

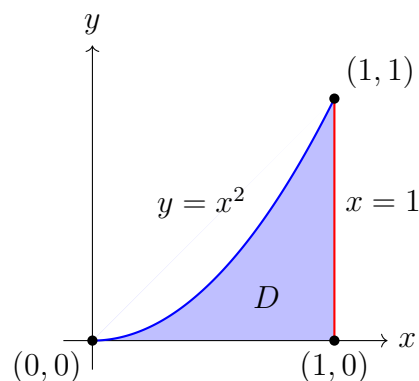
Q1. (2,5 pontos) Seja

$$I := \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3 + 1} \, dx \, dy.$$

- (a) (0,5 pontos) Esboce a região da integração D .
(b) (2,0 pontos) Calcule o valor da integral I . (Sugestão: Inverta a ordem de integração, descrevendo a região D como uma região do tipo adequado.)

Solução:

- (a) A região D é limitada pela parábola $y = x^2$ (isto é, $x = \sqrt{y}$, $x \geq 0$), pela reta $x = 1$ e pelo eixo x ; seus vértices são $(0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$.



- (b) **Descrição como região do tipo II.**

$$D = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, \sqrt{y} \leq x \leq 1\}.$$

Descrição como região do tipo I. A condição $\sqrt{y} \leq x$ com $x, y \geq 0$ equivale a $y \leq x^2$; logo

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}.$$

Como a função $\sqrt{x^3 + 1}$ não tem primitiva elementar, de modo que a integral não pode ser calculada na ordem dada. Pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3 + 1} \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{x^2} \sqrt{x^3 + 1} \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{x^3 + 1} \left[y \right]_{y=0}^{x^2} dx \\ &= \int_0^1 \sqrt{x^3 + 1} \, x^2 \, dx \end{aligned}$$

Com a substituição $u = x^3 + 1$, $du = 3x^2 \, dx$ e $x = 0 \Rightarrow u = 1$, $x = 1 \Rightarrow u = 2$.

Assim,

$$I = \int_0^1 x^2 \sqrt{x^3 + 1} \, dx = \frac{1}{3} \int_1^2 u^{1/2} \, du = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \left[u^{3/2} \right]_1^2 = \frac{2}{9} (2\sqrt{2} - 1)$$

Portanto,

$$\boxed{\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3 + 1} \, dx \, dy = \frac{2}{9} (2\sqrt{2} - 1) = \frac{4\sqrt{2} - 2}{9}}.$$

Q2. (2,5 pontos) Calcule a massa de uma lâmina que ocupa a região D do semiplano superior $y \geq 0$, limitada pelas circunferências

$$x^2 + y^2 = 2 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 = 4,$$

sabendo que sua densidade em cada ponto $(x, y) \in D$ é

$$\rho(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Solução:

A massa de uma lâmina que ocupa uma região D , com densidade $\rho(x, y)$, é dada por

$$m = \iint_D \rho(x, y) dA.$$

A região D está no semiplano superior $y \geq 0$, limitada pelas circunferências

$$x^2 + y^2 = 2$$

e

$$x^2 + y^2 = 4.$$

Os raios das circunferências são

$$r_1 = \sqrt{2}, \quad r_2 = 2.$$

Em coordenadas polares $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, a condição $2 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ equivale a $\sqrt{2} \leq r \leq 2$, e a condição $y \geq 0$ equivale a $0 < \theta < \pi$. Assim

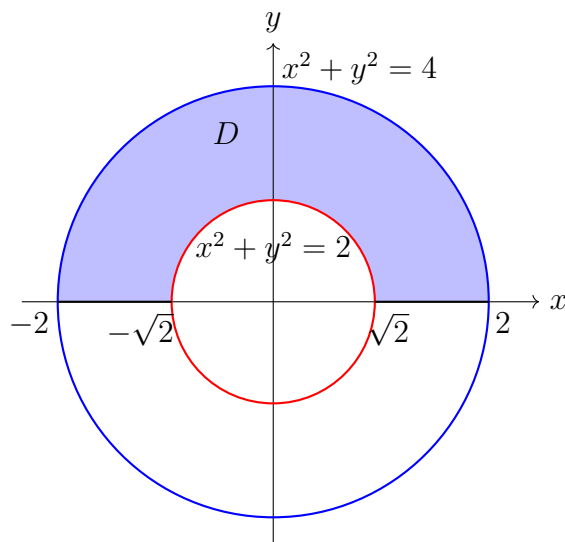
$$D = \{(r, \theta) : \sqrt{2} \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$

Como $x^2 + y^2 = r^2$ e $dA = r dr d\theta$

$$\begin{aligned} m &= \iint_D \rho(x, y) dA = \iint_D \frac{dA}{x^2 + y^2} = \int_0^\pi \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{1}{r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^\pi \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dr}{r} d\theta \\ &= \int_0^\pi \left[\ln r \right]_{r=\sqrt{2}}^2 d\theta \\ &= \int_0^\pi (\ln 2 - \ln \sqrt{2}) d\theta \\ &= \pi (\ln 2 - \ln \sqrt{2}) \\ &= \pi \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{m = \iint_D \frac{dA}{x^2 + y^2} = \frac{\pi \ln 2}{2}}.$$



Q3. (2,5 pontos) Usando as coordenadas esféricas, calcule o volume da região $E \subset \mathbb{R}^3$ dada por

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 \leq 9 \right\},$$

ou seja, da região $E \subset \mathbb{R}^3$ que esta dentro da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solução:

Usamos as coordenadas esféricas

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta, \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta, \\ z = \rho \cos \phi, \quad 0 < \rho < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi. \end{cases}$$

em que o elemento de volume é

$$dV = \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

Em coordenadas esféricas, a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ é dado por

$$\rho^2 = 9,$$

e o cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ é dado por $\rho \cos \phi = \rho \sin \phi \Leftrightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$.

Como a região E está dentro da esfera, acima do cone e simétrica em torno do eixo z , em coordenadas esféricas é dada por

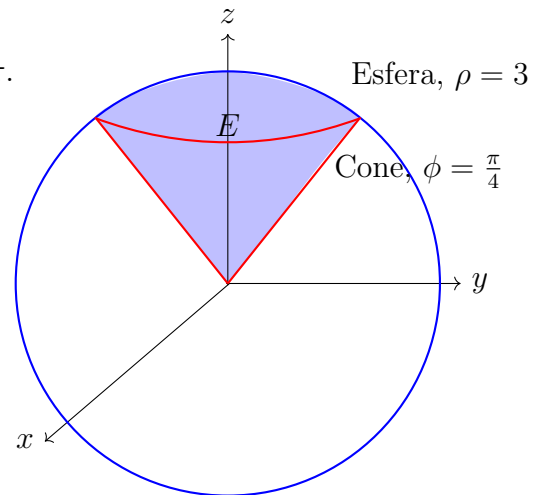
$$E = \{(\rho, \theta, \phi) : 0 \leq \rho \leq 3, \quad 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Portanto, o volume da região é

$$\begin{aligned} V(E) &= \iiint_E dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/4} \int_0^3 \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \left(\int_0^{2\pi} d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/4} \sin \phi \, d\phi \right) \left(\int_0^3 \rho^2 \, d\rho \right) \\ &= \left[\theta \right]_0^{2\pi} \left[-\cos \phi \right]_0^{\pi/4} \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^3 \\ &= 2\pi \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) \times 9 \\ &= 9\pi(2 - \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Portanto, o volume procurado é

$$\boxed{V(E) = 9\pi(2 - \sqrt{2})}.$$



Q4. (2,5 pontos) Calcule o valor da integral

$$\iint_R \frac{2x - 3y}{x - 4y} dA,$$

onde R é o paralelogramo limitado pelas retas

$$2x - 3y = 0, \quad 2x - 3y = 2, \quad x - 4y = 1 \quad \text{e} \quad x - 4y = 5.$$

(Sugestão: Faça uma mudança de variáveis $u = 2x - 3y$ e $v = x - 4y$.)

Solução: Mudança de variáveis $u = 2x - 3y$ e $v = x - 4y$ implica o paralelogramo R transforma-se no retângulo $u = 0$, $u = 2$, $v = 1$, $v = 5$, i.e.,

$$S = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 5\}.$$

Além disso, o integrando transforma-se em

$$\frac{2x - 3y}{x - 4y} = \frac{u}{v}.$$

Resolvemos o sistema

$$\begin{cases} u = 2x - 3y, \\ v = x - 4y, \end{cases}$$

para obter a transformação inversa

$$\begin{cases} x = \frac{4u - 3v}{5}, \\ y = \frac{u - 2v}{5}. \end{cases}$$

O jacobiano é

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \end{vmatrix} = -\frac{8}{25} + \frac{3}{25} = -\frac{1}{5}.$$

Logo,

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \frac{1}{5},$$

e, portanto,

$$dA = dx dy = \frac{1}{5} du dv.$$

Aplicando a mudança de variáveis, obtemos

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{5} \int_1^5 \int_0^2 \frac{u}{v} du dv \\ &= \frac{1}{5} \int_1^5 \frac{1}{v} \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^2 dv = \frac{2}{5} \int_1^5 \frac{1}{v} dv \\ &= \frac{2}{5} [\ln v]_1^5 = \frac{2}{5} (\ln 5 - \ln 1) = \frac{2}{5} \ln 5. \end{aligned}$$

Portanto, o valor da integral é

$$\boxed{I = \frac{2}{5} \ln 5}.$$

Observação: Cálculo de jacobiano pode ser $J = 1/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ sem obter transformação inversa.