

Álgebra Linear

MA327 – Turma O

Lista 3b – Operadores auto-adjuntos

Exercícios.

Para todos os exercícios: E é um espaço vetorial de dimensão $n < \infty$, munido de produto interno.

- a) Sejam $A, B \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjuntos tais que $\langle Av, v \rangle = \langle Bv, v \rangle$, para todo $v \in E$. Prove que $A = B$.
- b) Seja $P \in \mathcal{L}(E)$ uma projeção ortogonal. Encontre uma raiz quadrada não-negativa de P . É única?
[Dica: Lembre-se que $2P = I + S$, onde $S \in \mathcal{L}(E)$ é a reflexão ortogonal em torno de $F := \text{Im}(P)$.]

- c) Determine $A = A^* \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$A(2, -1, -2) = (1, 1, 13) \quad \text{e} \quad A(3, -6, -6) = (3, 21, 33),$$

sabendo que o traço de A é 5.

- d) Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tal que $A(4, 4, -2) = (10, -2, -2)$ e

$$A(4, -2, 4) = (-2, 10, -2), \quad A(1, -2, -2) = (1, 1, -5).$$

Prove que $A^* = A$.

- e) Sejam $A, B \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjuntos. Prove que $AB + BA$ é auto-adjunto. Que se pode dizer sobre $AB - BA$?
- f) Sejam $A, B \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjuntos. Prove que $AB = BA$ se, e somente se, existe uma base ortonormal formada por autovetores comuns a A e B .

[Dica: Na aula já temos provado " \Rightarrow ".]

- g) Sejam $A, B \in \mathcal{L}(E)$ auto-adjuntos tais que BA é diagonalizável. Prove que AB também é diagonalizável.

[Dicas: I. Veja Lista 3a, exerc. f).

II. Uma transformação linear $A \in \mathcal{L}(E)$ é chamada *diagonalizável* se, e somente se, existe uma base \mathcal{U} de E tal que a matriz $\mathbf{a} = [A]_{\mathcal{U}}$ de A é da forma diagonal. Neste caso, os elementos de \mathcal{U} são os autovetores de A e a diagonal da matriz \mathbf{a} contém os autovalores de A .]