. Покажем, что при всех достаточно больших m индекс кривой $f^m\Gamma$ относительно точки 0 отличен от нуля. Пусть это не так. Тогда для некоторой последовательности m_k функции f^{m_k} не имеют нулей внутри Γ. По принципу минимума модуля $f^{m_k}\to\infty$ внутри Γ. Но этого не может быть, так как внутри Γ есть периодические точки. Таким образом, индекс кривой $f^m\Gamma$ отличен от 0 при всех достаточно больших m. Следовательно, при всех m, начиная с некоторого, найдется точка $z_m\in f^m\Gamma\cap\gamma$. Тогда $fz_m\in f^{m+1}\Gamma\to\infty$, что противоречит ограниченности f на γ. Предложение доказано.

Далее в этом разделе рассматриваем только такие целые трансцендентные функции f, для которых множество особых точек f^{-1} ограничено. (В частности, этому условию удовлетворяют функции класса S, определенного во Введении).

Логарифмическая замена переменной в окрестности ∞. Пусть все особые точки функции f^{-1} содержатся внутри круга радиуса r с центром в нуле. Обозначим через H внешность этого круга, а через G – полный прообраз множества H. Пусть V – некоторая компонента множества G. Тогда f является накрытием $V\to H$. Нетрудно видеть, что область V односвязна и ограничена простой аналитической кривой, уходящей обоими концами на ∞. Поскольку $|fz|=r$ на этой кривой, имеем в силу предложения 3

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть f – целая трансцендентная функция и множество особых точек функции f^{-1} ограничено. Тогда все компоненты множества нормальности $R(f)$ односвязны.

Функция $\varphi=\ln f$ конформно и однолистно отображает область V на полуплоскость $P=\{z\,|\,\operatorname{Re} z>\ln r\}$. Увеличим r так, чтобы выполнялось $|f0|<r$, то есть $0\notin G$. Тогда функция $\exp$ однолистна на каждой компоненте множества $\mathcal{U}=\ln G$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\exp"'] & P \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "f"'] & H \end{tikzcd}$$

Функция F конформно и однолистно отображает каждую компоненту W множества $\mathcal{U}$ на полуплоскость P. Рассмотрим отображение $\Phi : P \longrightarrow W$, правое обратное к F. Пусть $z \in W$. Круг радиуса $\operatorname{Re} F(z) - \ln r$ с центром в точке $F(z)$ содержится в полуплоскости P. Из классической теоремы об $\frac{1}{4}$ ([16], гл. II, § 17) вытекает, что множество W содержит круг радиуса $\frac{1}{4}|\Phi'(Fz)|(\operatorname{Re} F(z) - \ln r)$. С другой стороны, поскольку $\exp$ однолистна на W, то W не содержит вертикальных отрезков длины 2π. Следовательно,

$$|F'(z)| \geqslant \frac{1}{4\pi}(\operatorname{Re} F(z) - \ln r). \qquad (1)$$

Это неравенство многократно используется в дальнейшем.

ТЕОРЕМА 1. Пусть f – целая трансцендентная функция. Предположим, что множество особых точек функции f^{-1} ограничено. Тогда если $z \in R(f)$, то орбита $\{f^m z\}$ не может стремиться к ∞.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что орбита $\{z_m\}$ некоторой точки $z \in R(f)$ стремится к ∞. Тогда существует круг B радиуса d с центром в точке z, в котором последовательность $\{f^m\}$ равномерно стремится к ∞. Следовательно, все области $B_m = f^m B$, начиная с некоторой, содержатся в G. Здесь используются обозначения, введенные при описании коммутативной диаграммы. Можно считать, что $B_m \subset G$ при всех m.

Обозначим через A какую-нибудь компоненту множества $\ln B$, $A_m = F^m A$. Тогда $\exp A_m = B_m$. Следовательно, $A_m \subset \mathcal{U}$, и $\operatorname{Re} F^m$ равномерно стремятся к $+\infty$ в A. Пусть $\zeta \in A$, $\zeta_m = F^m \zeta \in A_m$, d_m – радиус максимального круга с центром в точке ζ_m, вписанного в A_m. По теореме об $\frac{1}{4}$

выполняется $d_{m+1} \geqslant \frac{1}{4} d_m |F'(\zeta_m)|$. Поскольку $\operatorname{Re} F(\zeta_m) \to +\infty$, то в силу неравенства 1 справедливо $|F'(\zeta_m)| \to \infty$. Следовательно, $d_m \to \infty$. Но тогда некоторая область $A_m \subset \mathcal{U}$ содержит отрезок длины 2π. Противоречие доказывает теорему.

Далее нам потребуется

ЛЕММА 1. Пусть f – целая трансцендентная функция. Предположим, что некоторый круг радиуса $r > |f0|$ с центром в нуле содержит все особые точки функции f^{-1}. Пусть a – неподвижная точка функции f с мультипликатором λ. Тогда

$$|a| \leqslant r e^{4\pi|\lambda|}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся описанной выше коммутативной диаграммой. Если $|a| \leqslant r$, то доказывать нечего. В противном случае $a \in G$. Пусть $z = \ln a$. Тогда $F'(z) = \frac{f'(a)}{f(a)} a = \lambda$, и утверждение следует из неравенства (1).

Деформации, уничтожающие нейтральные циклы. Пусть f – нелинейная целая функция. Рассмотрим двухпараметрическое семейство целых функций $f_t = Wf + \varepsilon$, где $t = (w, \varepsilon) \in \{\mathbb{C} \setminus 0\} \times \mathbb{C}$. Зафиксируем точку $a \in \mathbb{C}$. С ней связана последовательность голоморфных функций $\varphi_p(t) = f_t^p a$, которая описывает зависимость траектории точки a от параметра t. При $p \geqslant 1$ функции $\varphi_p(1, \varepsilon)$, $\varphi_p(w, 0)$ непостоянны.

Пусть теперь a – периодическая точка порядка p функции f с мультипликатором λ, отличным от 1. По теореме о неявной функции уравнение $f_t^p z = z$ имеет аналитическое решение $z = a(t)$ в окрестности точки $t = (1, 0)$, причем $a(1,0) = a$. Функции $a(1, \varepsilon)$, $a(w, 0)$ непостоянны, так как в противном случае при $t = (1, \varepsilon)$ или $t = (w, 0)$ имели бы $\varphi_p(t) \equiv f_t^p a \equiv a$. Через $\lambda(t)$ обозначим мультипликатор периодической точки $a(t)$ функции f_t; $a(1,0) = \lambda$.

ЛЕММА 2. Предположим, что множество особых точек трансцендентной функции f^{-1} ограничено. Пусть $\lambda \neq 1$. Тогда мультипликатор $\lambda(t)$ есть непостоянная аналитическая функция в окрестности точки $t = (1, 0)$.

Дадим два доказательства этой леммы.

ПЕРВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $p = 1$ утверждение сразу следует из того, что $a(t) \equiv const$, $\lambda(t) = wf'(a(t)) + \varepsilon$. Пусть далее $p > 1$. Предположим, что $\lambda(t) \equiv \lambda$. Покажем, что тогда функция $a(t)$ аналитически продолжается по любому пути $\gamma \subset \{\mathbb{C} \setminus 0\} \times \mathbb{C}$. Пусть путь γ соединяет точку $(1, 0)$ с точкой $t' = (w', \varepsilon')$, где $w' \neq 0$. Достаточно показать, что если функция $a(t)$ продолжается вдоль пути $\gamma \setminus \{t'\}$, то на продолжается и через точку t'. Заметим, что особые точки функций f_t^{-p} $(t \in \gamma)$ лежат в некотором круге с центром в нуле радиуса $r > |f_t^p 0|$. По лемме 1 выполняется $|a(t)| \leqslant r \exp 4\pi |\lambda|$. Следовательно, существует последовательность t_k, стремящаяся вдоль кривой γ к t', для которой $a(t_k)$ сходится к некоторой точке $a' \neq \infty$. Тогда a' – периодическая точка функции $f_{t'}$ с тем же мультипликатором $\lambda \neq 1$. По теореме о неявной функции найдется такое $\delta > 0$, что если $|t - t'| < \delta$, $|z - a'| < \delta$, то уравнение $f_t^p z = z$ имеет единственное решение $z = g(t)$, причем функция g голоморфна. Отсюда вытекает, что $g(t_k) = a(t_k)$ и, следовательно, $g(t)$ является аналитическим продолжением функции $a(t)$ через точку a'.

Рассмотрим теперь два случая.

1. $f'(c) = 0$ для некоторого $c \in \mathbb{C}$.

Семейство $f_{1,\varepsilon} = f + \varepsilon$, $\varepsilon \in \mathbb{C}$ в этом пункте будем обозначать просто через f_ε, а периодическую точку $a(1, \varepsilon)$ – через $a(\varepsilon)$. Доказано, что $a(\varepsilon)$ – целая функция. Так как $h^{-1} f_\varepsilon h = h^{-1} f h + \varepsilon$, где $h(z) = z + c$, то без ограничения общности можно считать, что $c = 0$. Мультипликатор периодической точки $a(\varepsilon)$ тождественно равен λ:

$$\prod_{k=0}^{p-1} f'(a_k(\varepsilon)) \equiv \lambda,$$

где $\{a(\varepsilon) = a_0(\varepsilon), \ldots, a_{p-1}(\varepsilon)\}$ – цикл точки $a(\varepsilon)$. Ясно, что $\lambda \neq 0$, так как $a_k(\varepsilon) \not\equiv const$. Следовательно, $f'(a_k(\varepsilon)) \neq 0$ при всех $\varepsilon \in \mathbb{C}$. Поскольку $f'(0) = 0$, то функции $a_k(\varepsilon)$ не имеют нулей. Далее, $a_k(\varepsilon) \neq a_\ell(\varepsilon)$ при $0 \leqslant k < \ell \leqslant p-1$. В самом деле, в противном случае $a_k(\varepsilon)$ есть кратный корень уравнения $f_\varepsilon^p z = z$, значит, $\lambda = (f_\varepsilon^p)'(a_\varepsilon) = 1$. Таким образом, целая функция $a_{k+1}(\varepsilon)/a_k(\varepsilon)$ не принимает значений $0, 1$.

По теореме Пикара она постоянна, $a_{k+1}(\varepsilon)/a_k(\varepsilon) \equiv \gamma_k$, $k = 0, \ldots, p-1$. Поскольку $\prod_{0 \leqslant k \leqslant p-1} \gamma_k = 1$ и $\gamma_k \neq 1$, то не все γ_k равны между собой. Имеем далее, $\gamma_k a_k(\varepsilon) = a_{k+1}(\varepsilon) = f(a_k(\varepsilon)) + \varepsilon$, откуда $a_k'(\varepsilon)(\gamma_k - f'(a_k(\varepsilon))) = 1$. Снова применяя теорему Пикара, получаем, что $f'(\zeta) = \gamma_k$ при некоторых $\zeta \in \mathbb{C}$, $k = 0, \ldots, p-1$. Но целая функция $a_k(\varepsilon)$ обязана принимать одно из этих значений ζ. Противоречие.

2. Предположим теперь, что функция f' не имеет нулей. Тогда $f'(z) = \exp h(z)$, h – целая функция. Теперь рассмотрим однопараметрическое семейство $f_w = wf$ $(w \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$. Имеем

$$w^p \exp \sum h(a_k(w)) = \prod_{k=0}^{p-1} w f'(a_k(w)) \equiv \lambda.$$

Нам известно, что функции $a_k(w)$ голоморфны на римановой поверхности, неразветвленно накрывающей плоскость с проколом $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Если эта поверхность бесконечнолистна, то функция имеет бесконечное множество периодических точек порядка p с мультипликатором λ. Это невозможно в силу леммы 1.

Таким образом, $a_k(w) = b_k(\zeta)$, где b_k – однозначная функция в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и $w = \zeta^q$, q натуральное. Имеем $\zeta^{pq} \exp \sum h(b_k(\zeta)) \equiv \lambda$. Предположим, что функция $g = \sum h \circ b_k$ регулярна в точке $\zeta = 0$. Тогда $\zeta^{pq} \exp g(\zeta)\big|_{\zeta=0} = 0 \neq \lambda$. Если же g имеет в нуле существенную особенность или полюс, то существует последовательность $\zeta_k \to 0$, для которой $\operatorname{Re} g(\zeta_k) < 0$. Следовательно, $\zeta_k^{pq} \exp g(\zeta_k) \to 0$. Противоречие доказывает лемму.

ВТОРОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оно проще первого, но вместо теоремы Пикара используется более сильное средство – теорий Р.Неванлинны [9, 10].

Рассмотрим семейство $f_\varepsilon = f + \varepsilon$, и пусть $a(\varepsilon)$ – периодическая точка порядка p с постоянным мультипликатором $\lambda \neq 1$. Так же, как в первом доказательстве, показываем, что $a(\varepsilon)$ – целая функция. Мы придем к противоречию, показав, что

$$\lambda(\varepsilon) = \prod_{k=0}^{p-1} f'(a_k(\varepsilon)) \not\equiv const. \qquad (2)$$

Пусть $T(r,g)$ – характеристика Неванлинны функции g. Используем следующий факт, легко вытекающий из II-ой основной теоремы Неванлинны: если функция g трансцендентна, а h -произвольная целая функция, то

$$T(r,h) = o(T(r, g\circ h)),\ r \to \infty. \qquad (3)$$

Утверждение (2) будет следовать из того, что для всех $k = 0,\dots, p-2$ вне некоторого множества значений r конечной меры справедливо

$$T(r, f'\circ a_k) = o(T(r, f'\circ a_{k+1})).$$

Пользуясь элементарными свойствами характеристики, леммой о логарифмической производной и (3), получаем вне некоторого множества конечной меры :

$$T(r, f'\circ a_k) = T(r, (f\circ a_k)'/a_k') \le T(r, (f\circ a_k)') + T(r, a_k') \le$$

$$\le T(r, (f\circ a_k))(1+o(1)) = T(r, (f_\varepsilon\circ a_k))(1+o(1)) =$$

$$= T(r, a_{k+1})(1+o(1)) = o(T(r, f'\circ a_{k+1})),$$

что и требовалось.

Рассмотрим теперь целую трансцендентную функцию f класса S_q (см.Введение).

ТЕОРЕМА 2. Функция класса S_q имеет не более q притягивающих и нейтральных рациональных циклов. Число нейтральных иррациональных циклов не превосходит $2q$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как показал П.Фату ([2] , с.186-195,206-209), каждый притягивающий или нейтральный рациональный цикл обладает

областью непосредственного притяжения, которая представляет собой цикл областей Фату. В силу теоремы $\mathcal{D}$ каждый цикл областей Фату содержит базисную точку, что доказывает наше первое утверждение.

Пусть теперь имеется $2n$ нейтральных иррациональных циклов. Рассмотрим семейство f_t, определенное перед леммой 2. Очевидно, что все функции семейства принадлежат S_q. Покажем, что найдутся t, сколь угодно близкие к $(1,0)$, при которых f_t имеет не менее n притягивающих циклов. Отсюда будет следовать второе утверждение теоремы. Из леммы 2 следует, что мультипликаторы $\lambda_1(t),\dots, \lambda_n(t)$ рассматриваемых нейтральных циклов непостоянны. Поэтому достаточно доказать следующее :

ЛЕММА 3. Пусть заданы $2n+1$ функций $\lambda_1,\dots,\lambda_{2n+1}$ аналитических и непостоянных в окрестности точки 0, $|\lambda_j(0)|=1, j=1,\dots,2n+1$. Тогда найдутся сколь угодно малые t такие, что по крайней мере $n+1$ из наших функций по модулю меньше, чем 1 в точке t.

Эту лемму с аналогичной целью использовал еще П.Фату ([3], с.66-67). Приведем простое доказательство, идея которого принадлежит В.Г.Дринфельду.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функции

$$g_j(t) = \ln|\lambda_j(t)| = Re\, a_j t^{n_j} + o(|t|^{n_j}).$$

Положим $\varphi_j(t) = sgn\, Re(a_j t^{n_j})$. Очевидно, что $\int_0^{2\pi} \varphi_j(e^{i\theta})d\theta = 0$, поэтому $\int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^{2n+1} \varphi_j(e^{i\theta})\, d\theta = 0$; следовательно, существует дуга I на единичной окружности, на которой $\sum_{j=1}^{2n+1} \varphi_j(e^{i\theta}) \le 0$ и $\varphi_j(e^{i\theta}) \ne 0$ $(1 \le j \le 2n+1)$. На этой дуге по крайней мере из функций φ_j равны -1. Если θ_0 – середина дуги I, то любая точка $t^{\prime}_j = re^{i\theta_0}$ с достаточно малым $r>0$ удовлетворяет утверждению леммы.

О т с у т с т в и е   б л у ж д а ю щ и х   о б л а с т е й. Напомним, что компонента $\mathcal{D}$ множества нормальности называется блуждающей, если $f^m\mathcal{D} \cap f^n\mathcal{D} = \varnothing$ $(m > n \ge 0)$.

ТЕОРЕМА 3. Целые функции класса S не имеют блуждающих компонент.

Прежде чем доказывать теорему, напомним некоторые сведения о квазиконформных отображениях (см., например, [18]).

Пусть ρ – измеримая риманова метрика на сфере $\overline{\mathbb{C}}$. Две такие метрики называются конформно эквивалентными, $\rho_1 \sim \rho_2$, если существует измеримая положительная функция ψ такая, что $\rho_1 = \psi \rho_2$ почти всюду. Класс конформно эквивалентных метрик задается измеримой функцией $m_\rho = \exp 2\pi i \beta$ ("комплексное отклонение метрики"), где $\kappa = \frac{K-1}{K+1}$, $K(z)$ – отношение осей эллипса $\{\rho(z)=1\}$, $\beta(z)$ – направление большой оси эллипса. Для евклидовой метрики λ отклонение $m_\lambda = 0$. В пространстве классов конформно эквивалентных метрик вводится расстояние $d(\rho_1, \rho_2) = \| m_{\rho_1} - m_{\rho_2} \|_\infty$ Метрика имеет ограниченное отклонение, если $\| m_\rho \| < 1$.

Гомеоморфизм $g : \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2$ называется K – квазиконформным, если для всех $x \in \mathcal{D}_1$ выполняется

$$\overline{\lim_{r \to 0}} \frac{\sup\limits_{|y-x|=r} |f(y) - f(x)|}{\inf\limits_{|y-x|=r} |f(y) - f(x)|} \leqslant K .$$

Квазиконформные гомеоморфизмы обладают следующими свойствами:

1) Квазиконформный гомеоморфизм дифференцируем почти всюду. Поэтому для любой измеримой метрики ρ корректно определена метрика $g_* \rho$ (образ метрики ρ при гомеоморфизме g).

2) 1 – квазиконформный гомеоморфизм является конформным.

3) Для любой метрики ρ с ограниченным отклонением на сфере $\overline{\mathbb{C}}$ существует квазиконформный гомеоморфизм $g : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$, оставляющий неподвижными точки $0, 1, \infty$ и такой, что $g_* \rho \sim \lambda$, где λ – евклидова метрика. Если в пространстве гомеоморфизмов ввести равномерную метрику, то g непрерывно зависит от ρ. Гомеоморфизм g является решением уравнения Бельтрами $g_{\bar z} = - m_\rho g_z$.

Потребуется еще следующая

ЛЕММА 4. Пусть X – связное топологическое пространство, $\{\varphi_t\}_{t \in X}$ – непрерывное семейство гомеоморфизмов сферы $\overline{\mathbb{C}}$, $\varphi_t(0) = 0$, $\varphi_t(1) = 1$, $\varphi_t(\infty) = \infty$, $\varphi_s = id$ для некоторого $s \in X$. Пусть f – целая функция класса S_q, $a_1, \ldots, a_q$ суть ее базисные точки, $a_i \neq 0, 1$, $f0 = 0$, $f1 = 1$.

Предположим, что при всех $t \in X$ функции $f_t = \varphi_t f \varphi_t^{-1}$ целые, и $\varphi_t a_i = a_i$, $i = 1, \ldots, q$. Тогда $f_t = f$ при всех $t \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g = f_r$, $r \in X$. Сужение функции g на множество $\mathbb{C} \setminus g^{-1}(\{a_i\}_{i=1}^q)$ является накрытием над $\mathbb{C} \setminus (\{a_i\}_{i=1}^q)$. По теореме о накрывающей гомотопии существует семейство гомеоморфизмов $\psi_t : \mathbb{C} \setminus g^{-1}(\{a_i\}_{i=1}^q) \to \mathbb{C} \setminus f^{-1}(\{a_i\}_{i=1}^q)$ такое, что $\varphi_t g = f \psi_t$ и $\psi_r = \varphi_r$. Поскольку $\psi_t(0) \in f^{-1} 0$ и $\psi_r(0) = 0$, то $\psi_t(0) = 0$ при всех $t \in X$. Аналогично, $\psi_t(1) = 1$, $t \in X$. При $t = s$ имеем $g = f \psi_s$. Отсюда следует, что гомеоморфизм ψ_s аналитичен. По теореме Римана об устранимых особенностях ψ_s продолжается до аналитического диффеоморфизма всей плоскости. Поскольку ψ_s имеет неподвижные точки $0, 1$, справедливо $\psi_s = id$, что и требовалось.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Пусть $\mathcal{D}$ – блуждающая компонента множества нормальности. В силу предложения 4 область $\mathcal{D}$ односвязна. (Если f – многочлен, неодносвязной может быть только область притяжения бесконечности). Лишь конечное число областей $f^m \mathcal{D}$ может содержать базисные точки функции f. Поэтому можно считать, не уменьшая общности, что все итерации f^m однолистны в $\mathcal{D}$.

Рассмотрим конформное однолистное отображение F единичного круга $\mathcal{U}$ на область $\mathcal{D}$. Пусть $t \mapsto \varphi_t$ – непрерывное инъективное отображение некоторой области в $\mathbb{R}^{2q+1}$ в пространство диффеоморфизмов замкнутого круга $\overline{\mathcal{U}}$ (с $\mathbb{C}^1$ – топологией). Предположим, что это отображение обладает такими свойствами:

a) $\varphi_t | \partial \mathcal{U} \neq \varphi_s | \partial \mathcal{U}$ при $t \neq s$;

b) $\varphi_0 = id$;

c) Диффеоморфизмы φ_t оставляют неподвижными три точки окружности: $1, i, -1$.

Такое $2q+1$ – параметрическое семейство диффеоморфизмов легко построить.

Рассмотрим в области $\mathcal{D}$ семейство римановых метрик $\tilde{\rho}_t = F_*(\varphi_t)_*\lambda$. Продолжим эти метрики на орбиту области $\mathcal{D}$ с помощью формулы $\hat{\rho}_t \mid f^m\mathcal{D} = (f^m)_*\tilde{\rho}_t$. Это продолжение определено корректно, поскольку область $\mathcal{D}$ блуждающая, и f^m однолистна в $\mathcal{D}$. Далее, продолжим метрики $\hat{\rho}$ на полную орбиту

$$\bigcup_{l=0}^{\infty} f^{-l} \bigcup_{m=0}^{\infty} f^m\mathcal{D}$$

области $\mathcal{D}$. Если $(f^l)'(z) \neq 0$ и $f^l z \in f^m\mathcal{D}$, то в окрестности точки z полагаем $\rho_t = f_*^{-l}\hat{\rho}_t$. Наконец, вне полной орбиты области $\mathcal{D}$ доопределим метрику как евклидову.

Построенное семейство измеримых римановых метрик имеет ограниченное отклонение $(\| m_{\rho_t}\|_\infty = \| m_{\varphi_{t*}\lambda}\|_\infty < 1)$. Следовательно, существует семейство квазиконформных гомеоморфизмов g_t сферы, оставляющих неподвижными точки $0, 1, \infty$, причем $(g_t)_*\rho_t \sim \lambda$. Рассмотрим теперь семейство

$$f_t = g_t f g_t^{-1}$$

непрерывных преобразований плоскости $\mathbb{C}$. Пусть $f'(z) \neq 0$. Тогда в силу определения метрик ρ_t в окрестности точки z выполняется $f_*\rho_t = \rho_t \circ f$. Следовательно, $f_{t*}\lambda \sim \lambda$ в окрестности точки $g_t z$, то есть преобразования f_t конформны вне конечного или счетного множества изолированных точек. По теореме о стирании особенностей f_t – целые функции.

Пусть a_i $(1 \leqslant i \leqslant q)$ суть базисные точки функции f. Без ограничения общности можно считать, что $a_i \neq 0, 1$, $f0 = 0$, $f1 = 1$. Функции f и f_t топологически сопряжены, следовательно, $f_t \in S_q$. Через $a_i(t)$ обозначим базисные точки функции f_t. Тогда $a_i(t) = g_t a_i$ непрерывно зависят от t, и кроме того, $f_t 0 = 0$, $f_t 1 = 1$. Получается непрерывное отображение области в $\mathbb{R}^{2q+1}$ в пространство $\mathbb{C}^q$, $t \mapsto (a_1(t), \dots, a_q(t))$.

По известной топологической теореме ([19], гл. УI, § 4) найдется бесконечное связное множество $X \subset \mathbb{R}^{2q+1}$ такое, что функции $a_i(t)$ постоянны на X. По лемме 4 имеем $f_t = f_s$ при любых $s, t \in X$. Следовательно, гомеоморфизмы $h_t = g_s^{-1} g_t : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (s фиксировано) коммутируют с целой функцией f. Заметим также, что $h_s = id$.

ЛЕММА 5. Пусть Z есть пространство гомеоморфизмов множества Жюлиа $\mathcal{J}(f)$, коммутирующих с f. Тогда пространство Z вполне несвязно (в топологии равномерной сходимости на компактах).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим множество P_m периодических точек функции f с периодом m, содержащихся в множестве $\mathcal{J}(f)$. Это множество состоит из изолированных точек, следовательно, для любого $a \in P_m$ множество $P_m \setminus \{a\}$ замкнуто. Если $h \in Z$, то P_m инвариантно относительно h. Пусть $h_1, h_2 \in Z$, $h_1 \neq h_2$. По теореме А $\bigcup_{1 \leqslant m < \infty} P_m$ плотно в $\mathcal{J}(f)$. Следовательно, найдутся такие m и $a \in P_m$, что $h_1(a) \neq h_2(a)$. Положим

$$Z_1 = \{ h \in Z \mid h(a) = h_1(a) \},$$

$$Z_2 = \{ h \in Z \mid h(a) \neq h_1(a) \}.$$

Очевидно, что $Z_1 \cup Z_2 = Z$, $Z_1 \cap Z_2 = \varnothing$, множество Z_1 замкнуто. Множество Z_2 также замкнуто, так как $P_m \setminus \{h_1(a)\}$ замкнуто. Наконец, $h_i \in Z_i$, и лемма доказана.

Таким образом, имеем непрерывное отображение $t \mapsto h_t \mid \mathcal{J}(f)$ континуума X во вполне несвязное множество Z. Это отображение с необходимостью постоянно и, следовательно, $h_t \mid \mathcal{J}(f) = h_s \mid \mathcal{J}(f) = id$.

Покажем, что область $\mathcal{D}$ инвариантна относительно h_t. Пусть $z \in \mathcal{D}$. Поскольку h_t коммутирует с f, то $h_t z \in R(f)$. Далее, отображение $X \to R(f)$, $z \mapsto h_t z$ непрерывно. Следовательно, его образ связен. Поскольку $h_s z = z \in \mathcal{D}$, то $h_t z \in \mathcal{D}$.

Напомним, что F есть конформное однолистное отображение круга $\mathcal{U}$ на область $\mathcal{D}$. Рассмотрим гомеоморфизм $H_t = F^{-1} h_t F$ круга $\mathcal{U}$ на себя. Будучи квазиконформным, H_t продолжается до гомеоморфизма замкнутого круга ([18], гл. Ш, С). Пусть Y множество таких точек на окружности $\partial\mathcal{U}$, в которых существуют угловые пределы функции F. По теореме П. Фату ([9], гл.УП, § 3; [16], гл. Ш, § 23) множество Y имеет полную меру на $\partial\mathcal{U}$. Если $z \in Y$, то через $F(z)$ обозначим соответствующий угловой предел. Если кривая $\gamma \subset \mathcal{U}$ заканчивается в некоторой точке $z_0 \in \partial\mathcal{U}$ и существует предел $b = \lim_{\gamma} F(z)$, то $z_0 \in Y$ и $b = F(z_0)$

(Теорема Линделёфа, [9], гл. IУ, § 2).

Покажем, что $H_t|\partial\mathcal{U} = id$. Пусть кривая $\gamma\subset\mathcal{U}$ заканчивается в точке $z_o\in Y$. Тогда кривая $H_t(\gamma)$ заканчивается в точке $H_t(z_o)\in\partial\mathcal{U}$, так как H_t непрерывны в $\overline{\mathcal{U}}$. Пусть $W = \lim\limits_{\gamma} F(z) = F(z_o)$. Тогда при $z\to z_o$ по кривой γ имеем :

$$F(H_t z) = h_t(Fz) \longrightarrow h_t(W) = W.$$

(Выше показано, что $h_t|\partial\mathcal{D} = id$). Таким образом, $F(z_o) = F(H_t z_o)$ при любом t. Но множество $\{H_t z_o \mid t\in X\}$ связно. Из теоремы единственности следует, что $H_t z_o = z_o$ $(t\in X,\ z_o\in Y)$. Поскольку Y плотно в $\partial\mathcal{U}$, выполняется $H_t = id$ на $\partial\mathcal{U}$.

Заметим наконец, что преобразование $\varphi_s^{-1}H_t\varphi_t$ конформно в $\mathcal{U}$. Но преобразование

$$\varphi_s^{-1}H_t\varphi_t|\partial\mathcal{U} = \varphi_s^{-1}\varphi_t|\partial\mathcal{U}$$

оставляет неподвижными точки $-1, i, 1$ и не тождественно, что противоречит конформности. Теорема доказана.

Мы говорим, что орбита $\{f^m z\}_{m=0}^{\infty}$ поглощается инвариантным множеством Y, если $f^m z\in Y$ при некотором m.

ТЕОРЕМА 4. Пусть f – целая функция класса S. Тогда на множестве нормальности $R(f)$ все траектории поглощаются одним из конечного числа циклов областей Фату или Зигеля.

Эта теорема непосредственно вытекает из теоремы С и теоремы 1-3. Она дает полное описание асимптотического поведения траекторий на множестве нормальности.

II. ПРИМЕРЫ И ПРИЛОЖЕНИЯ

О в п о л н е и н в а р и а н т н ы х к о м п о н е н т а х. И.Бэйкер в работе [11] высказал следующую гипотезу. Пусть f – целая трансцендентная функция, имеющая вполне инвариантную компоненту $\mathcal{D}$ множества нормальности $R(f)$. Тогда $\mathcal{D} = R(f)$.

Для полиномов это утверждение неверно, так как область притяжения точки ∞ для любого полинома вполне инвариантна. Докажем гипотезу И.Бэйкера для функций класса S.

ЛЕММА 6. Пусть функция $f\in S$ трансцендентна, $\mathcal{D}$ - вполне инвариантная компонента множества нормальности $R(f)$. Тогда все базисные точки функции f лежат в $\mathcal{D}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что базисная точка $a\notin\mathcal{D}$. Рассмотрим окружность C_ε радиуса $\varepsilon>0$ с центром в точке a. Пусть $l_\varepsilon = [d_\varepsilon, d]$ - прямолинейный отрезок, $d_\varepsilon\in C_\varepsilon$, $d\in\mathcal{D}$. Положим $\gamma_\varepsilon = C_\varepsilon\cup l_\varepsilon$. Поскольку a – базисная точка, одна из компонент прообраза $f^{-1}\gamma_\varepsilon$ будет простой незамкнутой кривой Γ_ε с концами c_1, c_2, $f(c_1) = f(c_2) = d$. Из полной инвариантности $\mathcal{D}$ следует, что $c_1, c_2\in\mathcal{D}$. Соединим c_1 и c_2 простой кривой $\Gamma'\subset\mathcal{D}$. Через S_ε обозначим компоненту $f^{-1}C_\varepsilon$, содержащуюся в Γ_ε. Если $\varepsilon\to 0$, то множество S_ε равномерно стремится к некоторой точке $b\notin\mathcal{D}$ или к ∞. Уменьшая ε и оставляя Γ' неизменной, добьемся того, чтобы выполнялось $S_\varepsilon\cap\Gamma' = \phi$. Пусть теперь Γ_ε^* – компонента множества $\Gamma_\varepsilon\setminus\Gamma'$, содержащая S_ε. Очевидно, что Γ_ε^* – простая кривая с концами, лежащими на Γ'. Соединяя эти концы дугой кривой Γ', получим замкнутую жорданову кривую Δ, ограничивающую область A.

Множество $f\Delta$ состоит из окружности C_ε, некоторого отрезка $[d_\varepsilon, d_1]$ и кривой $\gamma\subset\mathcal{D}$, содержащейся в $f\Gamma'$. Уменьшая, если нужно, ε, добьемся того, чтобы круг $C_{2\varepsilon}$ не пересекался с γ (это уменьшение не отражается на кривой γ). Поскольку $\mathcal{D}$ односвязна (предложение 2) и точка a лежит вне $f\Delta$, индекс кривой $f\Delta$ относительно любой точки из $T = C_{2\varepsilon}\setminus(C_\varepsilon\cup[d_\varepsilon, d_1])$ равен нулю. Но $\overline{fA}\supset\supset[d_\varepsilon, d_1]$. Так как fA – открытое множество, то оно содержит некоторую точку из T. Противоречие.

ТЕОРЕМА 5. Пусть функция $f\in S$ трансцендентна, $\mathcal{D}$ -вполне инвариантная компонента множества нормальности $R(f)$. Тогда $\mathcal{D} = R(f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если множество нормальности шире $\mathcal{D}$, то оно содержит периодическую компоненту $V\neq\mathcal{D}$, $f^pV\subset V$ (теорема 3). Эта компонента не может быть областью Фату в силу теоремы $\mathcal{D}$ и леммы 6. Следовательно, V – область Зигеля (теорема 4). В таком случае по теореме $\mathcal{D}$ выполняется

$$\partial V\subset X = \overline{\bigcup_i\{f^m a_i\}_{m=0}^{\infty}},$$

где a_i – базисные точки. С другой стороны, из леммы 6 и теоремы С вытекает, что множество X состоит не более, чем из одной точки. Противоречие.

Примеры. Наши примеры опираются на следующую аппроксимационную теорему, которая является простой модификацией теоремы М.В.Келдыша (см.,например, [20]). Назовем замкнутое связное множество $G \subset \mathbb{C}$ карлемановским, если любую точку $z \notin G$ можно соединить с ∞ кривой, целиком лежащей вне круга радиуса $r(|z|)$ с центром в 0, причем $r(|z|) \to \infty$ при $z \to \infty$.

ТЕОРЕМА Е. Пусть $\{G_k\}$– конечная или счетная система карлемановских множеств, $G_j \cap G_k = \emptyset$, $k \neq j$. Если эта система бесконечна, предположим дополнительно, что $\min\{|z| \,|\, z \in G_k\} \to \infty$. Пусть на $G = \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k$ задана голоморфная функция φ. Тогда для любой последовательности $\psi_k > 0$ существует целая функция f такая, что

$$|f(z) - \varphi(z)| < \psi_k, \quad z \in G_k.$$

ПРИМЕР 1. Инвариантная область $\mathcal{D}$, которая однолистно отображается на себя.

Рассмотрим полуплоскости $P_1 = \{z \,|\, Re\, z > -4\}$ и $P_2 = \{z \,|\, Re\, z < -5\}$. В полуплоскости P_1 зададим функцию $f_1(z) = 2z$, а в P_2 $f_2(z) = \exp z - 6$. По теореме Е существует целая функция f, для которой $|f(z) - f_i(z)| < \frac{1}{2}$, $z \in P_i$. Отсюда следует, что $Re\, f(z) > Re\, z + \frac{1}{2}$, $z \in P_1$ и $\sup\{|f(z) + 6| : z \in P_2\} < 1$. Следовательно, в полуплоскости $\mathcal{D}_0 = \{z \,|\, Re\, z > 1\}$ все траектории равномерно стремятся к ∞, а в полуплоскости P_2 – к притягивающей неподвижной точке. Таким образом, $\mathcal{D}_0$ и P_2 лежат в различных компонентах множества нормальности.

Пусть $\mathcal{D}$ – компонента множества нормальности, содержащая $\mathcal{D}_0$. Рассмотрим прямую $L = \{z \,|\, Re\, z = -3\} \subset P_1$. Тогда $fL \subset P_2$. Следовательно, $\mathcal{D}$ содержится в полуплоскости $Q = \{z \,|\, Re\, z > -3\}$.

Пусть $f(z) = 2z + g(z)$, $z \in Q$. Тогда $|g(z)| < \frac{1}{2}$ в круге радиуса 1 с центром в точке z; следовательно, $|g'(z)| < \frac{1}{2}$. Докажем однолистность функции f в Q. Пусть $f(z_1) = f(z_2)$, $z_2, z_1 \in Q$. Тогда $2|z_1 - z_2| = |g(z_1) - g(z_2)| \le \frac{1}{2}|z_1 - z_2|$, откуда следует, что $z_1 = z_2$. Таким образом, f однолистна в полуплоскости Q и тем более в компоненте $\mathcal{D}$.

ПРИМЕР 2. Целая функция f, имеющая односвязную блуждающую область $\mathcal{D}$. Функция f однолистна на всех $f^m \mathcal{D}$, $m = 0, 1, \ldots$.

Рассмотрим следующие вертикальные полосы, симметричные относительно прямых $\{z \,|\, Re\, z = 3m\}$, $m = 10, 11, \ldots$

$$\Pi_m = \{z \,|\, |Re\, z - 3m| < 1\},$$

$$\Pi'_m = \{z \,|\, |Re\, z - 3m| < 1 - 2^{-m-1}\} \subset \Pi_m,$$

$$\Pi''_m = \{z \,|\, |Re\, z - 3m| < 1 + 2^{-m}\} \supset \Pi_m.$$

Пусть $\varphi_m : \Pi'_m \to \Pi''_m$ – линейное взаимно однозначное отображение. Очевидно, что

$$|Re[\varphi_m(z) - 3(m+1)] - Re(z - 3m)| < 2^{-m}, \quad z \in \Pi'_m. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь полосу

$$\Pi^* = \{z \,|\, |Re\, z - 30| < \tfrac{1}{2}\}.$$

Из (4) следует, что

$$\varphi_m \circ \ldots \circ \varphi_{10}\, \Pi^* \subset \Pi'_m, \quad m = 10, 11, \ldots.$$

Воспользовавшись теоремой Е построим целую функцию f со свойствами

$$|f(z) - \varphi_m(z)| < 2^{-m-2}, \quad z \in \Pi'_m,$$

$$|f(z)| < 1, \quad z \in \partial \Pi_m, \quad m = 10, 11, \ldots, \tag{5}$$

$$|f(z)| < 1, \quad z \in \mathcal{U} = \{|z| < 1\}.$$

Единичный круг инвариантен относительно f. Далее, легко проверяется, что $f^m \Pi^* \subset \Pi'_{m+10}$. Следовательно, Π^* содержится в множестве $R(f)$. Пусть $\mathcal{D}$ – компонента множества $R(f)$, содержащая Π^*. Тогда $f^m z \to \infty$ в $\mathcal{D}$. Если $z \in \partial \Pi'_m$, то из (5) следует, что $f^k z \in \mathcal{U}$, $k = 2,3,\ldots$. Таким образом, $f^m \mathcal{D} \subset \Pi'_{m+10}$, и, следовательно, $\mathcal{D}$ – блуждающая компонента. Рассмотрим теперь полосы

$$L_m = \{z \,|\, |\operatorname{Re} z - a_m| < 1 - 2^{-m}\}.$$

Легко видеть, что $f L_m \supset \Pi'_{m+1}$, поэтому $f^m \mathcal{D} \subset L_{m+10}$. Так же, как и в примере 1, доказывается, что функция f однолистна на L_{m+10} и тем более на $f^m \mathcal{D}$.

ПРИМЕР 3. Блуждающая область, орбита которой имеет бесконечное множество предельных точек.

Для построения этого примера понадобится одновременная аппроксимация и интерполяция целой функцией. Авторы благодарны Ю.И.Любичу, который указал на следующий геометрический факт, упростивший первоначальное доказательство.

ЛЕММА 7. Пусть A – локально выпуклое линейное топологическое пространство, V – выпуклая область в A, W – выпуклое плотное подмножество в V, $\varphi \in V$, S – аффинное подпространство конечной коразмерности, содержащее φ. Тогда $S \cap W$ плотно в S.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по коразмерности сводит дело к случаю, когда S – аффинное подпространство вещественной коразмерности 1. Тогда S задается уравнением $F(g) = b$, где F – непрерывный линейный функционал на A, $F(\varphi) = b$. Пусть B – выпуклая окрестность точки φ. Поскольку W плотно в V, то найдутся $f_1, f_2 \in W \cap B$ такие, что $F(f_1) > b$, $F(f_2) < b$. Положим $f = t f_1 + (1-t) f_2$, где $t = \dfrac{b - F(f_2)}{F(f_1) - F(f_2)}$.

Тогда $f \in W \cap B$ и $F(f) = b$.

ЛЕММА 8. Пусть $\{G_k\}_{k=1}^{\infty}$ – уходящая на бесконечность последовательность компактов, не разбивающих плоскость, $G_k \cap G_i = \phi$, $k \neq i$, $z_k \in G_k$. Пусть функция φ аналитична на множестве $\bigcup_{1 \le k < \infty} G_k$. Тогда для любой последовательности $\psi_k > 0$ существует такая целая функция f, что

$$|f(z) - \varphi(z)| < \psi_k, \quad z \in G_k$$

$$f(z_k) = \varphi(z_k), \quad f'(z_k) = \varphi'(z_k), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{U}$ – такая односвязная окрестность множества G_1, что $\mathcal{U} \cap G_k = \phi$, $k > 1$ и φ аналитична в $\mathcal{U}$. Рассмотрим пространство A функций, аналитических в $\mathcal{U}$ (в топологии равномерной сходимости на компактах). В этом пространстве рассмотрим выпуклую область

$$V = \{g \,|\, |g(z) - \varphi(z)| < \tfrac{1}{2} \psi_1, \quad z \in G_1\}.$$

Пусть W подмножество в V, состоящее из многочленов. По теореме Рунге W плотно в V. Очевидно, что множество W выпуклое. Рассмотрим теперь аффинное подпространство

$$S = \{g \in A \,|\, g(z_1) = \varphi(z_1), \; g'(z_1) = \varphi'(z_1)\}.$$

По лемме 7 существует $g \in W \cap S$, то есть существует многочлен f_1 со свойствами

$$|f_1(z) - \varphi(z)| < \tfrac{1}{2} \psi_1, \quad z \in G_1,$$

$$f_1(z_1) = \varphi(z_1), \quad f_1'(z_1) = \varphi'(z_1).$$

Аналогично найдем последовательно многочлены f_m, для которых

$$\Big|\varphi(z) - \sum_{k=1}^{m} f_k(z)\Big| < \tfrac{1}{2} \psi_m, \quad z \in G_m, \tag{6}$$

$$|f_m(z)| \le \frac{1}{2^{m-k-1}} \psi_k, \quad z \in G_k, \; k < m, \tag{7}$$

$$|f_m(z)| < \frac{1}{2^m}, \quad |z| < \frac{1}{2} \min_{\zeta \in G_m} |\zeta|, \tag{8}$$

$$\sum_{k=1}^{m} f_k(z_i) = \varphi(z_i), \quad \sum_{k=1}^{m} f_k'(z_i) = \varphi'(z_i), \quad i = 1, \dots, m. \tag{9}$$

В силу (8) функция $f = \sum_{m=1}^{\infty} f_m$ – целая. Из (6), (7) следует, что $|f(z) - \varphi(z)| < \psi_k$, $z \in G_k$. Из (9) вытекает, что $f(z_k) = \varphi(z_k), f'(z_k) = \varphi'(z_k)$. Лемма доказана.

Из леммы Шварца вытекает

ЛЕММА 9. Пусть $f(z) = z + g(z)$ – голоморфная функция в круге радиуса R, $g(0) = g'(0) = 0, |g(z)| < \varepsilon R$. Тогда

$$|z|\left(1 - \frac{\varepsilon}{R}|z|\right) \leqslant |F(z)| \leqslant |z|\left(1 + \frac{\varepsilon}{R}|z|\right),$$

$$|\arg F(z) - \arg z| \leqslant 2\frac{\varepsilon}{R}|z|$$

при $\varepsilon < \frac{1}{2}$, $|z| < R$.

ЛЕММА 10. Пусть $q > 1$. Существует такое число $s(q)$, что если

$$r_0 \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_k < s(q), \quad r_0 > 0, \quad \varepsilon_k > 0$$

и

$$r_k(1 - \varepsilon_k r_k) \leqslant r_{k+1} \leqslant r_k(1 + \varepsilon_k r_k), \quad k = 0, \dots, m-1,$$

то

$$\frac{1}{q} r_0 \leqslant r_k \leqslant q r_0, \quad k = 0, \dots, m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $r_0 \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_k < \frac{1}{q} \ln q$.

Предположим по индукции, что $r_i \leqslant q r_0$, $i = 0, \dots, k-1$.

Тогда

$$r_k \leqslant r_0 \prod_{i=0}^{k-1} (1 + \varepsilon_i r_i) \leqslant$$

$$\leqslant r_0 \exp \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon_i r_i \leqslant r_0 \exp\left[q r_0 \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon_i\right].$$

Последнее выражение не превосходит $q r_0$, поскольку

$$r_0 \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon_i < \frac{1}{q} \ln q.$$

Найдем такое γ, что $1 - x \geqslant \exp(-\gamma x)$ при $0 < x < \frac{1}{2}$.

Пусть $r_0 \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon_k \leqslant \min\left\{\frac{1}{q}\ln q, \frac{1}{2q}, \frac{q \ln q}{\gamma}\right\}$.

Как мы показали, справедливо $\varepsilon_k r_k \leqslant q \varepsilon_k r_0 < \frac{1}{2}$, $k = 0, \dots, m-1$.

Предположим по индукции, что $r_i > \frac{1}{q} r_0$, $i = 0, \dots, k-1$.

Имеем

$$r_k \geqslant r_0 \prod_{i=0}^{k-1} (1 - \varepsilon_i r_i) \geqslant r_0 \exp\left\{-\gamma \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon_i r_i\right\} \geqslant$$

$$\geqslant r_0 \exp\left\{-\frac{1}{q} \gamma r_0 \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon_i\right\}.$$

Последнее выражение не меньше, чем $\frac{1}{q} r_0$, поскольку $r_0 \sum_{i=0}^{k-1} \varepsilon_i \leqslant \frac{q \ln q}{\gamma}$. Лемма доказана.

Перейдем к построению примера 3.

Зафиксируем $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$, $1 < q < \sqrt[3]{2}$. Рассмотрим последовательность $R_m \searrow 0$, такую, что

1) $R_m < \frac{1}{2} R_{m-1}$, $m = 1, 2, \dots$;

2) $\varepsilon \sum_{k=0}^{m-1} \frac{R_m}{R_k} < \min\left\{s(q), \frac{\pi}{8}\right\}$, $m = 1, 2, \dots$,

где $s(q)$ определено, как в лемме 10. Зададим также последовательность $\{a_m\}_{m=0}^{\infty}$ такую, что $a_0 = 0$, $|a_{m+1} - a_m| > 2R_0$.

Пусть B_m – круг с центром в точке a_m радиуса $\frac{1}{2} R_m$

$$\mathcal{D}_m = \{ q^{-2} R_m < |z| < q^{-1} R_m , |\arg z| < \frac{\pi}{4} \},$$

$$Q_m = \{ q^{-3} R_m < |z - a_{m+1}| < R_m , |\arg z| < \frac{\pi}{2} .$$

Определим функцию φ в $\bigcup_{m=0}^{\infty} (B_m \cup Q_m)$ следующим образом :

$$\varphi(z) = z + a_{m+1} - a_m \qquad z \in B_m ,$$

$$\varphi(z) \equiv q^{-\frac{3}{2}} R_{m+1} \qquad z \in Q_m .$$

Согласно лемме 8 существует целая функция f , для которой

$$f(a_m) = a_{m+1} \quad , \quad f'(a_m) = 1 ,$$

$$|f(z) - \varphi(z)| < \frac{1}{2} \varepsilon R_m , \quad z \in B_m ,$$

$$f Q_m \subset \mathcal{D}_{m+1} .$$

Покажем, что сектор $\mathcal{D}_o$ блуждает. Пусть $|z| < \frac{1}{q} R_m$. Положим $z_\kappa = |f^\kappa z - a_\kappa|$. Предположим по индукции, что

$$q^{-1} z_o \leqslant z_i \leqslant q z_o , \quad i = 0, \dots, \kappa-1 < m .$$

Поскольку $q z_o < R_m < \frac{1}{2} R_i$, то $f^i z \in B_i$, $i = 0, \dots, \kappa-1$.

По лемме 9 выполняется $z_i (1 - \varepsilon \frac{z_i}{R_i}) \leqslant z_{i+1} \leqslant z_i (1 + \varepsilon \frac{z_i}{R_i})$, $i = 0, 1, \dots, \kappa-1$.

Поскольку $z_o \sum_{i=0}^{m-1} \frac{\varepsilon}{R_i} \leqslant \varepsilon \sum_{i=0}^{m-1} \frac{R_m}{R_i} < s(q)$, то по лемме 10

$$q^{-1} z_o \leqslant z_\kappa \leqslant q z_o .$$

Таким образом, последнее неравенство выполняется при всех $\kappa = 0, 1, \dots, m$, и, следовательно, $f^\kappa z \in B_\kappa$, $\kappa = 0, \dots, m-1$. Снова применяя лемму 10, получаем

$$|\arg(f^{\kappa+1} z - a_{\kappa+1}) - \arg(f^\kappa z - a_\kappa)| \leqslant 2\varepsilon \frac{z_\kappa}{R_\kappa} \leqslant 2\varepsilon \frac{R_m}{R_\kappa}, \ \kappa = 0, \dots, m-1.$$

Следовательно,

$$|\arg(f^m z - a_m) - \arg z| \leqslant 2\varepsilon \sum_{\kappa=0}^{m-1} \frac{R_m}{R_\kappa} < \frac{\pi}{4} .$$

Нами показано, что $f^{m+1} \mathcal{D}_m \subset Q_m$, $m = 0, 1, \dots$.

Поскольку $f Q_m \subset \mathcal{D}_{m+1}$, то точка $a_o = 0$ является предельной точкой орбиты $\{ f^m \mathcal{D}_o \}_{m=0}^{\infty}$. Следовательно, вся последовательность $\{ a_m = f^m 0 \}$ содержится в предельном множестве этой орбиты. Но $\mathcal{D}_o$ содержится в множестве нормальности $R(f)$, так как вся орбита области $\mathcal{D}_o$ содержится в $\bigcup_{m=0}^{\infty} \{ z \| z - a_m | < R_o \}$. Если бы $f^m \mathcal{D}_o$, начиная с некоторого момента попадала в цикл областей, то орбита $\{ f^m \mathcal{D}_o \}$ имела бы конечное множество предельных точек. Следовательно, компонента $\mathcal{D}$ множества $R(f)$, содержащая сектор $\mathcal{D}_o$, блуждает.

О мере множества Жюлиа. В этом разделе рассмотрим функции f конечного порядка. Это означает, что функция $M(r, f) = \max_{|z|=r} |f(z)|$ имеет ограниченный рост в следующем смысле

$$\ln \ln M(r, f) = O(\ln r) , \quad r \to \infty .$$

Все примеры функций класса S , приведенные во Введении, суть функции конечного порядка.

Пусть a – одна из базисных точек функции f класса S . Предположим, что f^{-1} имеет над a хотя бы одну "логарифмическую точку ветвления". Это означает, что хотя бы одна компонента множества $\{ z \| f z - a | < \varepsilon \}$ неограничена при любом $\varepsilon > 0$. Например, если p – многочлен, то функция $p(\exp z)$ есть функция конечного порядка класса S и над базисной точкой $p(0)$ имеется логарифмическая точка ветвления.

Будем считать, что круг $\{ z \| z - a | < \varepsilon \}$ не содержит базисных точек, отличных от a и точки $f(0)$. Тогда неограниченная компонента W множества $\{ z \| f z - a | < \varepsilon \}$ является односвязной областью, не содержащей нуля. Обозначим через L множество $\ln W$, $L = \bigcup_{\kappa=-\infty}^{\infty} (L_o + 2\pi i \kappa)$, где L_o – некоторая компонента множества L . Поскольку W – односвязная неограниченная область, не содержащая нуля, то L_o – полосообразная область, неограниченная справа и не содержащая вертикальных отрезков длины 2π. Обозначим через $\theta(x)$ длину пересечения L_o с вертикальной прямой $\{z \mid Re\, z = x\}$. Через $B(z, R)$ далее обозначается круг радиуса R с центром в точке z, mes-мера Лебега в плоскости.

ЛЕММА 11. Существуют такие $\kappa < 1$, $\alpha > 0$, $A_o > 0$, что если $R = Re\, z > A_o$, то

$$\frac{mes\,(B(z, \kappa R) \cap L)}{mes\, B(z, \kappa R)} \geqslant \alpha.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме Л.Альфорса ([9] , гл.XI, § 4) для функции f конечного порядка найдутся такие M и $t_o \geqslant 0$, что выполняется оценка

$$\int_{t_o}^{t} \frac{dx}{\theta(x)} \leqslant M t, \quad t_o < t < \infty .$$

В силу неравенства Буняковского – Шварца имеем

$$\int_{t_o}^{t} \frac{dx}{\theta(x)} \int_{t_o}^{t} \theta(x)\, dx \geqslant (t - t_o)^2 .$$

Следовательно, $\int_{t_o}^{t} \theta(x)\, dx \geqslant M^{-1} t$. Так как $\theta(x) \leqslant 2\pi$, то при κ настолько малом, что $2\pi\kappa < M^{-1}$, получаем

$$\int_{t_o}^{t} \theta(x)\, dx \geqslant M^{-1} t - 2\pi\kappa t \geqslant \eta t .$$

Отсюда следует утверждение леммы.

Далее многократно используем теорему искажения П.Кёбе (см.,например, [16] , гл.II,§18), которую для удобства сформулируем.

ТЕОРЕМА К. Пусть g – голоморфная однолистная функция в круге $B(z, R)$, $\kappa < 1$. Тогда

a) При $|\zeta - z| = \kappa R$ выполняется

$$|g'(z)| \frac{\kappa}{(1+\kappa)^2} \leqslant |g(\zeta) - g(z)| \leqslant |g'(z)| \frac{\kappa}{(1-\kappa)^2} .$$

b) Если $|\zeta_1|, |\zeta_2| < \kappa R$, то

$$\left| \frac{g'(\zeta_1)}{g'(\zeta_2)} \right| \leqslant T(\kappa).$$

ЛЕММА 12. (ср.с теоремой 1). Пусть $f \in S$ – функция конечного порядка, причем обратная функция имеет хотя бы одну логарифмическую точку ветвления. Тогда существует такое M, что для почти всех $z \in \mathbb{C}$ выполняется

$$\varlimsup_{m \to \infty} |f^m z| \leqslant M .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем обозначения, введенные в разделе "Логарифмическая замена переменной в окрестности ∞"(с.9), где построена коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccl} \mathcal{U} & \xrightarrow{F} & P & = & \{z \mid Re\,\zeta > 0\} \\ {\scriptstyle exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle exp} & & \\ G & \xrightarrow[f]{} & H & = & \{z \mid |z| > 1\} \end{array}$$

Для простоты считаем, что f является неразветвленным накрытием над $\{z \mid |z| > 1\}$, это не уменьшает общности.

Выберем число A с соблюдением следующих условий :

1) $exp A > |a| + 1$, где a – проекция некоторой логарифмической точки ветвления функции f^{-1};

2) $A > A_o$, где A_o определено в лемме 11 ;

3) Пусть κ определено в лемме 11. Потребуем, чтобы

$$A > 2\pi \left(\frac{1+\kappa}{1-\kappa} \right)^2 = 2d ;$$

4) Зафиксируем $s > 1$. Пусть $|F'(\zeta)| > 4s$ при $Re\, F(\zeta) > A$.

Выполнения этого условия можно добиться за счет оценки (1) из разд. I.

Рассмотрим множество $Y = \{\zeta \mid Re\, F^m \zeta > A,\ m = 0, 1, \ldots\}$.

Мы хотим показать, что $mes\, Y = 0$. Для этого в силу теоремы Лебега достаточно установить, что плотность множества Y в любой точке $\zeta \in Y$ меньше, чем 1.

Пусть $\zeta \in Y$, $\zeta_\kappa = F^\kappa \zeta$, и пусть $F^{-1} : P \to \mathcal{U}$ – ветвь обратной функции, для которой $F^{-1} \zeta_m = \zeta_{m-1}$. Образ функции F^{-1} не содержит вертикальных отрезков длины 2π. Из теоремы K, а) вытекает, что

$$F^{-1} B(\zeta_m, \kappa R_m) \subset B(\zeta_{m-1}, d), \qquad (10)$$

где $R_m = Re\, \zeta_m$, $d = \pi\left(\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\right)^2$.

Пусть теперь F^{-1} – ветвь обратной функции, для которой $F^{-1}\zeta_\ell = \zeta_{\ell-1}$, $\ell \in [1, m-1]$. В силу условий, наложенных на константу A, функция F^{-1} определена в круге $B(\zeta_\ell, 2d)$, и при этом выполняется $|(F^{-1})'(\zeta_\ell)| \leq \frac{1}{4s}$. Отсюда по теореме K, а) следует, что

$$F^{-1} B(\zeta_\ell, d) \subset B(\zeta_{\ell-1}, s^{-1} d).$$

Из включения (10) и последнего включения следует, что

$$F^{-m} B(\zeta_m, \kappa R_m) \subset B(\zeta, s^{-m+1} d), \qquad (11)$$

где F^{-m} – композиция ветвей функции F^{-1}, определенных выше.

Рассмотрим "овал" $B_m(\zeta) = F^{-m} B(\zeta_m, \kappa R_m)$. Снова пользуясь теоремой K, а) (для функции F^{-m} в круге $B(\zeta_m, R_m)$), убеждаемся, что этот овал имеет ограниченное искажение, то есть

$$B(\zeta, t r_m) \subset B_m(\zeta) \subset B(\zeta, r_m), \qquad (12)$$

где t не зависит от m. Здесь $B(\zeta, r_m)$ – наименьший круг, описанный около $B_m(\zeta)$. Из (11) следует, что

$$r_m \leq s^{-m+1} d \to 0, \quad m \to \infty. \qquad (13)$$

Покажем, что плотность множества Y в овале $B_m(\zeta)$ отделена от 1. Тогда из (12) и (13) будет следовать, что плотность множества Y в точке ζ меньше, чем 1, что и требуется. Согласно лемме 11

$$\frac{mes(B(\zeta, \kappa R_m) \cap L)}{mes\, B(\zeta, \kappa R_m)} \geq a.$$

применив теперь теорему K, б), получим

$$\frac{mes\, B_m(\zeta) \cap F^{-m} L)}{mes\, B_m(\zeta)} \geq T(\kappa)^{-2} a. \qquad (14)$$

Если $z \in F^{-m} L$, то $|\exp F^{m+1} z - a| < \varepsilon < 1$.

Если же $z \in Y$, то $|\exp F^{m+1} z| > \exp A > |a| + 1$ (в силу выбора A). Следовательно, $Y \cap f^{-m} L = \phi$. Теперь из (14) следует, что

$$\frac{mes(B_m(\zeta) \cap Y)}{mes\, B_m(\zeta)} \leq 1 - T(\kappa)^{-2} a,$$

то есть плотность множества Y в овале $B_m(\zeta)$ отделена от 1, что и требовалось.

Напомним, что орбита точки z поглощается циклом периодической точки b, если $f^m z = b$ при некотором m.

ТЕОРЕМА 6 (ср. [12]). Пусть $f \in S$ – функция конечного порядка, обратная к которой имеет хотя бы одну логарифмическую точку ветвления. Предположим, что орбиты базисных точек функции f, лежащих на множестве Жюлиа, поглощаются отталкивающими циклами. Предположим также, что $J(f) \neq \mathbb{C}$. Тогда лебегова мера множества Жюлиа равна 0.

Заметим, что требование наличия логарифмической точки ветвления у функции f эквивалентно существованию кривой γ, уходящей на ∞ такой, что $f(z)$ имеет конечный предел при $z \to \infty$ на γ, иначе говоря, функция f имеет конечное асимптотическое значение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Пусть $\{b_\kappa\}_{\kappa=1}^{\ell}$ суть все отталкивающие периодические точки, которые содержатся в орбитах базисных точек $\{c_i\}_{i=1}^{n}$ – все нейтральные рациональные периодические точки. Пусть

$$M > 2 \max_{\kappa,i}(|b_\kappa|, |c_i|) \text{ и } \varliminf_{m\to\infty} |f^m z| < M$$

для почти всех точек $z \in \mathbb{C}$ (лемма 12). Рассмотрим такую точку $z \in J(f)$, для которой $\varliminf_{m\to\infty} |f^m z| < M$, и орбита этой точки не поглощается отталкивающими и нейтральными рациональными циклами. Тогда эта орбита не сходится ни к одному из указанных циклов. Это очевидно для отталкивающих циклов и следует из результатов П. Фату для нейтральных циклов (П.Фату показал, что если $\{C_i\}_{i=0}^{p-1}$ нейтральный рациональный цикл, $f^m z \to \{C_i\}_{i=0}^{p-1}$, $m \to \infty$, то $z \in R(f)$ или $f^m z = c_o$ при некотором m ([3], с.191-221)). Отсюда нетрудно вывести, что существует $\delta > 0$ и такая последовательность $\{m_s\}$, что

$$|f^{m_s} z| < M, \quad \inf_{s,k,i} (|f^{m_s} z - b_k|, |f^{m_s} - c_i|) > \delta .$$

Следовательно, существует ветвь функции f^{-m_s} однолистно отображающая круг $B(f^{m_s} z, \delta)$ на окрестность точки z.

Далее, в силу $J(f) \neq \mathbb{C}$ имеем

$$\inf_{|\zeta| < M, \zeta \in J(f)} \frac{mes[B(\zeta, \frac{\delta}{2}) \cap R(f)]}{mes\, B(\zeta, \frac{\delta}{2})} \geqslant \alpha > 0 .$$

Отсюда и из теоремы K, b) следует, что

$$\frac{mes\,(B_{m_s}(\zeta) \cap R(f))}{mes\, B_{m_s}(\zeta)} \geqslant T\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \alpha ,$$

где $B_{m_s}(\zeta) = f^{-m_s} B(f^{m_s}\zeta, \frac{\delta}{2})$.

Так как $B_{m_s}(\zeta)$ имеет ограниченное "искажение" (теорема K, а), то плотность множества $J(f)$ в точке ζ меньше, чем 1. Следовательно, $mes\, J(f) = 0$, что и требовалось.

Об однопараметрическом семействе $f_c(z) = exp\, z + c$. Функция, обратная к f_c имеет одну логарифмическую точку ветвления над точкой c. Суммируя накопленную информацию, получаем, что возможна одна из следующих ситуаций:

1. Функция f_c имеет единственный притягивающий или нейтральный рациональный цикл, к которому сходятся все траектории из множества нормальности. Точка c лежит в области непосредственного притяжения этого цикла. Лебегова мера множества Жюлиа равна 0.

2. Функция f_c имеет не более двух циклов Зигеля. Границы областей Зигеля содержатся в $\bigcup_{0 \leqslant m < \infty} f_c^m c$.

3. Множество Жюлиа $J(f_c)$ совпадает со всей плоскостью $\mathbb{C}$.

Пусть $c \leqslant -1$. Тогда f_c имеет притягивающую $(c < -1)$ или нейтральную неподвижную точку a_c. Пусть $\mathcal{D}_c$ – область непосредственного притяжения точки a_c, тогда $c \in \mathcal{D}_c$. Так как множество $G = \{z \,|\, |f z - c| < \varepsilon\}$ связно (это просто полуплоскость), то $f_c^{-1}\mathcal{D}_c$ связно. Отсюда следует, что $f_c^{-1}\mathcal{D}_c = \mathcal{D}_c$, то есть область $\mathcal{D}_c$ вполне инвариантна. Следовательно, по теореме 5 $R(f_c) = \mathcal{D}_c$ при $c \leqslant -1$.

Пусть теперь $c > 1$. Тогда $f^m c \longrightarrow +\infty$ и, следовательно, случаи 1,2 исключены. Таким образом, имеем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 7.

а) При $c \leqslant -1$ множество нормальности функции $exp\, z + c$ связно. Множество Жюлиа имеет меру 0.

b) При $c > -1$ множество Жюлиа $J(exp\, z + c)$ совпадает со всей плоскостью $\mathbb{C}$.

При $c = 0$ этот результат элементарными средствами доказал М.Мисюревич [8].

Рассмотрим теперь максильную область A_1, содержащую луч $\{c \,|\, c < -1\}$, на которой функция f_c имеет притягивающую неподвижную точку. Пусть a_c и λ_c – эта точка и ее мультипликатор, соответственно. Пусть γ – простая замкнутая кривая, лежащая внутри A_1 и ограничивающая область V. Рассмотрим последовательность целых функций $\varphi_m(c) = f_c^m 0$, $m = 0, 1, \ldots$. Легко видеть, что в области A_1 последовательность $\{\varphi_m\}_{m=0}^{\infty}$ равномерно на компактах сходится к a_c. Следовательно, $\sup_{m,n} |\varphi_m(c) - \varphi_n(c)| \longrightarrow 0$, и по принципу максимума $\varphi_m - \varphi_n \to 0, m, n \to \infty$ равномерно в V. Отсюда сразу вытекает, что область A_1 односвязна.

Рассмотрим точку $b \in \partial A_1$, для которой $\lambda_b = exp\, 2\pi i \frac{r}{p}$. Тогда, так же как и в семействе $z^2 + c$ [13], [14], в этой точке происходит бифуркация рождения притягивающего цикла порядка p. Возникает область B изменения параметра, в которой цикл остается притягивающим. Так же, как и A_1, B – неограниченная односвязная область. На всюду плотном множестве граничных точек области B снова происходят бифуркации рождения притягивающих циклов порядка, кратного p .

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Julia G. Memoire sur l'iteration des fonctions rationnelles.-J. Math. Pure Appl.,1918,v.8,p.47-245.
2. Fatou P. Sur les equations fonctionnelles.-Bull.Soc.Math. France, 1919 , v.47 ,p.161-271.
3. Fatou P. Sur les equations fonctionnelles. -Bull.Soc.Math. France , 1920 , v.48 ,p.33-94, 208-314.
4. Sullivan D. Iteration des fonctions analitiques complexes. C. R. Acad. Sci., 1982 , v.294, N 9,p.301-304.
5. Baker I.N. An entire function which has wandering domains. -J.Austral.Math.Sic.,1976,v.22, N 2 ,p.173-176.
6. Fatou P. Sur l'iteration des fonctions transcendantes . -Acta Math.,1926, v.47 , p.333-370.
7. Baker I.N. Limit functions and sets of non-normality in iteration theory. - Ann.Acad.Sci. Fenn.,1970, N 467,p.1-11.
8. Misiurewicz M. On iterates of e^z. - Erg.Theory & Dyn.Syst., 1981, v.1 , N 1 , p.103-106.
9. Неванлинна Р. Однозначные аналитические функции.-М.-Л.:ГИТТЛ, 1941.- 388 с.
10. Гольдберг А.А., Островский И.В. Распределение значений мероморфных функций. - М.: Наука, 1970.- 592 с.
11. Baker I.N. The domains of normality of an entire function. -Ann.Acad.Sci.Fenn.,1975,v.1,N 2, p.277-283.

12. Любич М.Ю. О типичном поведении траекторий рационального отображения сферы.-Докл. АН СССР, 1982, т.286, № 1, с.29-32.
13. Левин Г.М. О последовательности бифуркаций однопараметрического семейства отображений.- Успехи мат.наук, 1982,т.36, № 3, с.189-190.
14. Douady A.,Hubbard H. Iteration des polynomes quadratiques complexes.-C.R.Acad. Sci. , 1982 ,v.294,N 3,p.123-126.
15. Baker I.N. Repulsive fixpoints of entire functions . -Math.Z., 1968,B.104 , S.252-256.
16. Валирон Ж. Аналитические функции.- М.: ГИТТЛ,1957. - 235 с.
17. Зигель К.Л. Лекции по небесной механике.- М.: Изд-во иностр. лит., 1959.- 300 с.
18. Альфорс Л.Лекции по квазиконформным отображениям. - М.: Мир, 1969. - 132 с.
19. Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. - М.: Изд-во иностр. лит., 1948.-321 с.
20. Мергелян С.Н. Равномерное приближение функций комплексного переменного.- Успехи мат.наук, 1952, т.7, № 2, с. 31-122.

ЕРЕМЕНКО Александр Эммануилович

ЛЮБИЧ Михаил Юрьевич

Ответственный за выпуск – Писуленко А.А.

БЦ № 16701 . Подписано к печати 26.03.84 . Физ.п.л. 2.3.
Уч.-изд.л. 2,3. Заказ № 183. . Тираж 200 экз. Цена 23 коп.

Ротапринт ФТИНТ АН УССР, Харьков-164, пр.Ленина, 47.