C. R. Acad. Sc. Paris, t. 281 (7 juillet 1975) Série A — 17

(26)

Do not REMOVE

TOPOLOGIE. — *La classe d'Euler réelle d'un fibré vectoriel à groupe structural* $\mathbf{SL}_n(\mathbf{Z})$ *est nulle.* Note (*) de M. **Dennis Sullivan**, transmise par M. Jean-Pierre Serre.

Soient K un complexe simplicial fini et $\gamma$ un fibré vectoriel réel sur K de rang $n$ pair $\geq 2$. Soit $e(\gamma) \in \mathrm{H}^n(\mathrm{K}, \mathbf{Z})$ la classe d'Euler de $\gamma$, et soit $e_{\mathbf{R}}(\gamma)$ son image dans $\mathrm{H}^n(\mathrm{K}, \mathbf{R})$. Supposons que le groupe structural de $\gamma$ puisse être réduit au groupe discret $\mathbf{SL}_n(\mathbf{Z})$. Nous montrons que l'on a alors $e_{\mathbf{R}}(\gamma) = 0$, i. e. que $e(\gamma)$ est une classe de torsion.

Démonstration de la nullité de $e_{\mathbf{R}}(\gamma)$. — D'après un argument standard (1), on peut supposer que K est une variété orientée compacte (sans bord). Par hypothèse, le fibré vectoriel $\gamma$ contient un sous-fibré $\gamma_{\mathbf{Z}}$ dont les fibres sont des réseaux isomorphes à $\mathbf{Z}^n$. Notons E le fibré quotient $\gamma/\gamma_{\mathbf{Z}}$; c'est un fibré en groupes, de base K, dont les fibres sont des tores $\mathbf{T}^n$ de dimension $n$. Considérons :

*a.* La sous-variété $\mathrm{S}_1$ (resp. $\mathrm{S}_2$) de E formée par la section O du fibré en groupes E (resp. par les points de E d'ordre égal à 2);

*b.* Le revêtement $d : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ donné par la multiplication par 2 dans chaque fibre.

Si l'on note $[\mathrm{S}_1]$ et $[\mathrm{S}_2]$ les classes d'homologie de $\mathrm{S}_1$ et $\mathrm{S}_2$ dans $\mathrm{H}_i(\mathrm{E}, \mathbf{R})$, $i$ égale de dimension K, on a

$$d([\mathrm{S}_1]) = [\mathrm{S}_1] \qquad \text{et} \qquad d([\mathrm{S}_2]) = (2^n - 1)[\mathrm{S}_1].$$

Comme l'application $d$ est un revêtement, elle opère surjectivement (donc bijectivement pour des raisons de dimension) sur $\mathrm{H}_i(\mathrm{E}, \mathbf{R})$, ce qui montre que $[\mathrm{S}_2] = (2_n - 1)[\mathrm{S}_1]$. Comme $\mathrm{S}_1 \cap \mathrm{S}_2 = \varnothing$, on en déduit que la self-intersection $[\mathrm{S}_1].[\mathrm{S}_1]$ est égale à O; la nullité de $e_{\mathbf{R}}(\gamma)$ résulte immédiatement de là compte tenu de ce que E se rétracte sur $\mathrm{S}_1$ et que le fibré normal à $\mathrm{S}_1$ dans E est isomorphe à $\gamma$.

*Remarques.* — 1° Plus généralement, la sous-variété $\mathrm{S}_k$ de E formée des points d'ordre donnée $k \geqq 2$ dans chaque fibre définit un cycle $[\mathrm{S}_k]$ égal à un certain multiple non nul de $[\mathrm{S}_1]$. On peut définir le *courant* $\mathrm{S}_\infty$ limite des $\mathrm{S}_k$ (convenablement normalisés); ce courant est représenté par une forme différentielle fermée $\omega$ de degré $n$ telle que $\omega \wedge \omega = 0$ induisant sur chaque fibre de E une mesure de Haar de masse 1 (2).

2° La question de la nullité de $e_{\mathbf{R}}(\gamma)$ avait été posée par Milnor, et discutée à la conférence de Saint-Louis sur les feuilletages (1975). Milnor a un exemple de fibré vectoriel de rang 2, à groupe structural $\mathbf{SL}_n(\mathbf{Z}[1/2])$ tel que $e_{\mathbf{R}}(\gamma) \neq 0$ (la base K étant une surface de Riemann) [*voir* (3)].

3° Soit $\mathrm{X}_n$ l'espace classifiant $\mathrm{K}(\mathbf{SL}_n(\mathbf{Z}), 1)$ du groupe discret $\mathbf{SL}_n(\mathbf{Z})$, et soit $e_n \in \mathrm{H}^n(\mathrm{X}_n, \mathbf{Z})$ la classe d'Euler du fibré universel sur $\mathrm{X}_n$. D'après Raghunathan (4), on peut choisir $\mathrm{X}_n$ de telle sorte que ses squelettes soient des complexes finis. Ils résulte alors de ce qui a été démontré plus haut que la classe $e_n$ est une *classe de torsion*. Utilisant la remarque 1° ci-dessus, on peut même prouver que $a_n . e_n = 0$, où $a_n$ désigne le pgcd des entiers $k^{\mathrm{N}}(k^n - 1)$, $k = 2, 3, \ldots,$ N arbitrairement grand (5).

(*) Séance du 12 mai 1975.

(1) On sait en effet que tout complexe simplicial fini est un rétracte d'une variété compacte orientable.

(2) Ma démonstration originale de la nullité de $e_{\mathbf{R}}(\gamma)$ utilisait les propriétés de $\omega$. La version simplifiée donnée ci-dessus m'a été suggérée par des conversations avec Ronnie Lee, Jean-Pierre Setre et Pierre Deligne.

(3) *Cf.* J. Milnor, *Comm. Math. Helv.*, 32, 1958, p. 215-223.

(4) *Cf. M.* S. Raghunathan, *Invent. Math.*, 4, 1968, p. 318-335 ainsi que A. Borel et J.-P. Serre, *Comm. Math. Helv.*, 48, 1973, p. 436-491.

(5) L'entier $a_n$ est le dénominateur de $b_n/2n$, où $b_n$ désigne le $n$-ième nombre de Bernoulli. Son rôle en Topologie est bien connu, *cf.* par exemple J. F. Adams, *Topology*, 3, 1965, p. 137-171.

*I. H. E. S., le Bois-Marie,*
91440 *Bures-sur-Yvette.*