

Q1. (2,5 pontos) Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2(y-x)}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ k^2 - 4, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

onde $k \in \mathbb{R}$. Determine os valores de k para quais a função f se torna contínua em $\mathbb{R}^2$.

Solução: Primeiro note que para $(x, y) \neq (0, 0)$, a função f é racional e portanto contínua.

... .. 0,5

Vamos verificar continuidade da f no ponto $(x, y) = (0, 0)$.

Lembre da definição que a função f fica continua no $(0, 0)$ se

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = f(0, 0). \quad (1)$$

... .. 0,5

Temos

$$f(x, y) = \frac{x^2(y-x)}{x^2+y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Como $0 \leq y^2$ implica $x^2 \leq x^2 + y^2$ para qualquer ponto $(x, y) \neq (0, 0)$, temos $\frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$, e daí

$$0 \leq |f(x, y)| = \left| \frac{x^2(y-x)}{x^2+y^2} \right| = \frac{x^2}{x^2+y^2} |y-x| \leq |y-x| \leq |y| + |x|.$$

... .. 0,5

Como

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (|y| + |x|) = 0,$$

pelo Teorema do Confronto segue que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2(y-x)}{x^2+y^2} = 0. \quad (2)$$

... .. 0,5

Como $f(0, 0) = k^2 - 4$, em vista de (1) e (2), a função f fica contínua no $(0, 0)$, se

$$k^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 4 \Leftrightarrow k = \pm 2.$$

Resposta final: A função f se torna contínua em $\mathbb{R}^2$ para $k = \pm 2$.

... .. 0,5

Q2. (2,5 pontos) Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ a superfície dada pela equação

$$x - z = \arctan(yz).$$

Determine as equações do plano tangente e da reta normal à superfície S no ponto $P(1, 0, 1)$.

Solução:

Definimos

$$F(x, y, z) = x - z - \arctan(yz),$$

de modo que $S = F^{-1}(0)$ é uma superfície de nível de F .

... .. 0,3

Verificamos primeiro que $P \in S$:

$$F(1, 0, 1) = 1 - 1 - \arctan(0) = 0.$$

... .. 0,2

As derivadas parciais de F são

$$F_x = 1, \quad F_y = -\frac{z}{1 + y^2 z^2}, \quad F_z = -1 - \frac{y}{1 + y^2 z^2}$$

... .. 0,6 (sendo 0,2 para cada uma das três derivadas).

No ponto $P = (1, 0, 1)$ temos $1 + y^2 z^2 = 1$, logo

$$\nabla F(1, 0, 1) = (1, -1, -1) \neq \vec{0}.$$

... .. 0,4

Como $\nabla F(P) \neq \vec{0}$, o vetor $\nabla F(P)$ é normal a S em P (e o Teorema da Função Implícita garante que S é regular numa vizinhança de P).

Plano tangente. A equação é $\nabla F(P) \cdot ((x, y, z) - P) = 0$, isto é

$$1(x - 1) - 1(y - 0) - 1(z - 1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{x - y - z = 0}.$$

... .. 0,5

Reta normal. É a reta que passa por P com vetor diretor $\nabla F(P)$:

$$(x, y, z) = (1, 0, 1) + t(1, -1, -1), \quad t \in \mathbb{R},$$

ou seja, em forma paramétrica $x = 1 + t$, $y = -t$, $z = 1 - t$, e em forma simétrica

$$\boxed{\frac{x - 1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z - 1}{-1}}.$$

... .. 0,5

Observação para a correção: soluções que obtêm o plano tangente via $z = f(x, y)$ (Teorema da Função Implícita, com $F_z(P) = -1 \neq 0$ e $f_x = -F_x/F_z = 1$, $f_y = -F_y/F_z = -1$) devem receber a mesma pontuação.

Resposta alternativa: Veja pagina seguinte.

Seja

$$F(x, y, z) = x - z - \arctan(yz).$$

$F(x, y, z) = 0$ define a superfície $z = f(x, y)$ implicitamente e $P(1, 0, 1)$ está na superfície.

—— 0,5

As derivadas parciais de F são

$$F_x = 1, \quad F_y = -\frac{z}{1 + y^2 z^2}, \quad F_z = -1 - \frac{y}{1 + y^2 z^2}$$

—— 0,6 (sendo 0,2 para cada uma das três derivadas).

No ponto $P = (1, 0, 1)$ temos $1 + y^2 z^2 = 1$, logo

$$\nabla F(P) = \langle F_x(P), F_y(P), F_z(P) \rangle = \langle 1, -1, -1 \rangle \neq \vec{0}.$$

—— 0,4

Como $\nabla F(P) \neq \vec{0}$, o vetor $\nabla F(P)$ é normal a S em P (e o Teorema da Função Implícita garante que S é regular numa vizinhança de P).

Plano tangente. A equação desejada é

$$F_x(P)(x - 1) + F_y(P)(y - 0) + F_z(P)(z - 1) = 0$$

$$1(x - 1) - 1(y - 0) - 1(z - 1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{x - y - z = 0}.$$

—— 0,5

Reta normal. É a reta que passa por P na direção do gradiente

$$\frac{x - 1}{F_x(P)} = \frac{y - 0}{F_y(P)} = \frac{z - 1}{F_z(P)},$$

ou seja,

$$\boxed{\frac{x - 1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z - 1}{-1}}.$$

—— 0,5

Q3. (2,5 pontos) Seja

$$f(x, y) = \ln(9 - x^2 - y^2).$$

- (a) (0,5 pontos) Determine o domínio de f .
- (b) (1 ponto) Calcule a derivada direcional da função f no ponto $(1, 2)$ na direção do vetor $\mathbf{v} = \langle \sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$.
- (c) (1 ponto) Determine a direção segundo a qual $D_{\mathbf{v}}f(1, 2)$ é máxima e determine a taxa máxima nesse ponto.

Solução:

a) $D(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 9 - x^2 - y^2 > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\}.$
 — 0,5

b) Temos $|\mathbf{v}| = |\langle \sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle| = 2$. O vetor unitário $\mathbf{u}$ na direção de $\mathbf{v}$ é $\mathbf{u} = \frac{1}{2} \langle \sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle$.

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle = \left\langle \frac{-2x}{9 - x^2 - y^2}, \frac{-2y}{9 - x^2 - y^2} \right\rangle.$$

Logo

$$\nabla f(1, 2) = \left\langle \frac{-2}{4}, \frac{-4}{4} \right\rangle = \left\langle -\frac{1}{2}, -1 \right\rangle.$$

— 0,5

Logo

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{v}}f(1, 2) &= \nabla f(1, 2) \cdot \mathbf{u} = \left\langle -\frac{1}{2}, -1 \right\rangle \cdot \frac{1}{2} \langle \sqrt{2}, \sqrt{2} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{2} \right) \\ &= -\frac{3\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

— 0,5

c) Temos $|\nabla f(1, 2)| = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$

A direção segundo a qual $D_{\mathbf{v}}f(1, 2)$ é máxima é a direção do gradiente, i.e.,

$$\frac{2}{\sqrt{5}} \left\langle -\frac{1}{2}, -1 \right\rangle = \left\langle -\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right\rangle, \quad \text{ou} \quad \left\langle -\frac{1}{2}, -1 \right\rangle.$$

— 0,5

e a taxa máxima nesse ponto é

$$\left| \left\langle -\frac{1}{2}, -1 \right\rangle \right| = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

— 0,5

Q4. (2,5 pontos) Determine os pontos da superfície $z^2 = xy + 1$ que estão mais próximos da origem.

Solução:

Seja $P(x, y, z)$ o ponto da superfície $z^2 = xy + 1$. A distancia deste ponto P com a origem é

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Como $d > 0$, para minimizar d , basta minimizar d^2 . Seja, $f(x, y, z) = d^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Como, P está na superfície $z^2 = xy + 1$, temos de minimizar $f(x, y, z)$ sujeita a restrição $g(x, y, z) := z^2 - xy - 1 = 0$.

——— 0,5

Usando Método de Multiplicador de Lagrange, vamos calcular todos x, y, z e λ tal que

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\lambda y & (i) \\ 2y = -\lambda x & (ii) \\ 2z = \lambda 2z & (iii) \\ z^2 - xy - 1 = 0 & (iv) \end{cases} \quad (3)$$

De (iii), temos, ou $z = 0$ ou $\lambda = 1$.

——— 0,5

Caso 1. $\lambda = 1$. Neste caso de (i) temos $y = -2x$. Usando isso em (ii), temos $4x = x$ o qual implica $x = 0$. Consequentemente, também temos $y = 0$.

Agora, usando $x = 0$ e $y = 0$ em (iv), temos $z^2 = 1$, e daí, temos $z = \pm 1$. Logo, os pontos neste caso são

$$P_1(0, 0, 1), \quad e \quad P_2(0, 0, -1),$$

e consequentemente $f = d^2 = 1$.

——— 0,6

Caso 2. $z = 0$. Neste caso de (iv) temos $xy = -1$.

De (i) e (ii), temos

$$4xy = \lambda^2 xy$$

Como, $xy \neq 0$, podemos concluir que $\lambda^2 = 4$ e daí $\lambda = 2, -2$.

Para $\lambda = 2$, de (i) $2x = -2y \Leftrightarrow x = -y$. Como $xy = -1$, temos $x^2 = 1$ e daí, $x = \pm 1$. Logo neste caso, os pontos serão

$$P_3(1, -1, 0), \quad e \quad P_4(-1, 1, 0)$$

e consequentemente $f = d^2 = 2$.

Para $\lambda = -2$, de (i) teríamos $x = y$ o qual contradiz $xy = -1$. Logo, $\lambda = -2$ é impossível.

——— 0,6

Logo, os pontos da superfície $z^2 = xy + 1$ que estão mais próximos da origem são:

$$P_1(0, 0, 1), \quad e \quad P_2(0, 0, -1).$$

——— 0,3

Resposta alternativa: Veja pagina seguinte.

Seja $P(x, y, z)$ o ponto da superfície $z^2 = xy + 1$. A distancia deste ponto P com a origem é

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Como $d > 0$, para minimizar d , basta minimizar d^2 . Seja,

$$f(x, y, z) = d^2 = x^2 + y^2 + z^2. \quad (4)$$

Como, P está na superfície $z^2 = xy + 1$, temos de minimizar $f(x, y, z)$ sujeita a restrição

$$g(x, y, z) := z^2 - xy - 1 = 0. \quad (5)$$

—— 0,5

De (5) temos $z^2 = xy + 1$. Usando isso em (4) obtemos f como função de duas variáveis

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 1. \quad (6)$$

Assim reduzimos o problema para minimizar f dada por (6).

—— 0,5

Temos

$$\nabla f(x, y) = \langle f_x(x, y), f_y(x, y) \rangle = \langle 2x + y, 2y + x \rangle.$$

Pontos críticos são soluções do sistema

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = 0 & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0, & (1) \\ 2y + x = 0 & (2) \end{cases} \end{cases}$$

De (1) e (2), o único ponto critico é $(0, 0)$.

—— 0,5

Teste de segunda derivada: $f_{xx} = 2$, $f_{xy} = 1 = f_{yx}$ e $f_{yy} = 2$.

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

- No ponto crítico $D(0, 0) = 3 > 0$.
- $f_{xx}(0, 0) = 2 > 0$.
- Pelo teste de segunda derivada $(0, 0)$ é ponto de mínimo da f .

—— 0,5

Para $(x, y) = (0, 0)$, $z^2 = xy + 1$ implica $z = \pm 1$.

Logo, os pontos da superfície $z^2 = xy + 1$ que estão mais próximos da origem são:

$$P_1(0, 0, 1), \quad e \quad P_2(0, 0, -1).$$

—— 0,5