

Capítulo 17

Campos vetoriais e curvas

17.1 Campos vetoriais

Definição 17.1.1 (Campos vetoriais). Uma¹ aplicação $F: \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamado de **campo vetorial** ao longo do seu domínio D . Usamos a notação

$$F = (F_1, \dots, F_n): \mathbb{R}^n \supset D \rightarrow \mathbb{R}^n$$
$$r = (r_1, \dots, r_n) \mapsto (F_1(r_1, \dots, r_n), \dots, F_n(r_1, \dots, r_n)).$$

Comentário 17.1.2 (Representação como campo de flechas). Os valores $F(r)$ representam flechas da origem $0 \in \mathbb{R}^n$ ao ponto $F(r) \in \mathbb{R}^n$, notação $\vec{F}(r)$. Assim a cada um ponto r do domínio D corresponde um flecha $\vec{F}(r)$; veja Figura 17.1.

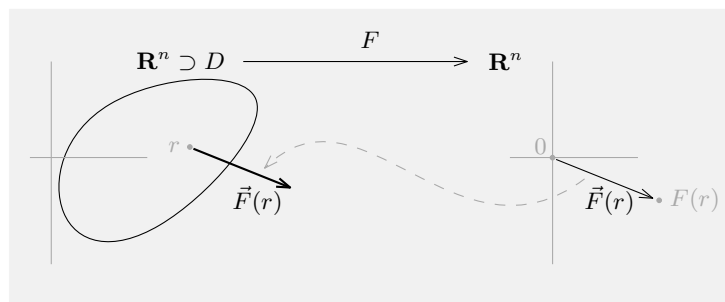


Figura 17.1: Campo vetorial F como campo de flechas $\vec{F}(r)$ ao longo do domínio

Aplicações. Campos de flechas servem para descrever correntes, de água ou ar (vento), ou forças (gravitação, elétrico, magnético) colocando em cada lugar r uma flecha na direção do corrente ou da força, o comprimento da flecha em correspondência à velocidade do corrente ou à intensidade da força.

¹Cap. 17 de MA211 2025-1, autor Joa Weber: 11 de junho de 2025

Exemplo 17.1.3 (Campos vetoriais). a) **Campo radial** $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x$.
b) O **campo rotação** por $\pi/2$ no plano $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definido assim

$$F(x, y) = (-y, x) = -ye_1 + xe_2$$

serve como exemplo principal que não possui várias propriedades desejadas – como o cisalhamento na álgebra linear.

Observe que $F(z) = J_0 z$ onde $z = (x, y)$ e $J_0 = \mathbf{r}_{\frac{\pi}{2}}$ é a matriz da rotação anti-horária no plano pelo ângulo $\frac{\pi}{2}$, ou seja

$$\mathbf{r}_\phi = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}, \quad J_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (17.1.1)$$

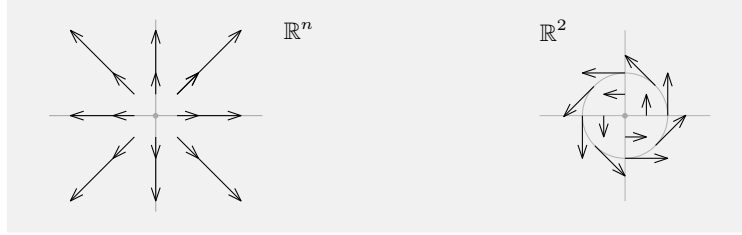


Figura 17.2: O campo radial no $\mathbb{R}^n$ e o campo rotação por $\frac{\pi}{2}$ no plano

Exercício 17.1.4. Mostre os seguintes. a) O campo radial é o gradiente de uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

b) O campo rotação não é um gradiente. [Dica: suponha por absurdo que seja um gradiente e faça um passeio ao longo de um círculo centrado na origem.]

Exemplo 17.1.5 (Gravitação – teoria de Newton). Seja M a massa de um corpo na origem do espaço $\mathbb{R}^3$ e m a massa de um corpo na posição $x \in \mathbb{R}^3$, então a força gravitacional exercida de M a m é

$$F: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto \frac{mMG}{|x|^3} x \quad (17.1.2)$$

onde G é uma constante da gravitação.

Exemplo 17.1.6 (Força elétrica – teoria de Coulomb). Seja Q a carga elétrica de uma partícula na origem do espaço $\mathbb{R}^3$ e q a carga elétrica de uma partícula na posição $x \in \mathbb{R}^3$, então a força elétrica exercida de Q a q é

$$F: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto \frac{qQ\varepsilon_0}{|x|^3} x$$

onde ε_0 é uma constante elétrica.

Comentário 17.1.7 (Abordagem alternativa – teoria de Weber). Uma alternativa aos dois modelos anteriores foi proposta de Wilhelm Weber no século 19. O professor André Assis (IFGW, UNICAMP) deu [palestras impressionantes \(youtube\)](#) na escola avançada “*Symplectic Topology meets Celestial and Quantum Mechanics via Weber Electrodynamics*” no IMECC em Fevereiro 2020, o último evento antes de chegar o ‘novo normal’.

Exercício 17.1.8. Esboce os campos vetoriais $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ seguintes

- a) $F(x, y) = -(x, y)$
- b) $F(x, y) = ye_2$
- c) $F(x, y) = |(x, y)|e_2$

onde os vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ formam a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

17.1.1 Campos gradientes

Dado uma função f de classe C^1 num conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Então o vetor gradiente, ou seja a lista das derivadas parciais $\nabla f = (f_{x_1}, \dots, f_{x_n})$, é ortogonal às hipersuperfícies de nível $f^{-1}(\kappa)$ onde κ é um valor regular de f . Como em (5.3.5) vale

$$\nabla f(x) \perp T_x f^{-1}(\kappa), \quad \forall x \in f^{-1}(\kappa).$$

Definição 17.1.9 (Campos gradientes alias campos conservativos). Um campo vetorial F é chamado de **campo gradiente** ou de **conservativo** caso existir uma função f cujo gradiente é $F = \nabla f$. Neste caso f é chamada de **função potencial** do campo.

Significância. Como vimos no Exercício 17.1.4 não todo campo vetorial é um gradiente. A significância dos campos gradientes é o fato que para eles vale um análogo do teorema fundamental do cálculo; veja Teorema 19.2.1. Ou seja, em termos da física, o trabalho necessário para carregar uma partícula do ponto A para B num campo de força F não depende do caminho escolhido.

Uma função é um objeto mais simples como um campo vetorial. Assim no caso de campos gradientes podemos analisar a função potencial para entender o campo. Felizmente para a análise de funções existe uma teoria poderosa – a teoria de Morse, veja e.g. [Mil63, Web06].

Exercício 17.1.10. Mostre que a função $f(x, y, z) = mMG(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$ é uma função potencial do campo da força gravitacional (17.1.2).

17.2 Curvas e caminhos

Sejam $a < b$ números reais.

Definição 17.2.1 (Curva C e parametrização r).

a) Uma aplicação contínua $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto r(t)$, é chamada de **parametrização** e sua imagem $C := \text{im}(r)$ é chamada de uma **curva** em $\mathbb{R}^n$. Neste caso r é também chamado de **parametrização** da curva C .

b) Uma curva parametrizada $r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é chamada de

- **fechada** se $r(a) = r(b)$;
- **simples** se r não se auto-intercepta em nenhum ponto entre o ponto inicial $r(a)$ e o ponto final $r(b)$, em símbolos $r(s) = r(t)$ implica $\{s, t\} = \{a, b\}$.

Nestes casos a imagem $C = \text{im}(r)$ é chamada de **curva fechada**, respectivamente de **curva simples**. Veja Figura 17.3.

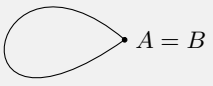
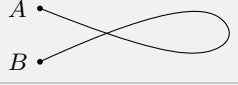
curva	não fechada	fechada
simples		
não simples		

Figura 17.3: Curvas fechadas e simples no $\mathbb{R}^n$ onde $A = r(a)$ e $B = r(b)$

Definição 17.2.2 (Curva e parametrização suave – ‘viagem sem pausa’). Uma parametrização de classe C^1 que nunca possui velocidade nulo, em símbolos

$$r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \dot{r}(t) := \frac{d}{dt}r(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b],$$

é chamada de **curva parametrizada suave** ou **parametrização suave**. A imagem $C := \text{im}(r)$ é chamada de **curva suave**.

Uma **curva suave por partes** é uma curva C composta de um número finito de curvas suaves $C_1, \dots, C_k$ tal que o ponto final de C_j é o ponto inicial de C_{j+1} . Veja Figura 17.4.

Observe que um subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é uma curva suave se existe (pelo menos) uma parametrização suave r cuja imagem é C ; veja Exemplo 17.2.3.



Figura 17.4: Uma curva suave e duas curvas suave-por-partes

Exemplo 17.2.3 (Curvas suaves tem parametrizações não suaves). Seja $C \subset \mathbb{R}^2$ a imagem das parametrizações

$$r: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (t, t), \quad \tilde{r}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{cases} (2t, 2t) & , t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (1, 1) & , t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.$$

A primeira parametrização tem derivada $\dot{r}(t) \equiv (1, 1) \neq (0, 0)$ constante, por isso continua, e não-nula. Assim r é uma parametrização suave e C uma curva suave. A segunda parametrização tem derivada

$$\tilde{r}(t) = \begin{cases} (2, 2) & , t \in [0, \frac{1}{2}) \\ (0, 0) & , t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

a qual não é continua no ponto $t = \frac{1}{2}$ e ainda anula-se no intervalo $(\frac{1}{2}, 1]$. Assim $\tilde{r}$ não é suave.

Definição 17.2.4 (Curva orientada e parametrização). Uma **orientação** de uma curva C é uma escolha de em sentido de percurso. Uma **parametrização de uma curva orientada** é uma parametrização com este sentido de percurso.

17.2.1 Campo tangente e normal ao longo de uma curva

Definição 17.2.5 (Campo tangente). O **campo tangente a uma curva suave orientada** $C = \text{Im}(r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n)$ é o campo vetorial

$$T|_{r(t)} := \frac{1}{|\dot{r}(t)|} \dot{r}(t).$$

Enquanto o vetor velocidade $\dot{r}(t)$, mais precisamente seu comprimento, depende da parametrização escolhida para a curva C orientada, normalizando o comprimento ao valor 1 elimina essa dependência. Assim T é associado à curva suave orientada C , independente da parametrização.

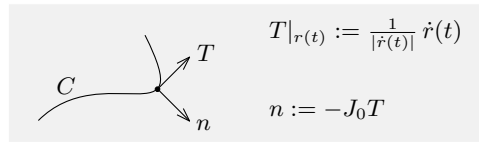


Figura 17.5: Campo tangente e normal a uma curva C no plano

Definição 17.2.6 (Campo normal a uma curva planar). O **campo normal a uma curva suave orientada** $C = \text{Im}(r: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2)$ no plano é o campo

$$n := -J_0 T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$$

dado por rotação (17.1.1) do campo tangente T pelo ângulo $-\frac{\pi}{2}$. Como rotações preservem comprimento, os vetores do campo normal tem comprimento 1.

17.2.2 Conexo por caminhos e simplesmente conexo

Definição 17.2.7 (Caminho). Um **caminho** é uma curva suave-por-partes.

Definição 17.2.8 (Conexo por caminho). Um subconjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de **conexo por caminhos** se para todos dois pontos $p, q \in D$ existe um caminho C contido em D ligando p e q .

Vamos introduzir o próximo termo só para subconjuntos *do plano*, ainda que existe para subconjuntos de $\mathbb{R}^n$.

Definição 17.2.9 (Simplesmente conexo). Um subconjunto D do plano é chamado de **simplesmente conexo** ou **1-conexo** se possui as duas propriedades

- D é conexo por caminhos e
- toda curva fechada simples $C \subset D$ abraça só pontos de D .

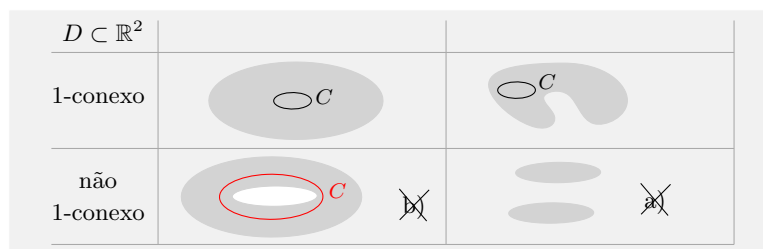


Figura 17.6: Subconjuntos D do plano $\mathbb{R}^2$ simplesmente conexas ex não