Departamento de Matemática — 1º Semestre de 2025
Imecc Unicamp
Joa Weber

Álgebra Linear

MA327 – Turma P

Lista 3b – Operadores auto-adjuntos

Exercícios.

Para todos os exercícios: E é um espaço vetorial de dimensão $n < \infty$, munido de produto interno.

a) Sejam $A, B \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjuntos tais que $\langle Av, v\rangle = \langle Bv, v\rangle$, para todo $v \in E$. Prove que $A = B$.

b) Seja $P \in \mathcal{L}(E)$ uma projeção ortogonal. Encontre uma raíz quadrada não-negativa de P. É única?

   [Dica: Lembre-se que $2P = I + S$, onde $S \in \mathcal{L}(E)$ é a reflexão ortogonal em torno de $F := \mathrm{Im}(P)$.]

c) Determine $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$A(2,-1,-2) = (1,1,13) \qquad \text{e} \qquad A(3,-6,-6) = (3,21,33),$$

   sabendo que o traço de A é 5.

d) Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que $A(4,4,-2) = (10,-2,-2)$ e

$$A(4,-2,4) = (-2,10,-2), \quad A(1,-2,-2) = (1,1,-5).$$

   Prove que $A^* = A$.

e) Sejam $A, B \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjuntos. Prove que $AB + BA$ é auto-adjunto. Que se pode dizer sobre $AB - BA$?

f) Sejam $A, B \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjuntos. Prove que $AB = BA$ se, e somente se, existe uma base ortonormal formada por autovetores comuns a A e B.

   [Dica: Na aula já temos provado "$\Rightarrow$".]

g) Sejam $A, B \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjuntos tais que BA é diagonalizável. Prove que AB também é diagonalizável.

   [Dicas: I. Veja Lista 3a, exerc. f).
   II. Uma transformação linear $A \in \mathcal{L}(E)$ é chamada *diagonalizável* se, e somente se, existe uma base $\mathcal{U}$ de E tal que a matriz $\mathbf{a} = [A]_{\mathcal{U}}$ de A é da forma diagonal. Neste caso, os elementos de $\mathcal{U}$ são os autovetores de A e a diagonal da matriz $\mathbf{a}$ contém os autovalores de A.]