Joa Weber

Álgebra Linear

MA327 – Turma P

Lista 2d – Produto Interno

Exercícios.

a) Considere a base $\mathcal{U} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ onde

$$\xi_1 = (1, 1, 1), \qquad \xi_2 = (1, -1, 1), \qquad \xi_3 = (1, -1, -1).$$

Aplique o método de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal $\mathcal{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. Determine a matriz $\mathbf{p}$ de passagem da base $\mathcal{U}$ para a base $\mathcal{B}$.

b) Determine as bases obtidas de $\mathcal{U} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ pelo processo de Gram-Schmidt nos casos seguintes:

i) $\xi_1 = (3, 0, 0), \quad \xi_2 = (-1, 3, 0), \quad \xi_3 = (2, -5, 1);$
ii) $\xi_1 = (-1, 1, 0), \quad \xi_2 = (5, 0, 0), \quad \xi_3 = (2, -2, 3).$

c) Prove que $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2x_2y_2,$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

d) Seja E um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Prove que para todo $u, v \in E$:

$$|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2\,|u|^2 + 2\,|v|^2 \tag{1}$$

onde $|\cdot| := \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ é a norma induzida. Interprete (1) geometricamente.

e) Seja $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço vetorial com produto interno. Seja $\mathcal{U} = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ uma base de E.

i) Dados $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, prove que existe um único vetor $w \in E$ tal que

$$\langle w, \xi_1 \rangle = \alpha_1, \ \dots, \ \langle w, \xi_n \rangle = \alpha_n.$$

ii) Prove que existe uma única base $\mathcal{V} = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ de E tal que

$$\langle \eta_i, \xi_j \rangle = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \dots, n.$$

Defina $a_{ij} := \langle \xi_i, \xi_j \rangle$ e $b_{ij} := \langle \eta_i, \eta_j \rangle$, onde $i, j = 1, \dots, n$. Prove que as matrizes $\mathbf{a} = (a_{ij})$ e $\mathbf{b} = (b_{ij})$ são inversas uma da outra.

f) Considere os vetores $u = (2, -1, 2)$, $v = (1, 2, 1)$ e $w = (-2, 3, 3)$. Determine o vetor de $\mathbb{R}^3$ que é a projeção ortogonal de w sobre o plano gerado por u e v.

g) Sejam F_1, F_2 subespaços de $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Prove que

i) $(F_1 + F_2)^\perp = F_1^\perp \cap F_2^\perp$ ii) $F_1^\perp + F_2^\perp = (F_1 \cap F_2)^\perp$.

h) Prove que o produto vetorial $\cdot \times \cdot : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido na Lista 1d satisfaz:

i) $u \times v = -v \times u$;

ii) $u \times (v + \tilde{v}) = u \times v + u \times \tilde{v}$;

iii) $u \times (\alpha v) = \alpha(u \times v)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$;

iv) $u \times v \neq 0 \iff \{u, v\}$ é um conjunto LI;

v) $u \times v$ é ortogonal a u e ortogonal a v;

vi) $e_1 \times e_2 = e_3, \quad e_2 \times e_3 = e_1, \quad e_3 \times e_1 = e_2$.