Théorème d'équidistribution de Brolin en dynamique p-adique

Brolin's equidistribution theorem in p-adic dynamics

Favre Charles [a] Juan Rivera-Letelier [b]

[a] *CNRS et Institut de Mathématiques de Jussieu, Case 7012, 2 place Jussieu, F-75251 Paris Cedex 05 - France*

[b] *Departamento de matemática, Universidad católica del norte, Casilla 1280, Antofagasta - Chile*

Abstract

We prove an analog of the famous equidistribution theorem of Brolin for rational mappings in one variable defined over the p-adic field $\mathbb{C}_p$. We construct a mixing invariant probability measure which describes the asymptotic distribution of iterated preimages of a given point. This measure is supported on the Berkovich space $\mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p)$ associated to $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$. We show that its support is precisely the Julia set of R as defined in [R3]. Our results are based on the construction of a Laplace operator on real trees with arbitrary number of branching as done in [FJ].

*To cite this article: A. Nom1, A. Nom2, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I *** (2004).*

Résumé

Nous démontrons un analogue du théorème classique d'équidistribution de Brolin pour les applications rationnelles à une variable définies sur le corps p-adique $\mathbb{C}_p$. On construit une mesure invariante et mélangeante qui décrit la distribution (asymptotique) des préimages itérées d'un point donné. Cette mesure est à support dans l'espace analytique de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, au sens de Berkovich, que l'on note $\mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p)$. On démontre que le support de cette mesure est égale à l'ensemble de Julia dans $\mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p)$, introduit dans [R3]. Nos résultats sont basés sur la notion d'opérateur de Laplace sur les arbres réels avec nombre arbitraire de branchements construit dans [FJ].

*Pour citer cet article : C. Favre, J. Rivera-Letelier, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I *** (2004).*

Email addresses: `favre@math.jussieu.fr` (Favre Charles), `juanrive@ucn.cl` (Juan Rivera-Letelier).

Preprint submitted to Elsevier Science *15th June 2004*

Abridged English version

Iteration theory of rational maps with coefficients in $\mathbb{C}_p$ has recently received increasing attention, see for instance [Be1], [Be2], [BH], [Hs], [HY], [MS], [PST], [R1], [R2], [Y]. The local dynamics is now well-understood, and the action of a rational map R on its Fatou set has been studied in great details. Ergodic properties (topological entropy, existence of mixing measures) have raised however much less interest, except in connection with number theory, see [BH], [PST]. In the complex case some (mixing) invariant measures are constructed from potential theoretic considerations, but such a theory is not available on $\mathbb{C}_p$, see however [Ru]. An essential problem lies in the fact that $\mathbb{C}_p$ endowed with its p-adic norm is not locally compact, and is totally discontinuous. In order to remedy to these problems, we follow the approach of Berkovich, and add points to $\mathbb{C}_p$ in order to obtain an arcwise connected compact topological space suited for analysis. More precisely, one considers the set of valuations $\nu : \mathbb{C}_p[t] \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, such that $\nu|_{\mathbb{C}_p} = \nu_p = -\log_p |\cdot|_p$. The plane $\mathbb{C}_p$ can be naturally embedded in this space through the map $v_x(f) = -\log_p |P(x)|_p$ for $P \in \mathbb{C}_p[t]$. We shall also identify the point ∞ in the standard projective space $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ with the function identically $+\infty$ on $\mathbb{C}_p[t] \setminus \mathbb{C}_p^*$. With the topology of pointwise convergence (we shall call it the weak topology in the sequel), this space of valuations becomes a compact space we denote by $\mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p)$. Its topological structure has been described in great details in [Ber], [R2]: $\mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p)$ is a *non metric real tree* in the sense of [FJ, chapitre 3] (or a simply connected quasi-polyhedron according to [Ber]). Points of $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ are end points in the tree, and we denote the "interior" of the tree by $\mathbb{H}_p = \mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$. This set is again a real tree, which posesses a natural metric d. This metric is uniquely characterized by the fact that it is invariant by the action of $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}_p)$, and for all valuations ν, ν' on the segment $]0, +\infty[\subset \mathbb{H}_p$, we have $d(\nu, \nu') = |\nu(t) - \nu'(t)|$.

Any rational map R with coefficients in $\mathbb{C}_p$ admits a natural action on $\mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p)$ by duality: $R_*\nu(P) = \nu(P \circ R)$ for all $P \in \mathbb{C}_p[t]$. This action is continuous on $\mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p)$, and we can extend the notions of Fatou/Julia sets to R_*, see [R3]. A point ν lies in the Julia set of R_* if and only if for all weak open set $U \subset \mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p)$ containing ν, the set $\cup_{n \geq 0} R^n(U)$ contains $\mathbb{H}_p$. It is also the closure of the set of repelling periodic points (in a suitable sense for points in $\mathbb{H}_p$, see [R3]).

If R is a rational map and $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, we denote by δ_z the Dirac mass at $\{z\}$, and we define $R^*\delta_z$ as the atomic measure supported on $R^{-1}\{z\}$ whose mass at a point $w \in R^{-1}\{z\}$ is equal to the local topological degree of R at w. The total mass of $R^*\delta_z$ is always equal to the degree D of R.

Our main result is the following

Theorem 0.1 *For any rational map R of degree $D \geq 2$ and defined over $\mathbb{C}_p$, there exists a probability measure ρ_R on $\mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p)$, which is invariant by R_*, mixing, whose support equals the Julia set of R_* in $\mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p)$, and such that $\lim_{n\to\infty} D^{-n} R^{n*}\delta_z = \rho_R$, for each point $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ which is not totally invariant by R or R^2.*

Although the measure ρ_R appears for the first time in the present work, a weaker form of our distribution result has been formulated and proved in [PST].

Note that the set $\mathcal{E}$ of points of $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ which are totally invariant by R or R^2 consists of at most two points. When $\mathcal{E}$ has two points, then R is conjugated by an element in $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}_p)$ to $z \mapsto z^D$; when $\mathcal{E}$ is a singleton, R is conjugated to a polynomial map. One can also prove a stronger version of the theorem, namely $\lim_{n\to\infty} D^{-n} R^{n*}\rho = \rho_R$ for any probability measure ρ which does not charge $\mathcal{E}$.

Following [MS], we say that R has good reduction when its reduction in the residue field of $\mathbb{C}_p$ (i.e. the algebraic closure of $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) is well-defined and has the same degree as R. When it is the case, the valuation ν_0 determined by the conditions $\nu_0(t - z) = \min\{0, \nu_p(z)\}$ for all $z \in \mathbb{C}_p$ is totally invariant by R_*, so $\rho_R = \delta_{\nu_0}$. Note that the Julia set of R_* is then reduced to $\{\nu_0\}$, see [R3]. This situation can be generalized to the case when R is conjugated by some element in $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}_p)$ to a rational map having good reduction.

Proposition 0.1 *The measure ρ_R does not charge points of $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$. Moreover, $\rho_R\{\nu\} > 0$ for some $\nu \in \mathbb{H}_p$, if and only if one can find $\phi \in \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}_p)$ such that $\phi \circ R \circ \phi^{-1}$ has good reduction. In this case, $\phi(\nu) = \nu_0$ and $\rho_R = \delta_\nu$.*

Details of proofs, more precise ergodic properties of ρ_R and applications to the computation of normalized heights in the spirit of [PST] will appear in a later work.

1. Introduction

L'itération des fractions rationnelles à coefficients dans le corps p-adique $\mathbb{C}_p$ connaît depuis quelques temps un intérêt croissant (voir par exemple [Be1], [Be2], [BH], [Hs], [HY], [MS], [PST], [R1], [R2], [Y]). La dynamique locale au voisinage d'un point fixe est maintenant complètement comprise, et le comportement d'une fraction rationnelle R sur son domaine de Fatou a été étudié en détail. Les propriétés ergodiques de R (entropie topologique, existence de mesures mélangeantes) ont cependant attirées peu d'attention. Dans le cas complexe, on utilise généralement des méthodes d'analyse harmonique pour construire des mesures invariantes, mais une telle théorie est très peu développée sur $\mathbb{C}_p$ (voir cependant [Ru]). Un problème essentiel provient du fait que, muni de sa norme p-adique $|\cdot|_p$, le corps $\mathbb{C}_p$ n'est pas un espace localement compact, et est de surcroît totalement discontinu. Pour remédier à celà, suivant Berkovich [Ber], on rajoute à $\mathbb{C}_p$ des points afin de le « connexifier » , ce qui permet de développer des outils d'analyse sur $\mathbb{C}_p$ analogues à ceux existant sur $\mathbb{C}$. Plus précisément, on considère l'espace des valuations $\nu : \mathbb{C}_p[t] \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, telles que $\nu|_{\mathbb{C}_p} = \nu_p = -\log_p |\cdot|_p$. Le plan $\mathbb{C}_p$ se plonge alors naturellement dans cet espace par le morphisme d'évaluation $v_x(P) = -\log_p |P(x)|_p$ pour $P \in \mathbb{C}_p[t]$. On identifiera aussi le point ∞ de l'espace projectif standard $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ à la fonction identiquement $+\infty$ sur $\mathbb{C}_p[t] \setminus \mathbb{C}_p^*$. Muni de la topologie de la convergence simple (on dira aussi topologie faible dans la suite), cet ensemble de valuations devient un espace compact que l'on notera $\mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p)$. Sa structure topologique a été décrite en grand détail dans [Ber], [R2] : $\mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p)$ est un *arbre réel non métrique* au sens de [FJ, chapitre 3] (ces espaces sont dénommés aussi quasi-polyhèdre simplement connexe dans [Ber]). Les points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ en constituent le bord (ce sont les bouts de l'arbre), et on notera son « intérieur » $\mathbb{H}_p = \mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$. Cet ensemble est à nouveau un arbre réel, et il possède une métrique naturelle que l'on notera d. Elle est caractérisée par le fait d'être invariante par l'action de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}_p)$, et pour toutes valuations ν, ν' sur le segment $]0, +\infty[\subset \mathbb{H}_p$, on a $d(\nu, \nu') = |\nu(t) - \nu'(t)|$.

Toute application rationnelle R à coefficients dans $\mathbb{C}_p$ admet une action naturelle sur $\mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p)$ par dualité : $R_*\nu(P) = \nu(P \circ R)$ pour tout $P \in \mathbb{C}_p[t]$. Cette action est continue sur $\mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p)$, et l'on peut étendre les notions d'ensembles de Fatou/Julia pour R_*, voir [R3]. Un point ν est dans l'ensemble de Julia de R_* si et seulement si pour tout ouvert faible $U \subset \mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p)$ contenant ν, l'ensemble $\cup_{n \geq 0} R^n(U)$ contient $\mathbb{H}_p$. C'est aussi la clotûre de l'ensemble des points périodiques répulsifs (en un sens convenable pour les points de $\mathbb{H}_p$, voir [R3]).

Si R est une application rationnelle, et $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, on note δ_z la masse de Dirac supportée sur $\{z\}$, et on définit $R^*\delta_z$ comme la mesure atomique supportée sur $R^{-1}\{z\}$ dont la masse en un point $w \in R^{-1}\{z\}$ coïncide avec le degré topologique local de R en w. La masse de $R^*\delta_z$ est toujours égale au degré D de R.

Notre résultat principal est le suivant.

Théorème 1.1 *Pour toute fraction rationnelle R de degré $D \geq 2$ et définie sur $\mathbb{C}_p$, il existe une mesure de probabilité ρ_R sur $\mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p)$, invariante par R_* et mélangeante, dont le support coïncide avec l'ensemble de Julia de R_* dans $\mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p)$, et telle que $\lim_{n\to\infty} D^{-n} R^{n*}\delta_z = \rho_R$, pour tout point $z \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ qui n'est pas totalement invariant par R ou R^2.*

Bien que la mesure ρ_R elle-même apparaisse pour la première fois dans ce travail, il convient de noter qu'une forme plus faible du résultat d'équidistribution ci-dessus a été formulé dans [PST, section 5.4].

Notons que l'ensemble $\mathcal{E}$ des points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ totalement invariants par R ou R^2 consiste d'au plus deux points. Lorsque $\mathcal{E}$ en possède deux, R est conjugué par un élément de $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C}_p)$ à $z \mapsto z^D$; lorsque $\mathcal{E}$ en possède un, R est conjugué à un polynôme. On peut de plus démontrer que $\lim_{n\to\infty} D^{-n}R^{n*}\rho = \rho_R$ pour toute mesure de probabilité ρ ne chargeant pas $\mathcal{E}$.

Suivant [MS], on dit que R a bonne réduction si et seulement si sa réduction dans le corps résiduel de $\mathbb{C}_p$ (i.e. la clôture algébrique de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$) est bien définie et de même degré que R. Lorsque c'est le cas, la valuation ν_0 déterminée par $\nu_0(t-z) = \min\{0, \nu_p(z)\}$ pour tout $z \in \mathbb{C}_p$ est totalement invariante par R, et donc $\rho_R = \delta_{\nu_0}$. Notons que l'ensemble de Julia de R est alors réduit au point $\{\nu_0\}$, voir [R3]. Cette situation se généralise immédiatement au cas où R est conjuguée par un élément de $\mathrm{PGL}(2,\mathbb{C}_p)$ à une fraction rationnelle ayant bonne réduction.

Proposition 1.2 *La mesure ρ_R ne charge pas les points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$. De plus, $\rho_R\{\nu\} > 0$ pour un point $\nu \in \mathbb{H}_p$, si et seulement si on peut trouver $\phi \in \mathrm{PGL}(2,\mathbb{C}_p)$ tel que $\phi \circ R \circ \phi^{-1}$ a bonne réduction. Dans ce cas $\phi(\nu) = \nu_0$ et $\rho_R = \delta_\nu$.*

Les détails des preuves, ainsi que les propriétés ergodiques de ρ_R et les applications au calcul de hauteurs normalisées dans l'esprit de [PST] paraîtront dans un travail ultérieur.

2. Opérateur de Laplace

Nous allons donner les grandes lignes de la construction d'une classe de fonctions $\mathcal{P}$ définies sur $\mathbb{H}_p$ à valeurs réelles, et d'un opérateur noté Δ qui à chaque fonction g de $\mathcal{P}$ associe une mesure borélienne signée définie sur $\mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p)$, différence de deux mesures positives de masse égales. L'opérateur Δ est appelé *opérateur de Laplace*, et est un analogue de l'opérateur de Laplace standard sur un graphe fini ou sur $\mathbb{R}^n$, adapté ici à la géométrie d'arbre de $\mathbb{H}_p$. Pour les arbres finis, un tel opérateur se construit facilement ; mais dans notre contexte les points de branchements sont denses sur tout segment, et le nombre de branches est infini en chacun de ces points. La méthode de construction suit très précisément [FJ, Chapitre 7].

Fixons $\nu_* \in \mathbb{H}_p$. Un tel point marqué induit une relation d'ordre partiel $\leq$ sur $\mathbb{H}_p$: $\nu \leq \nu'$ dès que $[\nu_*, \nu] \subset [\nu_*, \nu']$. Il en est l'unique élément minimal. Dans ce contexte, on peut définir une notion de fonction à variations bornées sur $(\mathbb{H}_p, \leq)$, voir [FJ, Definition 7.20]. On écrit alors $g \in \mathcal{P}$ si l'on a $g(\nu) = \mathrm{Cst} + \int_0^{d(\nu_*,\nu)} f(\nu_t)\, dt$ avec f à variations bornées, et où ν_t dénote l'unique valuation de $[\nu_*, \nu]$ à distance t de ν_*. On vérifie que la classe $\mathcal{P}$ ne dépend pas du choix de ν_*.

Pour toute fonction à variations bornées f suffisament régulière, il existe une unique mesure borélienne ρ_f sur $\mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p)$ telle que $\rho_f\{\mu \geq \nu\} = f(\nu)$ par [FJ, Theorem 7.36]. Pour $g \in \mathcal{P}$, et en utilisant les notations précédentes on pose alors $\Delta g = \rho_f - f(\nu) \cdot \delta_\nu$. Cette mesure ne dépend pas non plus du choix de ν_*.

On montre facilement que Δg est une mesure réelle différence de deux mesures positives de même masse, et que réciproquement toute différence de mesures positives de même masse peut s'écrire sous cette forme. Si par exemple $\nu \in \mathbb{H}_p$ et $\nu' \in \mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p)$, et g est la fonction localement constante hors de $[\nu, \nu']$ et valant $d(\cdot, \nu)$ sur ce segment, alors $\Delta g = \delta_{\nu'} - \delta_\nu$.

Pour tout $g \in \mathcal{P}$, la masse de Δg en un point $\nu \in \mathbb{H}_p$ est égale à la somme des dérivées de g sur toutes les branches partant de ν. En un point de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, cette masse est donnée par la limite de la dérivée de g quand on converge vers ν le long d'un segment.

On déduit de [FJ, Theorem 7.61], la propriété de continuité suivante. Fixons $\nu \in \mathbb{H}_p$. Soit ρ_n une suite de mesures de *probabilité*, et fixons $g_n \in \mathcal{P}$ telles que $\rho_n = \delta_\nu + \Delta g_n$. Si g_n converge ponctuellement vers g dans $\mathbb{H}_p$, alors $g \in \mathcal{P}$, et ρ_n converge vaguement vers $\delta_\nu + \Delta g$.

3. Construction de la mesure

Fixons une application rationnelle R de degré $D \geq 2$ à coefficients dans $\mathbb{C}_p$. Son action sur $\mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p)$, notée R_*, est faiblement continue, et chaque point de $\mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p)$ possède au plus D préimages. En un point $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, on définit le degré local, noté $\deg_R(x)$, comme l'ordre d'annulation de la dérivée de R plus une unité. Cette fonction s'étend naturellement à $\mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p)$ de telle sorte que $\sum_{R_*\mu=\nu} \deg_R(\mu) = D$, voir [R3].

Soit $f : \mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p) \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On définit $R_*f(\nu) = \sum_{R_*\mu=\nu} \deg_R(\mu) f(\mu)$. Cette fonction est encore continue, voir [R3]. Si ρ est une mesure de masse finie sur $\mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p)$, on peut alors définir $R^*\rho$ par dualité en posant $\int f\, d(R^*\rho) = \int R_*f\, d\rho$. On vérifie que pour tout point de $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, on a $R^*\delta_x = \sum_{R(y)=x} \deg_R(y)\delta_y$. Par continuité, on en déduit que la masse de $R^*\rho$ est D fois la masse de ρ pour toute mesure positive. Si $x \neq x' \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, et g est une fonction telle que $\Delta g = \delta_x - \delta_{x'}$, il est facile de voir que $R^*\Delta g = \Delta(g \circ R_*)$. On vérifie que cette formule reste valide pour n'importe quelle fonction g dont le laplacien est une mesure atomique, puis par continuité pour toute fonction g dans le domaine de Δ.

Prenons maintenant ν un point arbitraire de $\mathbb{H}_p$. Nous pouvons écrire $D^{-1}R^*\delta_\nu = \delta_\nu + \Delta g$ avec $g : \mathbb{H}_p \to \mathbb{R}$. Le support de $R^*\delta_\nu$ est constitué d'au plus D points, donc l'enveloppe convexe de l'ensemble $\operatorname{supp} R^*\delta_\nu \cup \{\nu\}$ est un arbre fini $\mathcal{T}$ dont les bouts sont situés dans $\mathbb{H}_p$. Le potentiel g est localement constant en dehors de $\mathcal{T}$ et est borné sur $\mathcal{T}$, il est donc borné sur $\mathbb{H}_p$ tout entier. On obtient donc

$$\frac{1}{D^n} R^{n*}\delta_\nu = \delta_\nu + \Delta g_n \text{ avec } g_n = \sum_0^{n-1} D^{-k} g \circ R_*^k \ .$$

La suite g_n converge uniformément sur $\mathbb{H}_p$ vers une fonction g_∞, donc $D^{-n}R^{n*}\delta_\nu$ converge vaguement vers une mesure ρ_R. Cette mesure ne dépend pas du point ν choisi. Notons que pour tout $\nu \in \mathbb{H}_p$ nous pouvons écrire $\rho_R = \delta_\nu + \Delta g$ avec g *bornée*. Ceci implique en particulier que ρ_R ne charge aucun point de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$. Elle ne charge donc pas l'ensemble exceptionnel $\mathcal{E}$ de R. La mesure ρ_R vérifie toujours les équations d'invariance : $R^*\rho_R = D\,\rho_R$, et $R_*\rho_R = \rho_R$. En particulier, pour tout $\nu, \nu' \in \mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p)$ tels que $R(\nu') = \nu$ on a $\rho_R\{\nu'\} = \frac{\deg(R)}{\deg_R(\nu')}\,\rho_R\{\nu\}$.

On déduit directement de ces propriétés la Proposition 1.2.

4. Preuve du théorème principal

On a déjà construit la mesure ρ_R et vérifié qu'elle était invariante. De l'invariance de ρ_R, du fait que son support est métrisable et qu'elle ne charge pas les points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, on déduit que son support est égal à l'ensemble de Julia.

Prenons un point $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ qui n'est pas totalement invariant par R ou R^2, et écrivons $\delta_x = \delta_{\nu_0} + \Delta g$ avec $g : \mathbb{H}_p \to \mathbb{R}$. On a alors, $D^{-n}R^{n*}\delta_x = D^{-n}R^{n*}\delta_{\nu_0} + \Delta(D^{-n}g \circ R^n)$ pour tout $n \geq 0$, donc $D^{-n}R^{n*}\delta_x \to \rho_R$ dès que $D^{-n}g \circ R^n \to 0$ ponctuellement. On va démontrer que cette suite de fonctions tends vers zéro. Pour celà on va estimer les vitesses de convergence des points de $\mathbb{H}_p$ vers le bord de l'arbre $\mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p)$ c'est-à-dire vers $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$.

La fonction g est supportée sur le segment reliant x à ν_0, et tends vers $+\infty$ en x, elle est donc uniformément bornée inférieurement, et $\liminf D^{-n}g \circ R^n \geq 0$. Il nous suffit donc de montrer $\limsup D^{-n}g \circ R^n \leq 0$. Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des points totalement invariants de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ par R ou R^2, et $B(\mathcal{E})$ l'ensemble des points de $\mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p)$ dont les itérés convergent vers $\mathcal{E}$. La fonction g est bornée dans un voisinage de $\mathcal{E}$. Donc $\lim D^{-n}g \circ R_*^n = 0$ sur $B(\mathcal{E})$.

Quitte à prendre un itéré, on peut supposer que le degré local en tout point hors de $\mathcal{E}$ est strictement inférieur au degré de R. Pour chaque point critique $w \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ d'ordre $k(w) \geq 2$, on fixe une petite boule $B(w) \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$, telle que $R(B(w))$ est à nouveau une boule, et $R : B(w) \to R(B(w))$ est conjuguée à $z \mapsto z^k$. On notera $r(w)$ le diamètre de $B(w)$. La distance chordale sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)$ est ultra-métrique, elle se prolonge donc naturellement en une métrique d sur l'arbre $\mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p)$. L'enveloppe convexe de $B(w)$ dans $\mathsf{P}^1(\mathbb{C}_p)$ est encore une boule $\hat{B}(w)$ pour la métrique d de rayon $r(w)$, et pour tout $\mu \in \hat{B}(w)$, on a $\mathsf{d}\,(R(\mu), \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)) \geq \mathsf{d}\,(\mu, \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p))^k$. Hors de la réunion des boules $B(w)$ pour w critique, on a par ailleurs

$$\mathsf{d}\,(R(\mu), \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)) \geq C\,\mathsf{d}\,(\mu, \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)) \text{ pour une constante } C > 0\ .$$

Hors du bassin d'attraction $B(\mathcal{E})$ des points exceptionnels, l'orbite d'un point ne peut jamais tomber dans une boule $\hat{B}(w)$ où $k(w) = D$. On a donc

$$\mathsf{d}\,(R_*^n(\mu), \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)) \geq \left(C\,\mathsf{d}\,(\mu, \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p))\right)^{(D-1)^n} \text{ pour tout } n\ .$$

Par ailleurs, $g(\mu) \leq -\log \mathsf{d}\,(\mu, \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p)) + O(1)$ pour tout $\mu \in \mathbb{H}_p$, donc $g(R_*^n(\mu)) \lesssim (D-1)^n$ ce qui prouve $D^{-n} g \circ R_*^n \to 0$ hors de $B(\mathcal{E})$.

Finalement, le caractère mélangeant se déduit facilement des propriétés d'équidistribution (voir par exemple [FG, Lemme 4.11]).

Remerciements

Les deux auteurs tiennent à remercier chaleureusement l'ACI « dynamique des applications polynomiales » et tout particulièrement Serge Cantat pour son intérêt et soutien actif à ce projet. Le second auteur est de plus soutenu par le projet FONDECYT N 1040683.

Références

[BH] M. Baker, L.C. Hsia. *Canonical Heights, Transfinite Diameters, and Polynomial Dynamics.* Prépublication arXiv :math.NT/0305181 (2003).

[Be1] R. Benedetto. *Components and periodic points in non-archimedean dynamics.* Proceedings of the London Mathematical Society **84** (2002), 231-256.

[Be2] R. Benedetto. *Examples of wandering domains in p-adic polynomial dynamics.* Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris, **335** (2002), 615-620.

[Ber] V.G. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-archimedean fields.* Math. Surveys Monographs 33, Amer. Math. Soc. Providence RI, 1990.

[FG] C. Favre et V. Guedj *Dynamique des applications rationnelles des espaces multiprojectifs.* Indiana Univ. Math. J. 50 (2001), no. 2.

[FJ] C. Favre et M. Jonsson *The valuative tree.* Prépublication arXiv :math.AC/0210265 (2003).

[HY] M. Herman, J.C. Yoccoz. *Generalizations of some theorems of small divisors to non-archimedean fields.* In Geometric Dynamics (Rio de Janeiro 1981) LNM 1007, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1983, 408-447.

[Hs] L.C. Hsia. *Closure of periodic points over a non-archimedean field.* J. London Math. Soc. **62** (2000), 685-700.

[MS] P. Morton. J. Silverman. *Periodic points, multiplicities, and dynamical units.* J. Reine Agnew. Math. **461** (1995), 81-122.

[PST] L. Szpiro, T.J. Tucker, J. Pineiro. *Mahler measure for dynamical systems on $\mathcal{P}^1$ and intersection theory on a singular arithmetic surface.* Prépublication 2004.

[R1] J. Rivera-Letelier. *Dynamique des fonctions rationnelles sur des corps locaux.* Astérisque **287** (2003), 147-230.

[R2] J. Rivera-Letelier. *Espace hyperbolique p-adique et dynamique des fonctions rationnelles.* Compositio Mathematica **138** (2003) 199-231.

[R3] J. Rivera-Letelier. *Théorie de Julia et Fatou sur la droite projective de Berkovich.* En préparation.

[Ru] R. Rumely. *Capacity theory on algebraic curves.* Lecture Notes in Mathematics, 1378. Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[Y] J.C. Yoccoz. *Notes sur la géométrie et la dynamique p-adique.* Cours au Collège de France 2001/2002. http//www.math.sunysb.edu/∼rivera