

Álgebra Linear

MA327

Lista 1e – Matriz de uma transformação linear

Agora é muito útil escrever uma base ordenada $\mathcal{U}$ na forma de uma lista ordenada $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Seja $A : E \rightarrow F$ uma transformação linear entre espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$, por exemplo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Seja $I_E : E \rightarrow E, v \mapsto v$, o operador identidade em E e I_F o em F . Sejam $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ e $\tilde{\mathcal{U}}$ bases ordenadas de E e $\mathcal{V} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ e $\tilde{\mathcal{V}}$ bases ordenadas de F . No seguinte vamos explicar que temos um diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\mathbf{a} := [A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}}} & \mathbb{K}^m & & \\
 \downarrow \mathbf{p} := [I_E]_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}} \simeq & \searrow \mathcal{U} & \swarrow \mathcal{V} & \searrow \mathbf{q} := [I_F]_{\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{V}}} & \\
 & E & \xrightarrow{A} & F & \\
 \uparrow \tilde{\mathcal{U}} & \nwarrow & \nwarrow \tilde{\mathcal{V}} & \uparrow & \\
 \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\tilde{\mathbf{a}} := [A]_{\tilde{\mathcal{U}}, \tilde{\mathcal{V}}}} & \mathbb{K}^m & &
 \end{array} \tag{1}$$

Usamos **os mesmos símbolos** para as bases e para os isomorfismos determinados pelas. Mais precisamente, usamos a notação $\mathcal{U} : \mathbb{K}^n \rightarrow E, x \mapsto \mathcal{U}x$, para a transformação linear definida com ajuda da base $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ assim

$$\mathcal{U}x := (\xi_1, \dots, \xi_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n \in E.$$

Obviamente a aplicação $\mathcal{U} : \mathbb{K}^n \rightarrow E$ é linear. É injetivo como os membros da base $\mathcal{U}$ são LI em E e sobrejetivo como eles geram E . Portanto $\mathcal{U}$ é um isomorfismo,[†] símbolo $\simeq$. No caso $E = \mathbb{K}^n$ a base canônica determina o operador identidade: $\mathcal{E} = I_{\mathbb{K}^n} \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$.

Note que, dado $v \in E$, então a lista $\mathcal{U}^{-1}v \in \mathbb{K}^n$ é o *vetor coordenada de v* , notação $[v]_{\mathcal{U}}$.[‡] Um isomorfismo $E \rightarrow \mathbb{K}^n$ é chamado um *sistema de coordenadas em E* .

*Comutativo significa que caso entre duas entradas no diagrama tem dois caminhos de flechas, então não importa o qual usamos. Note que a flecha de um isomorfismo $\simeq$ também existe na direção reversa (no diagrama só mostramos uma flecha para simplicidade).

[†]a composição BA de dois isomorfismos é um isomorfismo e sua inversa é $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$

[‡]Dado uma base $\mathcal{U}$ de E todo elemento $v \in E$ pode ser escrita como combinação linear única dos membros de $\mathcal{U}$. A lista dos coeficientes escalares, notação $[v]_{\mathcal{U}} \in \mathbb{K}^n$, chama-se o *vetor coordenada de v* .

Matriz de uma transformação linear

Como $\mathcal{V} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ é uma base de F podemos representar o elemento $A\xi_j \in F$ como combinação linear (única)

$$A\xi_j = \eta_1 a_{1j} + \dots + \eta_m a_{mj} \quad j = 1, \dots, n$$

onde os escalares $a_{ij} \in \mathbb{K}$ são únicos. Chama-se a matriz $m \times n$ com entradas a_{ij} , denotado pelo símbolo

$$[A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} := \mathbf{a} = [a_{ij}] \quad (2)$$

a matriz de A em respeito às bases $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$. Pode-se mostrar que a matriz

$$[A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} = \mathcal{V}^{-1} A \mathcal{U}$$

é uma composição de três transformações lineares onde $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}^{-1}$ são isomorfismos.

No caso $E = F$ e $\mathcal{U} = \mathcal{V}$ abreviamos $[A]_{\mathcal{U}} := [A]_{\mathcal{U}, \mathcal{U}}$. No caso $E = F = \mathbb{K}^n$ e $\mathcal{U} = \mathcal{V} = \mathcal{E}$ abreviamos $[A] := [A]_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}$.

Matriz de passagem

A matriz $\mathbf{p} := [I_E]_{\mathcal{U}, \tilde{\mathcal{U}}}$ do operador identidade I_E em E , por definição (2), satisfaz

$$\xi_j = I_E \xi_j = \tilde{\xi}_1 p_{1j} + \dots + \tilde{\xi}_n p_{nj} \quad j = 1, \dots, n. \quad (3)$$

Nas outras palavras ela exprime os elementos da base velha $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ de E como combinação linear dos elementos da base nova $\tilde{\mathcal{U}} = (\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n)$ de E . Por isso $\mathbf{p}$ é chamado de *matriz de passagem de $\mathcal{U}$ para $\tilde{\mathcal{U}}$* . A matriz de passagem participa do diagrama comutativo (1) como

$$\tilde{\mathcal{U}} \mathbf{p} x = \left(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n \right) \begin{bmatrix} \sum_k p_{1k} x_k \\ \vdots \\ \sum_k p_{nk} x_k \end{bmatrix} = \sum_{\ell} \tilde{\xi}_{\ell} \sum_k p_{\ell k} x_k = \sum_k \underbrace{\left(\sum_{\ell} \tilde{\xi}_{\ell} p_{\ell k} \right)}_{\stackrel{(3)}{=} \xi_k} x_k = \mathcal{U} x$$

para todo $x \in \mathbb{K}^n$. Isso prova que $\mathbf{p} = \tilde{\mathcal{U}}^{-1} \mathcal{U}$. Então $\mathbf{p}$ é um isomorfismo porque $\mathcal{U}$ e $\tilde{\mathcal{U}}$ são. Consequentemente a inversa de $\mathbf{p}$ é a composição

$$\mathbf{p}^{-1} = \mathcal{U}^{-1} \tilde{\mathcal{U}} = [I_E]_{\tilde{\mathcal{U}}, \mathcal{U}}.$$

Mudança das bases

Como o diagrama (1) é comutativo recebemos a relação

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{q} \mathbf{a} \mathbf{p}^{-1}$$

entre as matrizes de A em respeito às bases velhas e novas. No caso $F = E$ munido das bases $\mathcal{V} = \mathcal{U}$ e $\tilde{\mathcal{V}} = \tilde{\mathcal{U}}$ recebemos $[A]_{\tilde{\mathcal{U}}} = \mathbf{p} [A]_{\mathcal{U}} \mathbf{p}^{-1}$.

Caso especial onde $E = F = \mathbb{K}^n$ com a base canônica $\mathcal{E}$ e uma base $\mathcal{U}$

Considere o caso de um operador linear $A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ onde $\mathbb{K}^n$ é munido originalmente da base canônica $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ e depois de uma base nova $\mathcal{U}$. Neste caso o diagrama (1) torna-se no diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\mathbf{a} := [A]} & \mathbb{K}^n & & \\
 \downarrow \mathbf{p} := [I_{\mathbb{K}^n}]_{\mathcal{E}, \mathcal{U}} & \searrow \mathcal{E} = I_{\mathbb{K}^n} & \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^n & \swarrow \mathcal{E} = I_{\mathbb{K}^n} \\
 & & \mathbb{K}^n & & \mathbb{K}^n \\
 & \nearrow \mathcal{U} & & & \nwarrow \mathcal{U} \\
 \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\tilde{\mathbf{a}} := [A]_{\mathcal{U}}} & \mathbb{K}^n & & \\
 & & \downarrow \mathbf{p} & &
 \end{array} \tag{4}$$

o qual disponibiliza a relação $[A]_{\mathcal{U}} = \mathbf{p} [A] \mathbf{p}^{-1}$ entre as matrizes de A quando trocar a base canônica por qualquer outra base.

Definição 1. Duas matrizes quadradas $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são *semelhantes* se, e somente se, existe uma matriz invertível $\mathbf{p}$ tal que $\mathbf{b} = \mathbf{p}^{-1} \mathbf{a} \mathbf{p}$

Definição 2. O *posto* de uma transformação linear é a dimensão de sua imagem:

$$\text{posto}(A) := \dim \text{Im } A.$$

O posto de uma matriz $\mathbf{a} \in M(m \times n; \mathbb{K})$ é definido, porque $\mathbf{a}$ pode ser interpretado como transformação linear $\mathbf{a} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$.

Definição 3. O *traço* de uma matriz quadrada $\mathbf{a} = [a_{ij}] \in M(n \times n; \mathbb{K})$ é a soma dos elementos da sua diagonal:

$$\text{tr } \mathbf{a} := a_{11} + \dots + a_{nn} \in \mathbb{K}.$$

Exercícios em cinza são menos fáceis e para alunos de 9-10 pontos.

Exercícios.

a) Mostre que se $\mathbf{a}$ e $\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{p}^{-1}\mathbf{a}\mathbf{p}$ são matrizes $n \times n$ semelhantes, então existe $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathbf{a}$ e $\tilde{\mathbf{a}}$ são matrizes de A relativamente a duas bases de $\mathbb{R}^n$.

b) Qual é a matriz[§] $[A]$ do operador $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ determinado por

$$A(2, 3) = (2, 3) \quad \text{e} \quad A(-3, 2) = (0, 0) ?$$

c) Dado $u = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$, determine a matriz $[A]$ do operador[¶]

$$A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad v \mapsto v \times u.$$

Descreva geometricamente o núcleo desse operador e obtenha a equação da sua imagem.

d) Considere as bases $\mathcal{U} = (\xi, \eta)$ e $\tilde{\mathcal{U}} = (\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ de $\mathbb{R}^2$ onde

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\xi} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\eta} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Seja $v = (1, 1) \in \mathbb{R}^2$. Determine os vetores coordenadas $[v]_{\mathcal{U}}$ e $[v]_{\tilde{\mathcal{U}}}$.

e) Seja $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$. Dados $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$e_j = \xi_1 p_{1j} + \xi_2 p_{2j} + \dots + \xi_n p_{nj}, \quad p_{ij} \in \mathbb{R}, \quad j = 1, \dots, n$$

mostre que

i) a lista ordenada $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ é uma base de $\mathbb{R}^n$.

ii) a matriz^{||} $\mathbf{p} = [p_{ij}]$ é a inversa da matriz $\mathbf{q}$ cujos vetores-coluna são por definição $\xi_1, \dots, \xi_n$, em símbolos $\mathbf{q}\mathbf{p} = \mathbb{I}_n$.

f) Considere as transformações lineares

$$A : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathcal{P}_n(\mathbb{R}), \quad (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \mapsto \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n,$$

e

$$B : \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad p = p(x) \mapsto (p(0), p(1), \dots, p(n)).$$

Determina a matriz $[BA]$ da composição $BA : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ e prove que é uma matriz invertível.

[§]Lembre-se que $[A] := [A]_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}$ denota a matriz de A em relação à base canônica $\mathcal{E}$.

[¶]O *produto vetorial* de dois vetores $v = (a, b, c)$ e $w = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ é o vetor $v \times w$ de $\mathbb{R}^3$ definido por

$$v \times w := (bz - cy, cx - az, ay - bx).$$

^{||}Observe que $\mathbf{p} = [p_{ij}]$ é a matriz do operador identidade de $\mathbb{R}^n$ em respeito às bases $\mathcal{E}$ e $\mathcal{U}$. Nas outras palavras $\mathbf{p} = [\mathbb{I}_{\mathbb{R}^n}]_{\mathcal{E}, \mathcal{U}}$ é a matriz de passagem de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{U}$. Devido à comutatividade de (4) vale $\mathcal{U}\mathbf{p} = \mathcal{E} = \mathbb{I}_{\mathbb{R}^n}$.

g) Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensão $n < \infty$. Suponha que $A \in \mathcal{L}(E)$ não seja um múltiplo do operador identidade: $A \neq \alpha I$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

- i) Mostre que existem bases de E do tipo $\mathcal{U} = (u, Au, \dots)$ e $\mathcal{V} = (v, 2Av, \dots)$ tais que as matrizes $[A]_{\mathcal{U}}$ e $[A]_{\mathcal{V}}$ de A são diferentes.
- ii) Conclua que as *homotetias* (operadores da forma αI) são os únicos operadores cuja matriz não depende da base escolhida.
- iii) Conclua que as matrizes do tipo $\alpha \mathbb{I}_n$ são os únicos que comutam** com todas matrizes invertíveis $n \times n$.

[ad i): Conclua $n \geq 2$. Mostre que existe conjunto LI da forma $X = \{v, Av\}$. Depois estenda X para receber uma base $(\xi_1 = v, \xi_2 = Av, \dots, \xi_n)$ de E .]

h) Seja $\mathbf{c} \in M(n \times n; \mathbb{K})$ uma matriz quadrada de posto 1.

- i) Prove que: $\mathbf{c}^2 = (\text{tr } \mathbf{c})\mathbf{c}$. (*)
- ii) Dado $n \geq 2$, generalize: $\mathbf{c}^n = (\text{tr } \mathbf{c})^{n-1}\mathbf{c}$.

Poderia usar (e provar) o

Lema 1. Dadas matrizes $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M(n \times n; \mathbb{K})$, temos que $\text{tr } (\mathbf{ab}) = \text{tr } (\mathbf{ba})$.

[ad i): Observe que para provar (*) se pode mudar a base de $\mathbb{K}^n$ e provar (*) para a nova matriz $\tilde{\mathbf{c}}$. Lembre-se: $\text{posto}(\mathbf{c}) = 1$. Escolha base apropriada de $\mathbb{K}^n$.]

i) Dada em $\mathbb{R}^3$ a base canônica $\mathcal{E}$ e a base $\mathcal{V} = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$

$$\xi_1 = (1, 1, 0), \quad \xi_2 = (-1, 0, 0), \quad \xi_3 = (0, 0, 1).$$

Determine a matriz de passagem $\mathbf{p}$ de $\mathcal{V}$ para $\mathcal{E}$, e aquela vice versa.

j) Sejam $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ bases do espaço vetorial E da dimensão n . Sejam

- $\mathbf{p}$: a matriz de passagem de $\mathcal{U}$ para $\mathcal{V}$,
- $\mathbf{q}$: a matriz de passagem de $\mathcal{V}$ para $\mathcal{W}$.

Prove que

- $\mathbf{qp}$ é a matriz de passagem de $\mathcal{U}$ para $\mathcal{W}$,
- $\mathbf{p}^{-1}$ é a matriz de passagem de $\mathcal{V}$ para $\mathcal{U}$.

k) Sejam $A : E \rightarrow F$ e $B : F \rightarrow G$ transformações lineares entre espaços vetoriais de dimensão finita.

- i) Prove que: B injetiva $\Rightarrow \text{posto}(BA) = \text{posto}(A)$.
- ii) Que condição sobre A assegura que $\text{posto}(BA) = \text{posto}(B)$?

**Por definição, duas matrizes quadradas $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ comutam se $\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$.