57

Do not remove

ANALYSE COMPLEXE. — *Itération des fonctions analytiques complexes*. Note (*) de **Dennis Sullivan,** présentée par Henri Cartan.

Nous trouvons une description simple pour la structure des orbites d'une application analytique complexe de la sphère de Riemann en elle-même en dehors de la fermeture de l'ensemble des points périodiques répulsifs (ensemble de Fatou-Julia). Ces résultats répondent à des questions de Fatou et Julia qui sont restées ouvertes depuis 50 ans. Le théorème 1 est l'analogue en dynamique du théorème de finitude d'Ahlfors (1965) dans la théorie Kleiniens.

COMPLEX ANALYSIS. — Iteration of Complex Analytic Functions.

We find a simple description of the structure of orbits of a complex analytic self-mapping of the Riemann sphere outside the closure of the repulsive periodic points (the Fatou-Julia set). The results answer questions of Fatou and Julia open for 50 years. Theorem 1 is the analogue in dynamics of the Ahlfors finiteness Theorem (1965) in the theory of Kleinian groups.

1. Introduction. — Si $R : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ est une application analytique complexe de la sphère de Riemann en elle-même, Fatou et Julia ont étudié une décomposition de $\overline{\mathbb{C}}$ en deux parties dont l'une est la fermeture de l'ensemble des points périodiques répulsifs $\underline{F}$ et l'autre est l'ensemble ouvert $D = \overline{\mathbb{C}} - \underline{F}$ des points où la famille R, $R \circ R$, $R \circ R \circ R, \ldots$, est équicontinue. La dynamique de R sur l'ensemble $\underline{F}$ est de nature « hyperbolique » en terminologie moderne. Par exemple l'orbite inverse de chaque point de $\underline{F}$ est dense dans $\underline{F}$. Souvent R est dilatant (expanding) sur $\underline{F}$ et les orbites permettent une description de la dynamique symbolique [1].

Nous allons maintenant discuter des orbites dans « le domaine d'équicontinuité » $D = \overline{\mathbb{C}} - \underline{F}$. Notons D_α les composantes connexes de D. On dit que k composantes $D_{\alpha_1} \cup \ldots \cup D_{\alpha_k}$ forment un cycle d'ordre k si $RD_{\alpha_1} = D_{\alpha_2}$, $RD_{\alpha_2} = D_{\alpha_3}, \ldots, RD_{\alpha_k} = D_{\alpha_1}$.

Notre description de la dynamique de R dans $D = \overline{\mathbb{C}} - \underline{F}$ est donnée par les théorèmes suivants :

Théorème 1. — *Chaque composante connexe* D_α *de* D *est asymptotiquement cyclique, c'est-à-dire qu'il y a des entiers* $n, k > 0$ *tels que* $R^{(n)} D_\alpha, \ldots, R^{(n+k)} D_\alpha$ *forment un cycle de domaines d'ordre k. Donc aucun domaine* D_α *n'est errant* (*un domaine* D_α *est errant si tous les* D_α, RD_α, $R \circ RD_\alpha, \ldots$, *sont disjoints*).

Théorème 2. — *Le nombre des cycles de domaines est fini, et il en existe deux sortes : ou bien* D *est un* domaine de rotations, *où* $R^{(k)}$ *est conjugué analytiquement à une rotation irrationnelle; ou bien* D *est un* domaine de Fatou *qui contient un point critique pour* R.

Remarque. — Les « domaines de rotations » sont aussi de deux sortes. On a des domaines de Siegel [2] qui sont des disques. On a aussi des domaines de Arnold-Herman [3] qui sont des anneaux. Dans les exemples connus l'existence de « domaines de rotations » dépend de théorèmes profonds qui luttent contre les « petits dénominateurs ».

Théorème 3. — *A chaque k-cycle de domaine* D *de type Fatou on peut associer un point périodique canonique p, d'ordre k dans la fermeture de* D. *Il y a deux cas : ou bien* P *est dans* D *et alors p est attractif, ou bien p est dans la frontière de* D *et alors p est indifférent* (*ni répulsif ni attractif*). *Dans les deux cas et pour chaque compact* K *de* D, *la suite* $R(K)$, $R \circ R(K)$, $R \circ R \circ R(K), \ldots$, *tend uniformément vers le cycle des points* $\{p, Rp, \ldots, R^{(k)}p\}$.

Corollaire 1. — *S'il n'y a aucun point périodique de* R *indifférent et s'il n'y a aucun point critique qui soit une limite de points périodiques répulsifs, alors il y a un entier* $N > 0$ *tel que* $|(R^N)'(z)| > 1$ *sur l'ensemble* $\underline{F}$ *de Fatou-Julia. Ainsi* R *est « expanding » sur l'ensemble* $\underline{F}$.

Remarque. — La condition d'être « expanding » sur l'ensemble de Fatou-Julia est équivalente au fait que la *structure dynamique* de R est *continue* dans les coefficients de R (ceci est strictement vrai dans un voisinage de l'ensemble F et strictement vrai partout à l'intérieur de C à la condition générique qu'il n'y ait aucun point critique de R qui se confonde avec un point périodique, etc.).

COROLLAIRE 2. — *Le point périodique indifférent associé à un cycle de domaines de Fatou a un multiplicateur de la forme $e^{i\theta}$, où θ est commensurable à 2π.*

Le corollaire 2 découle du théorème 3 et d'un résultat de Fatou [5]. Il y a d'autres corollaires qui concernent la suite de bifurcations de Feigen baum (communication verbale de Bob Brookes et Adrien Douady [7]).

2. LA SURFACE DE RIEMANN S. — Maintenant nous étudions les *grandes orbites* de R dans D. Une grande orbite est par définition une classe d'équivalence : $x \sim y$ s'il y a $n, m > 0$ tel que $R^n x = R^m y$. Pour ce qui est des domaines de rotation et toutes les images inverses D_{rot}, il n'y a rien à faire. Enlevons donc cet ensemble de D et obtenons $D_\omega = D - D_{rot}$.

Dans D_ω il y a premièrement un nombre fini de grandes orbites de points périodiques. Ceux-ci forment tous un sous-ensemble discret (par équicontinuité) de D_ω que nous pouvons aussi enlever de D_ω; nous obtenons ainsi un domaine E_ω invariant pour R et R^{-1}. Afin de simplifier l'énoncé, nous supposons qu'il n'y a aucun point critique qui soit aussi périodique.

THÉORÈME 4. — *Il y a une surface de Riemann* S *de type fini avec des points de ramification qui représente le quotient de* E_ω *par la relation d'équivalence donnée par les grandes orbites. La surface de Riemann* S *contient pour chaque cycle des domaines d'attraction d'un point périodique attractif un* tore *avec un point de ramification pour chaque point critique dans le cycle des domaines. La surface de Riemann* S *contient pour chaque cycle des domaines correspondants à un point périodique indifférent* (*sur la frontière*) *une sphère moins deux points avec aussi un point de ramification pour chaque point critique dans le cycle des domaines.*

Nous dirons qu'une application rationnelle R_1 est une déformation quasi conforme de R s'il y a un homéomorphisme quasi conforme Φ de $\overline{\mathbb{C}}$ tel que $R\Phi = \Phi R_1$.

THÉORÈME 5. — *Chaque structure conforme sur la surface de Riemann* S *est réalisée par une déformation quasi conforme* R_1 *de* R. *Ceci est valable aussi pour chaque structure conforme sur les anneaux des rotations.*

3. ESQUISSE DE DÉFORMATION. — Pour chaque structure conforme sur la surface de Riemann S (compatible avec le groupe de rotation des anneaux de rotations) on peut construire une structure conforme mesurable μ sur D invariante par R. Ceci est évident parce que S est le quotient d'une partie de D par la relation d'équivalence donnée par la règle $x \sim y$ si $R^n x = R^m y$. Sur la partie complémentaire on garde la structure conforme usuelle. Maintenant, en utilisant le théorème de Riemann mesurable, nous avons un homéomorphisme quasi-conforme $\Phi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ qui transforme la structure μ en la structure conforme usuelle. Ceci démontre le théorème 5.

Nous utilisons souvent cette idée également pour d'autres théorèmes. Pour le théorème 1 on raisonne par l'absurde : on suppose qu'il y a un domaine errant $D_\alpha \to RD_\alpha \to R^2 D_\alpha \to \ldots$ la limite inductive a deux possibilités : ou bien la limite est une surface de Riemann avec un groupe fondamental ayant un nombre infini de générateurs, ou bien la limite est une surface de Riemann avec un groupe fondamental ayant un nombre fini de générateurs, les flèches sont asymptotiquement injectives et la surface de Riemann a un bord idéal correspondant à une partie de l'ensemble de Fatou-Julia. Pour démontrer cela on utilise :

(i) Il y a un nombre fini de points critiques pour R.

(ii) L'union des sous-groupes discrets de $PSl(2, \mathrm{R})$ est discrète ou élémentaire.

(iii) Une analyse géométrique et dynamique qui élimine le cas d'un anneau qui roule un nombre infini de fois.

A présent, on utilise à nouveau les déformations quasi conformes pour construire, dans l'espace des applications rationnelles de degré d, un sous-espace de dimension infinie; d'où la contradiction. Ceci démontre le théorème 1.

Pour le théorème 3, on utilise le lemme de Schwarz-Pick par le fait qu'une application analytique complexe entre deux domaines (hyperboliques) est une isométrie ou distance strictement décroissante par rapport à la métrique non euclidienne de Poincaré. Alors ces arguments directs suffisent à démontrer le théorème 3.

Pour le théorème 4, il faut examiner la limite directe $\mathrm{D}_\alpha \to \mathrm{RD}_\alpha \to \mathrm{R}^2\,\mathrm{D}_\alpha \to \ldots$, où D_α fait partie d'un cycle de domaines. En utilisant le théorème 3, on démontre que chaque orbite est discrète en D_α (orbite inverse du point périodique canonique). Donc la limite directe est donnée par une union croissante de sous-groupes discrets dans $PSl(2, \mathrm{R})$. Pour cela il faut ajouter les points de ramification $m : \mathrm{D}_\alpha \to \{1, 2, 3, \ldots\}$ à D_α tels que $m(\mathrm{R}(x)) =$ (degré local $\mathrm{R})(x).m(x)$. Sur la limite directe, R devient une isométrie hyperbolique. On peut former le quotient à l'aide de R et démontrer ainsi le théorème 4.

S'il n'y a aucun point critique dans un cycle de domaines qui n'est pas un domaine de rotation, une partie du quotient S est en même temps hyperbolique de type fini et homéomorphe à un tore ou une sphère moins deux points. Cette impossibilité devient le théorème 2.

(*) Remise le 11 janvier 1982.

[1] John GUCKENHEIMER, *Itération de fonctions rationnelles*, A.M.S., Volume sur l'Analyse Globale, 1968.

[2] C. L. SIEGEL, *Sur l'itération des fonctions analytiques* (*Ann. Math.*, 1942. Comme exemple, on prend $z \to \lambda z + z^2$, où λ satisfait à la condition diophantienne de Siegel.

[3] M. R. HERMAN, *Publications Mathématiques I.H.E.S.*, n° 49, et V. I. ARNOLD, *Ivestijia Akad. Nauk.*, série Math., 25, 1, 1961, p. 21-86; *Translations Amer. Math. Soc.*, 2nd series, 46, p. 213-284. Comme exemple, on prend $z \to e^{i\theta} z.(z-a/1-\bar{a}z)(z-b/1-\bar{b}z)$, où a et b sont petits et θ est choisi de manière que le difféomorphisme induit sur le cercle soit réel-analytiquement conjugué à une rotation (d'après le théorème d'Arnold). La conjugaison est bien définie sur un voisinage du cercle et on obtient un anneau équicontinu maximal (exemple de Michael R. Herman).

[4] P. SAD, *Iteration of Rational Functions*, preprint, I.M.P.A., Rio de Janeiro, Brazil.

[5] P. FATOU, *Bull. Soc. math., Fr.*, 47, 1919, p. 161-271; 48, 1920, p. 33-94 et p. 208-314. *Voir* p. 242.

[6] G. JULIA, *J. Math. pures et appliquées*, série 8, 1, 1918, p. 4-245.

[7] A. DOUADY et J. HUBBARD, *Comptes rendus*, 294, série I, 1982, p. 123.

* *Institut des Hautes Études scientifiques*, 91440 *Bures-sur-Yvette*.