DO NOT REMOVE

TOPOLOGIE. — *Fibrés vectoriels complexes à groupe structural discret,* Note (*) de MM. **Pierre Deligne** et **Dennis Sullivan**, transmise par M. Jean-Pierre Serre.

Tout fibré vectoriel complexe dont le groupe structural peut être réduit à un groupe discret, et dont la base est un polyèdre compact, devient trivial sur un revêtement fini de la base.

THÉORÈME. — *Soient* V *un système local complexe de dimension finie* n *sur un polyèdre compact* X, *et* $\mathcal{V}$ *le fibré vectoriel complexe correspondant. Il existe un revêtement fini surjectif* $\pi : \tilde{X} \to X$ *de* X *tel que l'image réciproque de* $\mathcal{V}$ *sur* $\tilde{X}$ *soit triviale* (*en tant que fibré vectoriel*).

On peut supposer X connexe, muni d'un point base p. Une fois choisie une base de V_p, le système local V correspond à un homomorphisme $\rho : \pi_1(X, p) \to GL(n, \mathbf{C})$. Le groupe $\pi_1(X, p)$ étant de type fini, il existe un sous-anneau A de $\mathbf{C}$, de type fini sur $\mathbf{Z}$, tel que ρ se factorise à travers $GL(n, A)$ [prendre une famille génératrice finie (g_i) de $\pi_1(X, p)$, et A engendré par les coefficients des g_i]. Soient m_1 et m_2 deux idéaux maximaux de A, tels que les corps finis A/m_1 et A/m_2 soient de caractéristiques distinctes. Nous prendrons pour $\tilde{X}$ le revêtement de X correspondant au sous-groupe de $\pi_1(X, p)$ formé des g tels que $\rho(g) \equiv 1$ (mod m_1 et mod m_2). Son indice divise l'ordre de $GL(n, A/m_1) \times GL(n, A/m_2)$. Montrer que $\tilde{X}$ convient revient à prouver la

PROPOSITION. — *Supposons que* V *soit défini par* $\rho : \pi_1(X, p) \to GL(n, A)$, *où* A *est un sous-anneau de* $\mathbf{C}$ *de type fini sur* $\mathbf{Z}$. *S'il existe deux idéaux maximaux* m_1 *et* m_2 *de* A, *de caractéristiques résiduelles distinctes, tels que* ρ *soit trivial* mod m_1 *et* m_2, *alors* $\mathcal{V}$ *est trivial.*

Soient d et N deux entiers, avec $\dim(X) \leqq d$ et N assez grand ($N \geqq d/2$). La grassmannienne $G_{n,N}$ des n-plans de $\mathbf{C}^{n+N}$ est une assez bonne approximation de $BGL(n, \mathbf{C})$ pour que $[X, G_{n,N}] = [X, BGL(n, \mathbf{C})]$ et $\mathcal{V}$ correspond à une classe d'homotopie d'applications $v : X \to G_{n,N}$. Soit X′ l'espace fibré sur X dont la fibre en $x \in X$ est l'espace ((2 N+1)-connexe, donc $(d+1)$-connexe) des injections linéaires de $\mathcal{V}_x$ dans $\mathbf{C}^{n+N}$, et v' l'application $\iota \mapsto$ image de ι, de X′ dans $G_{n,N}$. La projection $\pi : X' \to X$ admet une section s, unique à homotopie près, et $v = v' s$.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "v'"] \arrow[d, shift right, "\pi"'] & & G_{n,N} \\ X \arrow[u, shift right, "s"'] \arrow[urr, "v"'] & & \end{tikzcd}$$

Les conditions suivantes sont équivalentes : (*a*) $\mathcal{V}$ est trivial; (*b*) $v \sim 0$ (i. e. v est homotope à une application constante); (*c*) v' est ~ 0 sur le d-squelette de X′, i. e. pour tout $w : K \to X'$ avec $\dim K \leqq d$ (ou seulement pour K le d-squelette d'une triangulation de X′) on a $v' w \sim 0$; (*d*) l'application composée $v'' : X' \xrightarrow{v'} G_{n,N} \to \mathrm{cosq}_d(G_{n,N})$, où $\operatorname{cosq}_d(G_{n,N})$ est le d-ième étage de la décomposition de Postnikov de $G_{n,N}$ (mêmes π_i pour $i \leqq d$), est ~ 0. L'équivalence de (c) et (d) est un fait général, pour toute application v'; celle de (b) et (c) résulte de ce que, pour tout complexe K de dimension $\leqq d$, on a $[K, X'] \xrightarrow{\sim} [K, X]$.

L'espace $G_{n,N}$ étant simplement connexe, il résulte du principe de Hasse pour les applications [(4), th. 3.1] que $v'' \sim 0$ si et seulement si pour tout l son complété l-adique $v''_l : X'_{l^\wedge} \to \operatorname{cosq}_d(G_{n,N})_{l^\wedge} = \operatorname{cosq}_d((G_{n,N})_{l^\wedge})$ est homotope à zéro. La proposition résulte du

Lemme. — *Supposons* V *défini par* $\rho : \pi_1(X, p) \to GL(n, A)$, *où* A *est un sous-anneau de* **C** *de type fini sur* **Z**. *S'il existe un idéal maximal* m *de* A, *de caractéristique résiduelle distincte du nombre premier* l, *tel que* ρ *soit trivial* mod m, *alors* $v''_l \sim 0$.

On peut supposer que X est une réunion de facettes du simplexe $\Delta \subset \mathbf{R}^M$ tendu par les vecteurs de base. Pour chaque facette σ de Δ, soit $\sigma_{\mathbf{R}}$ le sous-espace affine tendu par σ, et $\sigma_{\mathbf{Z}}$ la sous-variété affine de l'espace affine $A^M_{\mathbf{Z}}$ sur **Z** dont $\sigma_{\mathbf{R}}$ est l'ensemble des points réels. Soit $X_{\mathbf{Z}}$ la réunion des $\sigma_{\mathbf{Z}}$ pour $\sigma \subset X$. C'est un schéma sur **Z**; pour tout anneau B, on note X_B le schéma sur B qui s'en déduit par extension des scalaires. L'inclusion de X dans $X_{\mathbf{Z}}(\mathbf{C}) \subset \mathbf{C}^M$ est une équivalence d'homotopie et, pour $l \neq p$, la cohomologie mod l de X [ou de $X_{\mathbf{Z}}(\mathbf{C})$] coïncide avec la cohomologie mod l (étale) de $X_{\overline{\mathbf{F}}_p}$. Cela résulte par Mayer-Vietoris du même fait pour l'espace affine (SGA 4, XV 2.2).

La représentation ρ fournit un fibré vectoriel $\mathscr{V}_A$ sur X_A. Le fibré $\mathscr{V}$ s'en déduit par extension des scalaires à **C**, et sa réduction mod m est triviale. La définition de X' a un sens purement algébrique, d'où un diagramme de schémas sur A :

$$X_A \xleftarrow{\pi_A} X'_A \xrightarrow{v'_A} (G_{n,N})_A. \tag{1}$$

Notons avec un indice 1 les objets analogues pour la représentation unité de $\pi_1(X, p)$ dans $GL(n, A)$. Les morphismes de schémas v'_A et v'_{1A} deviennent isomorphes après réduction mod m. Si k est une clôture algébrique de A/m, et B l'hensélisé strict de A en k, on a une chaîne d'isomorphismes entre morphismes de types d'homotopie complétés en l :

$$v'_l \sim (v'_{\mathbf{C}})_l \sim (v'_B)_l \sim (v'_k)_l \sim (v'_{1k})_l \sim (v'_{1B})_l \sim (v'_{1\mathbf{C}})_l \sim v'_{1l}\,; \tag{2}$$

d'où

$$v''_l \sim v''_{1l} \sim 0.$$

Dans la chaîne (2), les termes extrêmes sont des complétés de morphismes entre espaces ordinaires [(4), § 3], les autres des complétés de morphismes, entre types d'homotopie étale [(4), § 3, (1)].

Remarques. — (a) Si N est grand, et que $2p \geqq d$, l'application induite par les classes de Chern : $\operatorname{cosq}_d(G_{n,N}) \to \operatorname{cosq}_d\left(\prod_1^n K(\mathbf{Z}, 2i)\right)$ est un isomorphisme après localisation en p. On peut déduire de ce fait que l'hypothèse de la proposition peut être remplacée par : « ρ est trivial mod m, pour un idéal maximal m de caractéristique résiduelle p telle que $H_*(X)$ n'ait pas de p-torsion et que $2p \geqq \dim(X)$ ».

(b) Dans (a) et la proposition, on peut remplacer « ρ trivial mod m » par « mod m, ρ d'image dans le radical unipotent d'un sous-groupe de Borel ».

(*c*) Le théorème renforce le théorème de géométrie différentielle ([3]) selon lequel les classes de Chern réelles d'un fibré vectoriel à connexion intégrable sont triviales. Sa démonstration rappelle la démonstration algébrique de ce fait donnée par Grothendieck ([2]).

(*d*) Le problème a été suggéré à l'un de nous par ([5]) : le théorème étend le domaine d'applications de calculs qui y sont faits (th. C.2 et th. D.2).

(*e*) L'analogue du théorème pour les fibrés vectoriels réels à groupe structural discret dans SL (n, **R**) est faux : la classe d'Euler réelle peut être non nulle, déjà pour $n = 2$ et X une surface de Riemann.

PROBLÈMES. — L'analogue réel du théorème vaut-il pour les fibrés dont le groupe structural peut être réduit à SL (n, **Z**) [*cf.* ([6])], ou pour n impair ? La classe d'Euler réelle est-elle la seule obstruction ?

(*f*) La technique qui consiste à réduire modulo deux idéaux maximaux, et un problème d'Atiyah quant aux fibrés vectoriels, sont décrits dans l'introduction de ([1]). L'application classifiante algébrique [le diagramme (1)] et les méthodes de ([5]) utilisées ci-dessus permettent de résoudre le problème d'Atiyah.

(*) Séance du 10 novembre 1975.

([1]) M. ARTIN et B. MAZUR, *Etale Homotopy* (*Lecture Notes in Math.*, 100, Springer-Verlag, 1969).

([2]) A. GROTHENDIECK, *Classes de Chern et représentations linéaires des groupes discrets*, dans *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, North Holland, 1968.

([3]) J. MILNOR, *Comm. Math. Helv.*, 32, 1958, p. 215-223.

([4]) D. SULLIVAN, *Ann. of Math.*, 100, 1974, p. 1-89.

([5]) D. SULLIVAN, *Infinitesimal Computations in Topology* (à paraître dans *Ann. of Math.*).

([6]) D. SULLIVAN, *Comptes rendus*, 281, série A, 1975, p. 17.

Institut des Hautes Études Scientifiques
Le Bois-Marie,
91440 *Bures-sur-Yvette*.