

# Capítulo 1

## Funções de Várias Variáveis

Tem grande diferença entre funções de uma variável e funções de duas variáveis, mas não entre duas e  $k > 2$  variáveis. Para não dificultar legibilidade, **usamos geralmente funções de duas variáveis na apresentação.**

### 1.1 O espaço $\mathbb{R}^n$

Dado  $n \in \mathbb{N}$ , seja  $\mathbb{R}^n := \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$  o conjunto de todas as listas ordenadas  $x = (x_1, \dots, x_n)$  de  $n$  membros números reais. A lista nula  $\mathcal{O} := (0, \dots, 0)$  é chamada de **origem**. Adiciona-se dois listas  $x + y$  membro-por-membro e multiplica-se uma lista  $x$  com um número real  $\alpha \in \mathbb{R}$  também membro-por-membro, em símbolos

$$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \quad \alpha x := (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n).$$

O conjunto  $\mathbb{R}^n$  é munido de duas funções, o **produto escalar** de duas listas

$$x \cdot y := x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \in \mathbb{R}$$

e a função **norma**  $|x| := \sqrt{x \cdot x} \in [0, \infty)$  representando a distância da origem.

#### 1.1.1 Subconjuntos

A **bola aberta** de raio  $r > 0$  em torno de um ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  é denotado

$$B_r(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid |y - x| < r\}.$$

Abreviamos  $B_r := B_r(\mathcal{O})$  a bola em torno da origem  $\mathcal{O} \in \mathbb{R}^n$ .

**Definição 1.1.1.** Dado um subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$ , definimos os subconjuntos:

- (i) O **complemento** de  $A$

$$A^C := \{b \in \mathbb{R}^n \mid b \notin A\}$$

(ii) O **interior** de  $A$

$$\mathring{A} := \{a \in A \mid \text{existe uma bola aberta } B_r(a) \text{ contida em } A\}.$$

(iii) A **fronteira** de  $A$

$$\dot{A} := \{b \in \mathbb{R}^n \mid \text{toda bola } B_r(b) \text{ contem elementos de } A \text{ e do complemento } A^c\}.$$

(iv) A **fechadura** de  $A$  é obtido através de adicionar a fronteira

$$\bar{A} := \{b \in \mathbb{R}^n \mid \text{toda bola } B_r(b) \text{ contem elementos de } A\}.$$

Chamamos um subconjunto  $A$  de **aberto** se  $A = \mathring{A}$ , de **fechado** se  $A = \bar{A}$ , de **limitado** se  $A$  é contido em alguma bola aberta, e de **compacto** se  $A$  é limitado e fechado.

Para obter o interior  $\mathring{A} = A \setminus \dot{A}$  só precisar subtrair a fronteira. Para obter a fechadura  $\bar{A} = A \cup \dot{A}$  só precisar adicionar a fronteira. Um subconjunto é aberto (fechado) se e somente se seu complemento é fechado (aberto).

### 1.1.2 Coordenadas cartesianas e polares no plano

Usando um sistema de **coordenadas cartesianas**  $OXY$ <sup>1</sup> identifica-se os pontos  $P$  de um plano  $\Pi$  com os elementos  $(x, y)$  do conjunto  $\mathbb{R}^2$  de todas as listas ordenadas de dois números reais. Dado um ponto  $P \neq O$ , obtemos

- a) a distancia  $r > 0$  entre  $P$  e a origem e
- b) um ângulo  $\theta \in [0, 2\pi)$  do eixo- $X$  para o segmento  $OP$ .

O par  $(r, \theta) \in (0, \infty) \times [0, 2\pi)$  obtido assim é chamado de **coordenadas polares** do ponto  $P$ . Usando as definições geométricas de seno e cosseno e o Teorema de Pitágoras obtemos que as relações entre os pares  $(x, y)$  e  $(r, \theta)$  descrevendo o mesmo ponto  $P$  do plano são assim<sup>2</sup>

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}. \quad (1.1.1)$$

## 1.2 Básicos úteis

**Definição 1.2.1** (Raíz). A raiz de um numero real  $x \geq 0$  é a solução não-negativa  $y \geq 0$  da equação  $y^2 = x$ .

Assim a raiz de  $x^2$  é o modulo de  $x$ , em símbolos

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} = |x|.$$

<sup>1</sup> Dado um plano  $\Pi$ , fixe um ponto e denomina-o de **origem**, símbolo  $O$ . Escolhe dois pontos  $X$  e  $Y$  diferente de  $O$  tal que os segmentos  $OX$  e  $OY$  são ortogonais, em símbolos  $OX \perp OY$ . Chama-se a reta orientada passando  $O$  e depois  $X$  o **eixo- $X$** ; análogo **eixo- $Y$** .

<sup>2</sup> a última relação vale se  $P$  não está no eixo- $Y$  ( $x \neq 0 \Leftrightarrow \theta$  não múltiplo ímpar de  $\frac{\pi}{2}$ )

**Definição 1.2.2** (Exponencial e logaritmo). O **número de Euler** (1707-1783) é definido pela soma, equivalentemente pelo limite, seguinte

$$e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.781 \dots$$

A função exponencial é definida por

$$e: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty), \quad r \mapsto e^r,$$

e a sua função inversa

$$\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \ln(x) = r \Leftrightarrow e^r = x,$$

é chamada de **logaritmo** (naturalis). Observe que  $\ln(1) = 0$  como  $e^0 = 1$ .

## 1.3 Funções

**Definição 1.3.1.** Uma **função de  $k$  variáveis** é uma regra, denotada

$$f: \mathbb{R}^k \supset D \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_k) \mapsto f(x_1, \dots, x_k),$$

que associa a cada lista ordenada  $x = (x_1, \dots, x_k)$  composta de números reais e elemento do subconjunto  $D \subset \mathbb{R}^n$ , um valor real, denotado  $f(x_1, \dots, x_k)$  e chamado de **imagem do elemento**  $(x_1, \dots, x_k) \in D$  sob  $f$ . O subconjunto  $D$  é chamado de **domínio** de  $f$ , símbolo  $D = \text{dom } f$ .

Usamos o símbolo  $U$  para domínios abertos.

O conjunto de todas as imagens de  $f$  é chamado de **imagem da função**  $f$ , em símbolos  $\text{im } f = \{f(x) \mid x \in D\}$ .

**Comentário 1.3.2.** Uma função de varias variáveis pode ser descrito

1. numericamente: tabela de valores;
2. algebricamente: fórmula, por exemplo  $f(x, y, z) = x^2 + y + \frac{1}{z}$ ;
3. visualmente no caso de duas variáveis:

- (a) gráfico  $\text{gr}(f) \subset D \times \mathbb{R}$ ;
- (b) curvas de nível  $f^{-1}(c) \subset D$ .

Se uma função é dada através de uma fórmula, o **domínio máximo** é o maior subconjunto de  $\mathbb{R}^k$  no qual a fórmula faz sentido. Por exemplo, o domínio máximo de  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$  é  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . A função  $\sqrt{x + y + z}$  só faz sentido quando  $x + y + z \geq 0$  e  $\ln(xy)$  só quando  $xy > 0$ .

**Exercício 1.3.3.** Qual domínio máximo e imagem de  $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ ?

SOLUÇÃO. O argumento da raiz deve ser  $\geq 0$ , equivalentemente  $x^2 + y^2 \leq 3^2$ , em coordenadas polares  $r \leq 3$ . Assim o domínio máximo é o disco fechado no plano- $xy$  de raio 3 e centro  $(0, 0)$ . Por definição o valor de uma raiz é  $\geq 0$  e de outro lado  $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2} \leq \sqrt{9} = 3$ . Todo número  $c \in [0, 3]$  é imagem: verifique que  $g(\sqrt{9 - c^2}, 0) = c$ .

**Exercício 1.3.4.** Determine domínio máximo  $D$  e  $f(3, 2)$  no caso

a)  $f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$  ;

b)  $f(x, y) = x \cdot \ln(y^2 - x)$  .

SOLUÇÃO. a) Obtemos  $f(3, 2) = \sqrt{6}/2$  e

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq -x - 1 \text{ e } x \neq 1\}$$

é o semi-espaço acima e igual da reta  $y = -x - 1$  menos a vertical passando eixo- $x$  no ponto 1.

b) Obtemos  $f(3, 2) = 3 \cdot \ln(1) = 0$ , veja Definição 1.2.2, e

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x < 0 \wedge y \in \mathbb{R}) \text{ ou } (x \geq 0 \wedge (y > \sqrt{x} \vee y < -\sqrt{x}))\}$$

### 1.3.1 Gráfico

**Definição 1.3.5.** Dado  $f: \mathbb{R}^2 \supset D \rightarrow \mathbb{R}$ , o subconjunto do espaço

$$\text{gr}(f) := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D \text{ e } z = f(x, y)\}$$

é chamado de **gráfico** da função.

A coordenada  $z = f(x, y)$  representa a altura do gráfico de  $f$  acima do plano- $xy$ , de fato embaixo no caso de um valor negativo.

**Exercício 1.3.6.** a) Visualize o gráfico de  $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$  usando um computador ou fazendo Exercício 1.3.9.

b) Verifique que o gráfico de  $h(x, y) = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$  é um cone.

**Exercício 1.3.7.** Esboce  $\text{gr}(f)$  para  $f(x, y) := 6 - 3x - 2y$ .

SOLUÇÃO. A equação  $z = f(x, y) = 6 - 3x - 2y$  representa um plano no  $\mathbb{R}^3$ . O plano passa o eixo- $z$  na altura  $z_0 = 6$ . O plano passa o eixo- $x$  num ponto da forma  $(x_0, 0, 0)$ , assim  $0 = 6 - 3x_0 - 2 \cdot 0$ , ou seja  $x_0 = 2$ . O plano passa o eixo- $y$  num ponto da forma  $(0, y_0, 0)$ , assim  $0 = 6 - 3 \cdot 0 - 2y_0$ , ou seja  $y_0 = 3$ . Consequentemente o plano é aquele que contém o triângulo  $\Delta$  cujos vértices são  $(2, 0, 0)$ ,  $(0, 3, 0)$ , e  $(6, 0, 0)$ .

### 1.3.2 Curvas de nível

As mapas para alpinistas mostram curvas de altura constante. A distância entre duas curvas vizinhas indica se uma área é mais plano (distância grande) ou mais inclinada (distância pequena).

**Definição 1.3.8.** A equação  $f(x, y) = c$  determina o subconjunto do domínio dos pontos de valor  $c$ , chamada de **curva de nível** e denominada com o símbolo

$$f^{-1}(c) := \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = c\}.$$

No caso de  $k \geq 3$  variáveis não fala-se de curva de nível, mas de hipersuperfície de nível (subconjunto do domínio  $D \subset \mathbb{R}^k$  de dimensão  $k - 1$ ).

Para quase todos  $c \in \mathbb{R}$  ou  $f^{-1}(c) = \emptyset$  é o conjunto vazio ou  $f^{-1}(c)$  é uma curva (dimensão 1). Para escolhas excepcionais  $f^{-1}(c)$  ou é um ponto (dimensão 0) ou de dimensão 2.

**Exercício 1.3.9.** Determine as curvas de nível para  $c = 0, 1, 2, 3$  no caso a)  $g(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$  e b)  $h(x, y) = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$ ; veja Exercício 1.3.6.