

# Álgebra Linear

## MA327 – Turma P

### Lista 1c – Base e Dimensão

**Definição 1.** Uma **base de um espaço vetorial**  $E$  é um subconjunto  $\mathcal{B} \subset E$  a qual é LI e gera  $E$ . Se  $E$  admite uma base **finita**  $\mathcal{B}$ , então chamamos o número  $n := |\mathcal{B}| < \infty$  de elementos de  $\mathcal{B}$  a **dimensão do espaço vetorial**  $E$ , denotado  $\dim E$ . Neste caso chamamos  $E$  um espaço vetorial de **dimensão finita**  $n$ .

Uma **base ordenada** de um espaço vetorial  $E$  de dimensão  $n$  é uma base  $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$  cujos elementos são enumerados. Às vezes é útil escrever uma base ordenada como uma lista ordenada  $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ .

**Exercícios.** Na Lista 1b é definido o espaço vetorial  $M(m \times n)$  das matrizes reais  $m \times n$  e a soma direta  $F_1 \oplus F_2$  de dois subespaços.

1) Mostre que

i) o conjunto  $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$  das matrizes reais

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

é um conjunto LI;

ii) o conjunto dos polinômios reais abaixo é LI:

$$p = p(x) = x^3 - 5x^2 + 1,$$

$$q = q(x) = 2x^4 + 5x - 6,$$

$$r = r(x) = x^2 - 5x + 2.$$

2) Seja  $E = F_1 \oplus F_2$ . Se  $\mathcal{B}_1$  é uma base de  $F_1$  e  $\mathcal{B}_2$  é uma base de  $F_2$ , prove que  $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$  é uma base de  $E$ .

3) Mostre que os polinômios  $1$ ,  $x - 1$  e  $x^2 - 3x + 1$  formam uma base de  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ . Exprima o polinômio  $2x^2 - 5x + 6$  como combinação linear dos elementos dessa base.

4) Seja  $\mathcal{S} \subset M(n \times n)$  o subconjunto das **matrizes simétricas**:

$$\mathbf{a} = (a_{ij}) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow (a_{ij}) = (a_{ji}) \in M(n \times n).$$

Para cada par  $(i, j)$  de números naturais com  $1 \leq i \leq j \leq n$ , seja  $\mathbf{e}_{ij}$  a matriz  $n \times n$  cujos elementos nas posições  $ij$  e  $ji$  são iguais a 1 e os demais são zero.

Prove que estas matrizes constituem uma base para o subespaço  $\mathcal{S} \subset M(n \times n)$ . De modo análogo, obtenha uma base do subespaço  $\mathcal{A} \subset M(n \times n)$  das **matrizes anti-simétricas** definido por  $(a_{ij}) = (-a_{ji})$ . Conclua que

$$\dim \mathcal{S} = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \dim \mathcal{A} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Lembre-se que  $\dim M(n \times n) = n^2$ . Conclua que

$$M(n \times n) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

- 5) As matrizes  $\mathbf{t} = (t_{ij}) \in M(n \times n)$  tais que  $t_{ij} = 0$  quando  $i < j$  são chamadas **triangulares inferiores**. Prove que elas constituem um subespaço  $L \subset M(n \times n)$ . Obtenha uma base para  $L$  e determine a sua dimensão.
- 6) Obtenha uma base e conseqüentemente determine a dimensão de cada um dos seguintes subespaços de  $M(n \times n)$ :

i) Matrizes  $\mathbf{a} = (a_{ij})$  cujo **traço**

$$\text{tr } \mathbf{a} := \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

(soma dos elementos da diagonal) é zero.

ii) Matrizes cuja primeira e última linha são iguais.

iii) Matrizes cuja segunda linha e terceira coluna são iguais.

- 7) Sejam  $X_1, X_2, \dots$  subconjuntos LI de um espaço vetorial  $E$ .

i) Se  $X_1 \subset X_2 \subset \dots$ , prove que  $X = \bigcup X_n$  é LI.

ii) Se cada  $X_n$  tem  $n$  elementos, prove que existe um conjunto linearmente independente  $\tilde{X} = \{x_1, x_2, \dots\}$  com  $x_j \in X_j$ , para todo  $j \in \mathbb{N}$ .

iii) Supondo  $E = \mathbb{R}_0^\infty$  (veja\*) e admitindo as hipóteses dos itens anteriores, é verdade que  $X = \bigcup X_n$  seja uma base de  $E$ ?

- 8) Se o conjunto de vetores  $\{v_1, \dots, v_m\}$  é LI, prove que o mesmo se dá com o conjunto  $\{v_1, v_2 - v_1, \dots, v_m - v_1\}$ . Vale a recíproca?

- 9) Sejam  $F_1, F_2 \subset E$  subespaços de dimensão finita. Obtenha uma base do subespaço  $F_1 + F_2$  que contenha uma base de  $F_1$ , uma base de  $F_2$  e uma base de  $F_1 \cap F_2$ .

---

\*Seja  $\mathbb{R}^\infty$  o espaço vetorial das seqüências reais. Seu subespaço  $\mathbb{R}_0^\infty$  é formado das seqüências quais contém só um número finito de membros não-nulos.