

Capítulo 3

Derivadas Parciais

Primeiro¹ repetimos para funções de uma variável o conceito de derivada $g'(x)$ num ponto $x \in \mathbb{R}$. Chama-se g de diferenciável se a derivada existe em cada um ponto do domínio. No caso de duas ou mais variáveis $x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ é bem natural simplesmente escolher uma variável x_i , considerar todas as outras variáveis como constantes, e aplicar a definição de uma variável para obter a chamada derivada parcial em respeito a x_i , símbolo $f_{x_i}(x)$ ou $f_i(x)$, caso existir.

Encontramos o **primeiro déficit** da generalização natural: Enquanto, no caso de uma variável, existência da derivada $g'(p)$ implica continuidade da função g no ponto p , ainda existência de todas as derivadas parciais $f_1(p), f_2(p), \dots, f_k(p)$ não implica continuidade de f no ponto p caso $k \geq 2$; veja Exercício 4.1.1. O primeiro déficit será consertado no Capítulo 4 introduzindo um conceito de diferenciabilidade mais forte, o que implica continuidade.

Um **segundo déficit** de fato já acontece no caso de uma variável e ocorre quando queremos descrever os valores de uma função diferenciável g perto de um ponto p usando como aproximação a tangente T_p ao gráfico de g .² Variação das tangentes T_x continuamente nos pontos x perto de p é equivalente a continuidade da função $x \mapsto g'(x)$ das inclinações; veja (contra-)Exemplo 3.1.1. Analogamente, no caso de $k \geq 2$ variáveis, existência das derivadas parciais $f_1(p), f_2(p), \dots, f_k(p)$ não é suficiente, precisamos continuidade delas para comportamento contínuo dos espaços tangentes o que é essencial para aplicações como aproximação linear. Neste caso digamos que f é de classe C^1 .

Interessantemente, existência e continuidade das derivadas parciais implica diferenciabilidade (assim continuidade), mas não vice versa; veja diagrama na introdução ao Capítulo 4.

¹Cap. 3 atualizado 20 Ago 2023

² A tangente T_p é a reta no plano \mathbb{R}^2 de inclinação $g'(p)$ passando o ponto $(p, g(p))$.

3.1 Derivada no caso de uma variável

Seja $g: \mathbb{R} \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de uma variável x definida num conjunto aberto. Chama-se g **diferenciável no ponto** $p \in U$ se o limite seguinte existir

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(p+h) - g(p)}{h}. \quad (3.1.1)$$

Neste caso chama-se o limite a **derivada** de g no ponto p , símbolo $g'(p) \in \mathbb{R}$.

Existência da derivada g' num ponto p implica continuidade da função nesse ponto. Suponha que $g'(p)$ existe. Então a função $r(h) := g(p+h) - g(p) - g'(p)h$ satisfaz $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$. Junto com linearidade do limite segue que

$$\lim_{h \rightarrow 0} g(p+h) = \lim_{h \rightarrow 0} (g(p) + g'(p)h + r(h)) = g(p) + \lim_{h \rightarrow 0} \underbrace{\frac{r(h)}{h}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{h}_{\text{limitado}} = g(p).$$

Exemplo 3.1.1 (Derivada existe, não é contínua). A função $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\sigma(x) := \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

admite derivada em todo ponto $x \in \mathbb{R}$ e a função derivada é

$$\sigma'(x) := \begin{cases} 2x \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos\frac{1}{x^2} & , x \neq 0, \\ 0 & , x = 0. \end{cases}$$

Verificamos que $\sigma'(0) = 0$:

$$\sigma'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma(0+h) - \sigma(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{1}{h^2}\right)}_{\text{limitado}} = 0.$$

A função derivada não é contínua na origem: A sequência $x_\ell := -1/\sqrt{2\pi\ell} < 0$ onde escolhemos $\ell \in \mathbb{N}$ converge para 0, quando $\ell \rightarrow \infty$, enquanto

$$\sigma'(x_\ell) = -2 \frac{1}{\sqrt{2\pi\ell}} \underbrace{\sin(-2\pi\ell)}_{=0} + 2\sqrt{2\pi\ell} \underbrace{\cos(-2\pi\ell)}_{=1} = -2\sqrt{2\pi\ell} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} \infty \neq \sigma'(0).$$

Assim as inclinações das tangentes T_{x_ℓ} ao gráfico de σ convergem para ∞ enquanto $x_\ell \rightarrow 0$ mas a tangente T_0 tem inclinação $\sigma'(0) = 0$ (é horizontal).

O problema com as tangentes no exemplo anterior é que a função derivada σ' não é contínua.

3.2 Definição de derivada parcial

Para simplicidade de notação vamos focar em duas variáveis, o caso de n variáveis sendo inteiramente análogo. Seja $f: \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas

variáveis x e y definida num aberto U . Dado um ponto $(a, b) \in U$, obtemos dois caminhos naturais em U , paralelo ao eixo- x o caminho $x \mapsto (x, b)$ e paralelo ao eixo- y o caminho $y \mapsto (a, y)$. Os valores de f ao longo dos caminhos são funções

$$g(x) := f(x, b), \quad G(y) := f(a, y).$$

Caso a função de uma variável g tem derivada no ponto a no sentido de Cálculo I, veja (3.1.1), ou seja caso o limite seguinte existir

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h},$$

então este limite, denotado de $g'(a)$, é chamada de derivada parcial de f em relação à primeira variável x no ponto (a, b) e denotada de $f_x(a, b) := g'(a)$. Analogamente $f_y(a, b) := G'(b)$ caso existir.

Função de uma variável: derivada = derivada parcial.

Definição 3.2.1 (Derivada parcial). Seja $f: \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis (x, y) num aberto U e seja $(a, b) \in U$.

a) Dizemos que f tem derivada parcial em relação à primeira variável x no ponto (a, b) se o limite existir

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} =: f_x(a, b).$$

Analogamente f tem derivada parcial em relação à segunda variável y se o seguinte limite existir

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a, b+h) - f(a, b)}{h} =: f_y(a, b).$$

Caso o primeiro limite exista, denominamo-lo de $f_x(a, b)$, chamado de **derivada parcial de f em respeito a x no ponto (a, b)** . Analogamente $f_y(a, b)$.

b) Se $f_x(a, b)$ existe em todos os pontos do domínio dizemos que **a derivada parcial de f em respeito a x existe**. Analogamente para y .³

Definição 3.2.2 (n variáveis). Seja $f: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ e $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$. Então a derivada parcial de f em respeito a x_i é, se existir, o limite seguinte

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x)}{h} \stackrel{\text{caso existir}}{=} f_{x_i}(x).$$

Comentário 3.2.3 (Notações alternativas). É praxe denotar as derivadas parciais com uma grande variedade de símbolos, por exemplo

$$f_{x_i}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad f_i, \quad D_{x_i} f, \quad D_i f, \quad \frac{\partial z}{\partial x_i} \quad \text{onde } z = f(x_1, \dots, x_k).$$

Dependente do contexto um símbolo pode ser mais pratico, mais legível, como outros.

³ Notações comuns são $f_x, \frac{\partial f}{\partial x}, D_x f, f_1, D_1 f$, e $\frac{\partial z}{\partial x}$ onde $z = f(x, y)$.

Exercício 3.2.4 (Cone). Dado $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, mostre que as derivadas parciais na origem $(0, 0)$ não existem.

Exercício 3.2.5. Seja $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, encontre $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.

SOLUÇÃO. Vamos mostrar que as derivadas parciais f_x e f_y existem, determinar fórmulas, e depois avaliar no ponto $(2, 1)$. Fixando y com um valor constante, a função $x \mapsto x^3 + x^2y^3 - 2y^2$ é um polinômio de uma variável e sabemos do Cálculo I que a derivada existe e é dada pela fórmula $3x^2 + 2xy^3$, analogamente $y \mapsto x^3 + x^2y^3 - 2y^2$ fixando x . Assim

$$f_x = 3x^2 + 2xy, \quad f_x(2, 1) = 16, \quad f_y = 3x^2y^2 - 4y, \quad f_y(2, 1) = 8.$$

Derivadas parciais definidas implícitas

Exemplo 3.2.6. A equação $x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz = 1$ define uma superfície $S \subset \mathbb{R}^3$ no sentido que a variável $z = f(x, y)$ é uma função de x e y .⁴ Determine $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

SOLUÇÃO. Para determinar $\frac{\partial z}{\partial x}$ consideramos $y \equiv b$ com um valor constante. Aplicando $\frac{\partial}{\partial x}$ para a equação obtemos $3x^2 + 0 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial x} + 6yz + 6xy \frac{\partial z}{\partial x} = 0$. Resolvendo para $\frac{\partial z}{\partial x}$ obtemos

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x^2 - 2yz}{z^2 + 2xy}$$

ao longo do subconjunto $V := \{z^2 \neq xy\}$ de S . Deixamos como um exercício mostrar que $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y^2 - 2xz}{z^2 + 2xy}$ ao longo V .

3.3 Interpretação Geométrica

Dado uma função contínua $f: \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ e um ponto $p = (a, b) \in U$. Como U é aberto, existe $\delta > 0$ tal que a bola aberta $B_\delta(p)$ de raio δ e centro p é contida em U . A equação $z = f(x, y)$ representa uma superfície em \mathbb{R}^3 , o gráfico $S = \text{gr}(f)$. Pelo ponto $P = (a, b, f(a, b))$ da superfície S passam duas curvas naturais C_1 e C_2 : os gráficos das funções $x \mapsto f(x, b)$ e $y \mapsto f(a, y)$ ambas definidas no intervalo $(-\delta, \delta)$.

Suponha que as derivadas parciais $f_x(a, b)$ e $f_y(a, b)$ existam. Neste caso as duas curvas tem as tangentes T_1 e T_2 no ponto P .

Curva C_1 e tangente $T_1(x) = P + (x - a)C_1'(a)$ são parametrizadas assim

$$C_1(x) = \begin{pmatrix} x \\ b \\ f(x, b) \end{pmatrix}, \quad T_1(x) = \begin{pmatrix} x \\ b \\ f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) \end{pmatrix}, \quad x \in (-\delta, \delta).$$

⁴ também poderia escolher $x = g(y, z)$ ou $y = h(x, z)$

Curva C_2 e tangente $T_2(y) = P + (y - b)C_2'(b)$ são parametrizadas assim

$$C_2(y) = \begin{pmatrix} a \\ y \\ f(a, y) \end{pmatrix}, \quad T_2(y) = \begin{pmatrix} a \\ y \\ f(a, b) + f_y(a, b)(y - b) \end{pmatrix}, \quad y \in (-\delta, \delta).$$

Observe para que as duas tangentes **não** fazem **saltos descontínuos** precisamos continuidade de f , de f_x , e de f_y perto de (a, b) . Isso lida ao termo C^1 no §3.4.

Exercício 3.3.1. Seja $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$, esboce o gráfico e as curvas C_1 e C_2 passando o ponto $P = (\frac{1}{2}, 1, \frac{7}{4})$ de $S = \text{gr}(f)$. Calcule $f_x(\frac{1}{2}, 1)$ e $f_y(\frac{1}{2}, 1)$ e interprete cada um como inclinação de uma curva no gráfico.

SOLUÇÃO. Calculamos $f_x(x, y) = -2x$, assim $f_x(\frac{1}{2}, 1) = -1$, e $f_y(x, y) = -4y$, assim $f_y(\frac{1}{2}, 1) = -4$. O gráfico é um parabolóide centrado em torno do eixo- z que abre para baixo começando na altura $f(0, 0) = 4$. O gráfico encontra o plano- xy na elipse $(\frac{x}{2})^2 + (\frac{y}{\sqrt{2}})^2 = 1$, o eixo- x em $x = \pm 2$, o eixo- y em $y = \pm\sqrt{2}$.

As curvas são $C_1(x) = (x, 1, 2 - x^2)$ e $C_2(y) = (\frac{7}{4} - 2y^2, y, 1)$. A inclinação da curva C_1 no ponto P é $f_x(\frac{1}{2}, 1) = -1$ e aquela de C_2 é $f_y(\frac{1}{2}, 1) = -4$.

3.4 Derivadas parciais de ordem superior

Definição 3.4.1. Seja $f: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Seja $k \in \mathbb{N}_0$.

$f \in C^0(U) :\Leftrightarrow f$ contínua em U .

$f \in C^1(U) :\Leftrightarrow f \in C^0(U)$ e todas as n derivadas parciais $f_{x_i}: U \rightarrow \mathbb{R}$ da **primeira ordem** existem e são contínuas.

$f \in C^2(U) :\Leftrightarrow f \in C^1(U)$ e todas as n^2 derivadas parciais $f_{x_i x_j} := (f_{x_i})_{x_j}: U \rightarrow \mathbb{R}$ da **segunda ordem** existem e são contínuas.

$f \in C^k(U) :\Leftrightarrow f \in C^{k-1}(U)$ e todas as n^k derivadas parciais da **k -ésima ordem** existem em U e são contínuas.

$f \in C^\infty(U) :\Leftrightarrow f \in C^k(U)$ para cada um $k \in \mathbb{N}_0$.

Chama-se os elementos de $C^1(U)$ **funções continuamente diferenciáveis** em U , e as de $C^k(U)$ funções k vezes continuamente diferenciáveis em U .

Por definição uma função f é de classe $C^k(U)$ se e somente se todas as derivadas parciais de f de todas as ordens de zero ate inclusive ordem k existem em U e são contínuas em U . É muito trabalho checar continuidade de $1 + n + n^2 + \dots + n^k$ funções. Na verdade é suficiente só verificar continuidade das n^k derivadas parciais de ordem k para saber que $f \in C^k(U)$; espere até Seção 4.2.3.

Exercício 3.4.2. Determine todas as derivadas parciais de todas as ordens da função $f(x, y) := x^2 + x^2 y^2 - 2y^2$. [Na 5a ordem todas anulam-se.]

Às vezes seria útil trocar a ordem da diferenciação parcial. O teorema seguinte trata disso.

Teorema 3.4.3 (Hermann Schwarz 1873). *Dado $f: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}$, então*

$$f_{x_j x_k}, f_{x_k x_j} \in C^0(U) \quad \Rightarrow \quad f_{x_j x_k} = f_{x_k x_j} \text{ em } U.$$

Observe que funções da classe $C^2(U)$ satisfazem a hipótese do teorema de Schwarz.

Corolário 3.4.4 (Critério para discontinuidade). *Se derivadas parciais de segunda ordem não comutam $f_{x_j x_k}(p) \neq f_{x_k x_j}(p)$ num ponto p , então eles não são ambas contínuas, conseqüentemente $f \notin C^2$.*

Exercício 3.4.5. Seja $f(x, y, z) = xyz + \frac{1}{x^4 y}$. Determine f_{xyz} no aberto $U := \{x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$.

SOLUÇÃO. Como a função f é racional em U , segundo Corolário 2.2.3, ela é contínua. O mesmo raciocínio aplica para as derivadas parciais da primeira, segunda, e terceira ordem. Assim podemos aplicar o teorema de Schwarz nos passos seguintes:

$$f_{xyz} := ((f_x)_y)_z = ((f_x)_z)_y = ((f_z)_x)_y.$$

Agora a calculaçaõ é fácil

$$f_z = xy, \quad (f_z)_x = y, \quad ((f_z)_x)_y = 1.$$

Faça a calculaçaõ na ordem original $((f_x)_y)_z$ para ver a diferença.

Exercício 3.4.6 ($f \notin C^2$ usando Schwarz). Prova que a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

não é de classe C^2 mostrando que $f_{yx}(0, 0) = 0$ e $f_{xy}(0, 0) = 1$.

DICA. Mostre que as derivadas parciais são dadas por

$$f_x(x, y) := \begin{cases} \frac{-x^2 y^3 + y^5}{(x^2 + y^2)^2} & , (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

e

$$f_y(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^4 + 3x^3 y^2}{(x^2 + y^2)^2} & , (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

Com estas fórmulas calcule $\frac{\partial}{\partial y} f_x(0, 0)$ e $\frac{\partial}{\partial x} f_y(0, 0)$ segundo Definição 3.2.1.

3.5 Equações diferenciais parciais (EDPs)

Definição 3.5.1 (Equação de Laplace). As soluções $u = f(x)$, $x \in U \subset \mathbb{R}^n$, da EDP seguinte

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

são chamadas de **funções harmônicas**.

Exercício 3.5.2. Mostre que a função $u(x, y) := e^x \sin(y)$ é harmônica.

Definição 3.5.3 (Equação da onda). Dado um parâmetro $a \in \mathbb{R}$. Seja $u = f(t, x)$ uma função das variáveis $(t, x) \in \mathbb{R}^2$. A EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

é chamada de **equação da onda**,

Exercício 3.5.4. Mostre que a função $u(t, x) := \sin(x - at)$ é uma solução da equação da onda. Esboce para $a = 1$ os gráficos das funções $u(0, x)$, $u(\frac{\pi}{4}, x)$, $u(\frac{\pi}{2}, x)$, x para ilustrar como a onda move no tempo t .