

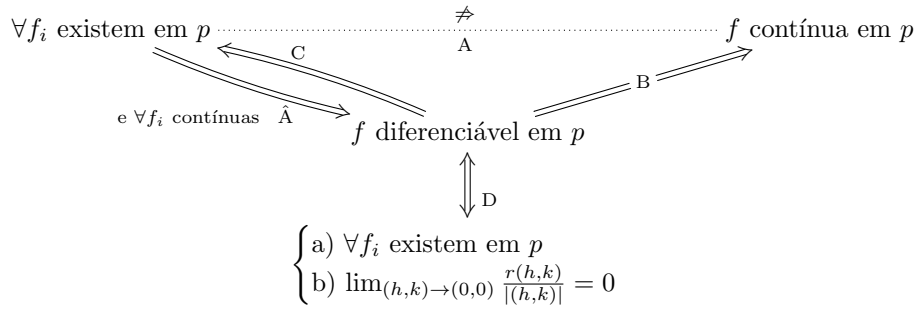
Capítulo 4

Diferenciabilidade

Se¹ uma função g de uma variável $x \in \mathbb{R}$ admite derivada num ponto a , ou seja, se o limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h}$ existir, então g é contínua neste ponto.² Note que para funções de uma variável, derivada e derivada parcial é a mesma coisa.

No caso de duas ou mais variáveis existência das derivadas parciais $f_i := f_{x_i}$ num ponto não garante continuidade de f neste ponto. Por isso introduz-se uma noção de diferenciabilidade mais forte como derivada parcial.

No diagrama seguinte ilustramos o programa e os resultados principais (A, Â, B, C, e D) do Capítulo 4. Seja $f: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função num subconjunto aberto U , seja $p \in U$ um ponto. Escrevemos f_i para a derivada parcial em respeito à i -ésima variável.



¹Cap. 4 de MA211 2024-1, autor Joa Weber: 14 de março de 2024

² Dado $\varepsilon > 0$, como f é diferenciável em x , existe $\delta'_\varepsilon > 0$ tal que

$$|h| < \delta'_\varepsilon \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| - |h| \cdot |f'(x)| \leq |f(x+h) - f(x) - f'(x)h| < |h|\varepsilon.$$

Definimos $\delta_\varepsilon := \min\{\delta'_\varepsilon, \frac{\varepsilon}{\varepsilon + |f'(x)|}\}$. Então a estimativa acima lida a

$$|h| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x+h) - f(x)| < |h|\varepsilon + |h| \cdot |f'(x)| < \varepsilon.$$

Alternativamente, em (4.2.4) cancela a segunda variável.

onde b) refere-se ao caso de duas variáveis, o caso de $k \geq 2$ variáveis sendo análogo. As implicações recíprocas de $\hat{A}$, B , e C são falsas; veja respectivamente os Exercícios 4.2.4, 4.2.2 (cone), e 4.1.1.

Neste Capítulo 4 seguimos em grandes partes o livro excelente [Gui01, §11].

4.1 Derivadas parciais são insuficiente

A. *Existência de derivadas parciais $f_i(p) \not\Rightarrow f$ contínua em p .*

Para ver isso, considere a função

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Exercício 4.1.1. Para a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida acima

- a) calcule as derivadas parciais f_x e f_y em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$; $f_x = \frac{y^3 - 2yx^2}{(x^2+y^2)^2}$
- b) confere que $f_x(0, 0) = 0 = f_y(0, 0)$;
- c) mostre que f não é contínua na origem $(0, 0)$; veja (2.1.2)
- d) mostre que f_x e f_y não são contínuas na origem $(0, 0)$.

4.2 Diferenciação

No caso de uma função g de uma variável x , num ponto a são equivalente

$$\begin{aligned} & g \text{ diferenciável no ponto } a \text{ com derivada } \alpha \\ & :\iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \alpha \\ & \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a) - \alpha h}{h} = 0 \\ & \iff \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a) - \alpha h}{|h|} = 0. \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

A última equivalência vale no caso de um limite nulo.³ Note que, em contraste ao primeiro limite, o terceiro limite se oferece para generalização ao caso de duas ou mais variáveis:

Definição 4.2.1 (Diferenciável). Seja $f: \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $(a, b) \in U$.

- a) Diz-se que f é **diferenciável no ponto** (a, b) se existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\overbrace{f(a+h, b+k) - f(a, b) - \alpha h - \beta k}^{=: R_{\alpha, \beta}(h, k)}}{|(h, k)|} = 0 \tag{4.2.2}$$

³ o ponto na definição (2.1.1) do limite $L = 0$ é que $\left| \frac{G(h)}{h} - 0 \right| = \left| \frac{G(h)}{|h|} - 0 \right|$

ou equivalentemente

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{R_{\alpha,\beta}(h,k)}{|(h,k)|} = 0 \quad (4.2.3)$$

onde $|(h,k)| = \sqrt{h^2 + k^2}$ é a distancia do ponto (h,k) da origem.

- b) Diz-se que f é **diferenciável** se é diferenciável em todo ponto.
- c) Para funções $f: \mathbb{R}^k \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ de k variáveis generaliza-se a) e b) analogamente.
- d) Chamamos uma lista de funções $(f^1, \dots, f^m): \mathbb{R}^k \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ **diferenciável** se cada um membro $f^1, \dots, f^m: \mathbb{R}^k \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável.

Diferenciabilidade implica continuidade e assim resolve o déficit A das derivadas parciais.

$$B. f \text{ diferenciável em } p \Rightarrow f \text{ contínua em } p.$$

Demonstração de B. Com a definição de $R_{\alpha,\beta}(h,k)$ e linearidade do limite obtemos a primeira identidade no seguinte

$$\begin{aligned} & \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(a+h, b+k) \\ &= f(a,b) + \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} (\alpha h + \beta k) + \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \underbrace{\frac{R_{\alpha,\beta}(h,k)}{|(h,k)|}}_{\rightarrow 0 \text{ hip. } f \text{ dif.}} \cdot \underbrace{|(h,k)|}_{\text{limitado}} \quad (4.2.4) \\ &= f(a,b). \end{aligned}$$

□

Exercício 4.2.2 (Recíproco de B é falso - Cone). O gráfico da função $f(x,y) := \sqrt{x^2 + y^2}$ é um cone em $\mathbb{R}^3$. Mostre que na origem $(0,0)$ a função f é contínua, mas não tem derivadas parciais, assim não é diferenciável segundo C embaixo.

As propriedades A e B indicam que diferenciabilidade é mais forte como existência das derivadas parciais f_i . Assim é plausível o seguinte.

$$C. f \text{ diferenciável em } p \xRightarrow{(\neq)} \text{todas derivadas parciais } f_i(p) \text{ existem.}$$

O recíproco de C é falso como Exercício 4.1.1 mostra: Aquela função f admite todas derivadas parciais, particularmente na origem $f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$. Mas f não é contínua em $(0,0)$ e assim, segundo B, não é diferenciável em $(0,0)$.

Um exemplo de uma função tal que, na origem: todas derivadas parciais existem, a função é contínua, mas não diferenciável, é o seguinte.

Exercício 4.2.3 (Recíproco de C é falso). Mostre que a função

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & , (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , (x, y) = (0, 0), \end{cases} \quad (4.2.5)$$

a) é contínua na origem, b) admite derivadas parciais $f_1(0, 0)$ e $f_2(0, 0)$, mas c) não é diferenciável na origem. c) Outro critério chegará em Exc. 5.3.8.

[DICAS. a) b) Coordenadas polares.]

Demonstração de C. Pela hipótese existem α, β tal que o limite em (4.2.1) existe quando $(h, k) \rightarrow (0, 0)$. Assim o limite existe ao longo de qualquer caminho lidando à origem, por exemplo $(h, 0) \rightarrow (0, 0)$ ao longo do eixo- x . Obtemos

$$0 \stackrel{(4.2.1)}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b) - \alpha h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h, b) - f(a, b)}{h} - \alpha$$

o que é a definição que $f_x(a, b)$ existe e iguale α . Analogamente para $f_y(a, b)$. $\square$

4.2.1 Uma condição equivalente

Seja $f: \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $(a, b) \in U$. Vale a equivalência

$$\boxed{\text{D. } f \text{ diferenciável em } (a, b) \Leftrightarrow \begin{cases} \text{a) todas } f_i(a, b) \text{ existem} \\ \text{b) } \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{r(h,k)}{|(h,k)|} = 0 \end{cases}}$$

onde a função r em b) é definida por

$$r(h, k) := f(a+h, b+k) - f(a, b) - f_x(a, b)h - f_y(a, b)k \quad (4.2.6)$$

o que faz sentido dado a informação em a) que todas as derivadas parciais no ponto (a, b) existem. Observe que $r = R_{\alpha, \beta}$ onde $\alpha = f_x(a, b)$ e $\beta = f_y(a, b)$.

Note que, se f é diferenciável em (a, b) , então segue ademais

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} r(h, k) = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} f(a+h, b+k) - f(a, b) = 0$$

porque f é contínua em (a, b) , segundo § 4.2 C.

Demonstração de D. '⇒' Seja f diferenciável em (a, b) . a) vale conforme C. b) A demonstração de C mostra que $\alpha = f_x(a, b)$ e $\beta = f_y(a, b)$, assim $R_{\alpha, \beta} = r$ e

$$0 \stackrel{(4.2.3)}{=} \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{R_{\alpha, \beta}(h, k)}{|(h, k)|} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{r(h, k)}{|(h, k)|}.$$

'⇐' Óbvio usando $\alpha := f_x(a, b)$ e $\beta := f_y(a, b)$. $\square$

4.2.2 Uma condição suficiente importantíssima

O que é suficiente, para que a existência de todas as derivadas parciais $f_i(p)$ implica diferenciabilidade de f em p , é continuidade das f_i em p como veremos próximo. Frequentemente é mais fácil verificar continuidade das derivadas parciais do que diferenciabilidade pela definição, ou seja pelo limes (4.2.2). Por isso, o critério seguinte é importantíssimo no dia-a-dia.

Â. Em p todas f_i existem e são contínuas $\xRightarrow{(\neq)}$ f diferenciável em p .

Demonstração de Â. [Gui01, §11.2]. □

O recíproco de Â é falso. Enquanto, segundo C, todas derivadas parciais (de primeira ordem) existem em p , não precisam ser contínuas:

Exercício 4.2.4. Considere a função $\sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$\sigma(x, y) := \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & , (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Mostre que

- a) σ é diferenciável em $(0, 0)$ de fato em $\mathbb{R}^2$;
- b) σ_x e σ_y existem em $\mathbb{R}^2$;
- c) mas σ_x e σ_y **não são contínuas** em $(0, 0)$.

4.2.3 A classe C^k revisitada

Seja $f: \mathbb{R}^n \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $k \in \mathbb{N}_0$. Pela Definição 3.4.1 a função f é de classe $C^k(U)$ se e somente se todas as derivadas parciais de f de todas as ordens de zero até inclusive ordem k existem em U e são contínuas em U . É muito trabalho checar existência e continuidade de $1 + n + n^2 + \dots + n^k$ funções.

Na verdade só precisa-se verificar existência e continuidade de n^k funções:

Lema 4.2.5. Uma função f é de classe $C^k(U)$ se e somente se todas as derivadas parciais de ordem k existem em U e são contínuas em U .

Demonstração. Suponha que todas as derivadas parciais de f de ordem k existem em U e são contínuas em U . Uma derivada parcial de ordem k é da forma $f_{i_1 i_2 \dots i_k} = (f_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}})_{i_k}$ onde $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$. Nas outras palavras todas derivadas parciais (da primeira ordem) da função $g := f_{i_1 i_2 \dots i_{k-1}}$ existem e são contínuas em U . Segundo Â a função $g: U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e assim, segundo B, contínua. Este argumento prova que todas derivadas parciais de ordem $k - 1$ são contínuas em U também. Daí concluímos com a mesma argumentação que todas derivadas parciais de ordem $k - 2$ são contínuas em U . Iterando concluímos continuidade das derivadas parciais de ordem $k - 3, k - 4, \dots, 1, 0$. A última conclusão (ordem 0) diz que f é contínua em U . □

4.3 Aplicação – plano tangente

No § 3.3 tínhamos introduzidos duas curvas C_1 e C_2 no gráfico $S = \text{gr}(f)$ de uma função contínua $f: \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ passando um ponto $P = (a, b, f(a, b))$.

Para definir o plano tangente suponhamos que f é de classe $C^1(U)$.

Assim plano tangente num ponto varia continuamente com o ponto. Os dois vetores velocidade $C'_1(a)$ e $C'_2(b)$ geram as tangentes T_1 e T_2 às curvas no ponto P . Os dois vetores velocidade são linearmente independente:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha C'_1(a) + \beta C'_2(b) = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha f_x(a, b) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \beta f_y(a, b) \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha = 0 = \beta.$$

Definição 4.3.1. As retas T_1 e T_2 tangente a $S = \text{gr}(f)$ no ponto P geram um plano $T_P S$ em $\mathbb{R}^3$ passando P , o **plano tangente** ao gráfico no ponto P .

Proposição 4.3.2. Num ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ o plano tangente $T_P S$ a um gráfico $S = \text{gr}(f)$ é dado pela equação afim

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0). \quad (4.3.1)$$

Demonstração. Um plano geral passando $P = (x_0, y_0, z_0)$ é dado pela equação

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

onde A, B, C são três constantes. Conforme § 3.3 a tangente T_1 é dada pelas equações $z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0)$ e $y = y_0$. Segue $C = 1$ e $A = f_x(x_0, y_0)$. Para T_2 temos $z = z_0 + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ e $x = x_0$. Segue $C = 1$ e $B = f_y(x_0, y_0)$. $\square$

Escreve-se, equivalentemente, a equação do plano tangente na forma de um produto escalar: $T_P S$ é composto dos pontos $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de produto zero

$$N_P \cdot (X - P) = 0, \quad N_P := \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_y(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Usa-se o fato que um plano é unicamente determinado por um ponto dele e uma reta ortogonal. No nosso caso temos o ponto $P \in S$, a reta ortogonal passando P é dada por

$$R_P := P + \mathbb{R}N_P := \{tN_P \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Chama-se R_P de **reta normal** e N_P de **vetor normal**.

Exercício 4.3.3. Seja $S = \{z = 2x^2 + y^2\} \subset \mathbb{R}^3$. Determine a equação do plano tangente $T_{(1,1,3)} S$ e também vetor e reta normal nesse ponto.

4.4 Derivada

Consideramos temporariamente listas de funções $f = (f^1, \dots, f^m)$.

Definição 4.4.1 (Valores em $\mathbb{R}^m$). Uma aplicação $f = (f^1, \dots, f^m): \mathbb{R}^k \supset U \rightarrow \mathbb{R}^m$ de k variáveis com valores em $\mathbb{R}^m$ é chamada de **diferenciável num ponto** $a \in U$ se cada um membro $f^1, \dots, f^m: U \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável em a .

Neste caso a **derivada** de f em a , denotada de $f'(a)$ ou $Df(a)$, é a transformação linear $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ cuja matriz em respeito às bases canônicas,⁴ chamada de **matriz Jacobiana** de f no ponto a , tem como entradas as derivadas parciais $f_{x_j}^i(a) = \frac{\partial f^i}{\partial x_j}(a)$, ou seja

$$\text{Jac}_f(a) := \frac{\partial(f^1, \dots, f^m)}{\partial(x_1, \dots, x_k)} := [Df(a)]_{\mathcal{E}^k, \mathcal{E}^m} = \begin{bmatrix} f_{x_1}^1(a) & \dots & f_{x_k}^1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_1}^m(a) & \dots & f_{x_k}^m(a) \end{bmatrix}. \quad (4.4.1)$$

Assim $\text{Jac}_f(a) = \frac{\partial(f^1, \dots, f^m)}{\partial(x_1, \dots, x_k)} \in \text{Mat}(m \times k)$.

Note que a matriz Jacobiana (4.4.1) depende continuamente do ponto $a \in U$ se e somente todas derivadas parciais são contínuas em U – o que diferenciabilidade em p não garante. Vamos pedir mais:

Definição 4.4.2 (Aproximação linear). Se todos membros $f^1, \dots, f^k$ são de classe $C^1(U)$, a derivada é chamada de **aproximação linear** de f no ponto a .

Já voltamos para funções.

Definição 4.4.3 (Valores em $\mathbb{R}$). Para funções $f: \mathbb{R}^k \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in U$ usamos o símbolo $df(a)$ para a derivada e chamamos a aplicação

$$df: U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}), \quad a \mapsto df(a)$$

de **diferencial** de f no ponto a . O conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ é composto das transformações lineares $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$.

Em respeito às bases canônicas a derivada em a é a matriz $1 \times k$ dada por $[df(a)] = [f_{x_1}(a) \dots f_{x_k}(a)]$. Para $i \in \{1, \dots, k\}$ vale

$$df(a)e_i = [f_{x_1}(a) \dots \textcolor{red}{f_{x_i}(a)} \dots f_{x_k}(a)] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \textcolor{red}{1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = f_{x_i}(a).$$

⁴ $\mathcal{E}^k = \{e_1, \dots, e_k\} \subset \mathbb{R}^k$ onde $e_i \in \mathbb{R}^k$ é a lista cujos membros são nulos só o i -ésimo é 1; $\mathcal{E}^m = \{e_1, \dots, e_m\} \subset \mathbb{R}^m$ onde $e_i \in \mathbb{R}^m$ é a lista cujos membros são nulos só o i -ésimo é 1

Para $v \in \mathbb{R}^k$ obtemos

$$df(a)v = [f_{x_1}(a) \dots f_{x_k}(a)] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} = f_{x_1}(a)v_1 + \dots + f_{x_k}(a)v_k. \quad (4.4.2)$$

Isso implica a identidade

$$df = f_{x_1}dx_1 + \dots + f_{x_k}dx_k$$

entre as diferenciais df e $dx_1, \dots, dx_k$ das funções coordenadas

$$x_i: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto p_i, \quad i \in \{1, \dots, k\}.$$

Só resta observar que $v_i = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} (p_i + \varepsilon v_i) = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} x_i(p + \varepsilon v) = dx_i(p)v$.

Referências Bibliográficas

- [Gui01] Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo*, volume 2. LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 5a edition, 2001.
- [Jos05] Jürgen Jost. *Postmodern analysis*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2005.