Capítulo 18

Integrais de linha

Notação 18.0.10. Para evitar parênteses às vezes escrevemos $f(x)$ como $f|_x$.

18.1 Em respeito de comprimento de arco

Definição 18.1.1. Dado[1] uma função contínua $f\colon \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ e uma curva suave $C = \operatorname{im}(r\colon [a,b] \to D)$, definimos a **integral linha** de f ao longo C assim

$$\int_C f(x)\,ds := \int_a^b f|_{r(t)}\,|\dot r(t)|\,dt. \tag{18.1.1}$$

No caso de uma curva suave por partes C composta de curvas suaves $C_1, \dots, C_k$ definimos

$$\int_C f(x)\,ds := \int_{C_1} f(x)\,ds + \cdots + \int_{C_k} f(x)\,ds.$$

Proposição 18.1.2 (Independência da parametrização suave)**.** *Se $r\colon [a,b] \to D$ e $s\colon [c,d] \to D$ são parametrizações suaves de C, então*

$$\int_a^b f|_{r(t)}\,|\dot r(t)|\,dt = \int_c^d f|_{s(t)}\,|\dot s(t)|\,dt.$$

Demonstração. Mudança de variáveis, Teorema 16.0.11. □

Comentário 18.1.3. A integral de linha (18.1.1) possui uma interpretação como um limite de somas de Riemann. No caso de um integrando é não-negativo, ou seja $f \ge 0$, de $n = 2$ variáveis considere uma folha de papel colocado no plano-xy ao longo da curva C e cuja altura é cortada correspondentemente ao valor de f ao longo de C. Neste caso $\int_C f(x)\,ds$ é a àrea da folha, em outras palavras, a àrea entre a curva C e o gráfico de f encima C.

[1]Cap. 18 de MA211 2025-1, autor Joa Weber: 11 de junho de 2025

18.1.1 Comprimento de arco

Definição 18.1.4. Dada uma curva suave $C = \operatorname{im}(r\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n)$, a função

$$s\colon [a,b] \to [0,\infty), \quad \tau \mapsto \int_{C_\tau} 1\, ds = \int_a^\tau |\dot r(t)|\, dt$$

é chamada de **comprimento de arco**. O valor $s(\tau)$ é o comprimento da parte C_τ da curva C entre os pontos $r(a)$ e $r(\tau)$. Segundo (19.1.1) a função s é C^1 e

$$s'(\tau) = |\dot r(\tau)|.$$

Corolário 18.1.5. *O comprimento de uma curva suave C é dado por*

$$L(C) := \int_C 1\, ds = \int_a^b |\dot r(t)|\, dt.$$

Demonstração. A integral linha $\int_C 1\, ds$ é a àrea entre C e uma cópia de C na altura 1, veja Comentário 18.1.3. De outro lado esta àrea iguale o produto do comprimento da curva C e a altura, a qual é 1. □

Comentário 18.1.6 (Gráfico $C = \operatorname{Gr}(g)$)**.** Seja $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável. Então o gráfico $C := \operatorname{Gr}(g)$ é uma curva suave em $\mathbb{R}^2$ cuja parametrização natural é $r(t) := (t, g(t))$. O comprimento é dado por

$$L(\operatorname{Gr}(g)) = \int_a^b \left|\tfrac{d}{dt}(t, g(t))\right| dt = \int_a^b \sqrt{1 + \dot g(t)^2}\, dt.$$

18.2 Em respeito de funções coordenadas

Definição 18.2.1. Dado uma função contínua $f\colon \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ e uma curva suave orientada $C = \operatorname{im}(r\colon [a,b] \to D)$, então definimos para $i \in \{1, \dots, n\}$ a **integral de linha** de f ao longo C em respeito à função coordenada x_i assim

$$\int_C f(x)\, dx_i := \int_a^b f|_{r(t)}\, \dot r_i(t)\, dt. \tag{18.2.1}$$

Exercício 18.2.2. Mostre independência da escolha da parametrização.

Definição 18.2.3. Abreviamos

$$\int_C f(x)\, dx_i + \int_C g(x)\, dx_j =: \int_C \Big(f(x)\, dx_i + g(x)\, dx_j\Big).$$

Comentário 18.2.4. Enquanto a integral linha em respeito ao comprimento de arco s não depende da orientação da curva C, as integrais linhas em respeito as funções coordenadas x_i não possuem esta propriedade, veja Exercício 18.2.5.

Exercício 18.2.5 (Dependência do sentido do percurso e do caminho)**.** No $\mathbb{R}^2$ com coordenadas (x, y) calcule $\int_C y^2\, dx$ para as curvas $C = C_1, \bar C_1, C_2$ cujas parametrizações são

a) $r_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $r_1(t) = (1-t)(-5,-3) + t(0,2)$;
b) $\bar{r}_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\bar{r}_1(t) := r_1(1-t)$;
c) $r_2\colon [-3,2] \to \mathbb{R}^2$, $r_2(t) = (4-t^2, t)$.

Esboce as curvas no $\mathbb{R}^2$. [Valores para conferir: a) $\frac{35}{3}$ b) $-\frac{35}{3}$ c) $\frac{65}{2}$.]

18.3 Em respeito de campos vetoriais

Definição 18.3.1. Dado uma função contínua $f\colon \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ e uma curva suave orientada $C = \operatorname{im}(r\colon [a,b] \to D)$, então definimos a **integral de linha** do campo vetorial F am respeito ao campo tangente T ao longo da curva orientada C e em respeito a comprimento de arco s pela fórmula

$$\int_C F \cdot T\, ds := \int_a^b F|_{r(t)} \cdot \dot{r}(t)\, dt =: \int_C F \cdot dr \tag{18.3.1}$$

onde o produto é o produto interno no $\mathbb{R}^n$, veja (1.1.2). Destacamos que $\int_C F \cdot dr$ só é uma notação alternativa, mais curta e sugestiva.

Para a **orientação oposta** da curva orientada C, notação $\overline{C}$, o campo tangente T a C muda para a direção oposta, ou seja T muda para $-T$ e por isso

$$\int_{\overline{C}} F \cdot dr = -\int_C F \cdot dr.$$

Exercício 18.3.2. Mostre independência da escolha da parametrização da curva orientada. [Dica: Esta integral iguale (18.1.1) onde $f(x) := F(x) \cdot T(x)$ e $x = r(t)$ e o produto é o produto interno no $\mathbb{R}^n$.]

Observação 18.3.3. A integral de linha (18.3.1) para campos vetoriais e as integrais de linha (18.2.1) para as funções coordenadas x_i são relacionadas assim

$$\begin{aligned}
\int_C F \cdot dr &= \int_a^b \begin{bmatrix} F_1|_{r_1(t)} \\ \vdots \\ F_n|_{r_n(t)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{r}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{r}_n(t) \end{bmatrix} dt \\
&= \int_a^b \left(F_1|_{r_1(t)}\, \dot{r}_1(t) + \cdots + F_n|_{r_n(t)}\, \dot{r}_n(t) \right) dt \\
&= \int_C \left(F_1\, dx_1 + \cdots + F_n\, dx_n \right).
\end{aligned}$$

Exercício 18.3.4 (Trabalho feito num campo de força F)**.** a) Esboce o campo vetorial $F(x,y) = (x^2, -xy)$ e a curva $C \subset \mathbb{R}^2$ dada viajando contra-horário do ponto $(r,0)$ ao ponto $(0,r)$ sempre ficando na distancia r da origem.
b) Calcule quanto energia ganha ou perde uma partícula no campo de força F ao longo do camino C. [Valor para conferir: $-\frac{2}{3}$.]