6.2 Multiplicadores de Lagrange

Queremos detectar máxima, ou mínima, locais da restrição $\tilde{f}$ de uma função $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ a um conjunto de nível $\{g = \kappa\} \subset \mathbb{R}^k$.

Ilustramos a idéia no caso de $k = 2$ variáveis. Suponha que fazemos um passeio na montanha e o valor da temperatura num ponto (x, y) na mapa seja $f(x, y)$. A Figura 6.1 mostra umas curvas de temperatura f constante. Suponha

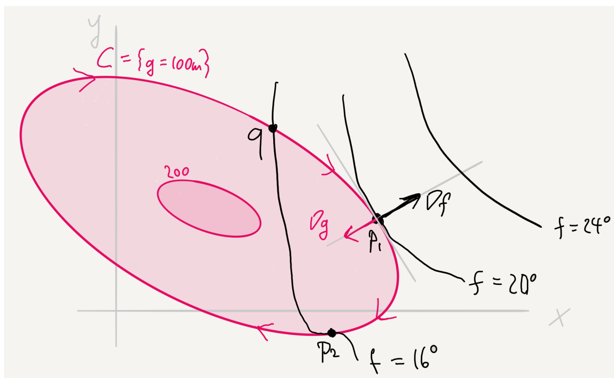

Figura 6.1: Tocar – não cruzar

que nosso passeio é restrito à altura g de 100 metros, ou seja passeamos ao longo da curva de nível $C = \{g = 100\}$. Queremos determinar as

$$\boxed{\textit{máxima/mínima locais da temperatura ao longo do nosso passeio } C.}$$

No ponto q atravessamos a curva de nível $\{f = 16°\}$ chegando de lugares com temperatura menor de 16° a saindo a lugares com temperatura mais de 16°, assim q nem é máximo, nem mínimo, local.

No ponto p_1 chegamos de lugares com temperatura menor de 20° a saímos a lugares com temperatura menor de 20°, assim p_1 é um maximo local ao longo de C. Geometricamente a diferença ao ponto q é que em p a curva do nosso passeio toca uma curva de nível da temperatura, enquanto em q cruza. Tocar traduz em ter o mesmo espaço tangente, equivalentemente, a mesma reta normal a qual contem ambos vetores gradientes $\nabla f(p_1) = \lambda \nabla g(p_1)$, assim um gradiente é múltiplo do outro. O fator λ sendo chamado de multiplicador de Lagrange.

Mas tocar não é suficiente para ter um máximo, ou mínimo, local: veja o ponto p_2. (Tocar é equivalente a ter um ponto crítico do que máxima, ou mínima, locais são casos especiais; veja Comentário 6.2.2 c).)

Teorema 6.2.1. *Seja $g \in C^1(U)$ num aberto $U \subset \mathbb{R}^k$ com valor regular κ. Seja $f\colon U \to \mathbb{R}$ diferenciável. Uma condição necessária para que um ponto p seja* *máximo, ou mínimo, local de f em $\{g=\kappa\}$ é que exista um real λ tal que*

$$\begin{cases}\nabla f(p) = \lambda \nabla g(p), \\ g(p) = \kappa.\end{cases} \tag{6.2.1}$$

Se existir o fator λ iguale $\frac{|\nabla f(p)|}{|\nabla g(p)|}$ e é chamado de ***multiplicador de Lagrange****.*

Demonstração. Suponha que p seja um máximo local de f no conjunto de nível $\{g=\kappa\}$. Ja sabemos de (5.3.6) que $\nabla g(p) \perp T_p\{g=\kappa\}$. Dado $v \in T_p\{g=\kappa\}$ escolha um caminho diferenciável $t \mapsto \gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_k(t)) \in \{g=\kappa\}$ passando $p=\gamma(0)$ e tal que $\dot\gamma(0)=v$. A função diferenciável $h(t) := (f\circ\gamma)(t)$ tem um máximo local em $t=0$ porque f tem em p. Assim a derivada é nula e a regra de cadeia nos da

$$0 = \dot h(0) = f_{x_1}(\gamma(0))\dot x_1(0) + \cdots + f_{x_k}(\gamma(0))\dot x_k(0) = \nabla f(p)\cdot v = df(p)v.$$

Isso prova que também $\nabla f(p)$ é ortogonal ($\perp$) a $T_p\{g=\kappa\}$. □

Comentário 6.2.2. a) No Teorema 6.2.1, se adicionalmente $f \in C^1$ e $\nabla f(p) \neq 0$, então existe o espaço tangente $T_p\{f=f(p)\}$ e é igual a $T_p\{g=\kappa\}$.

b) No outro lado, se $\nabla f(p)=0$ nada podemos dizer com relação a tangencia; veja Exercício 6.2.10 a) e b).

c) Nas hipóteses do Teorema 6.2.1 um ponto p é **ponto crítico da função restrição** $\tilde f := f|_{\{g=\kappa\}}$[6] se e somente se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que vale (6.2.1).

Comentário 6.2.3 (Receita)**.** Nas hipóteses do Teorema 6.2.1 tem três passos para determinar mínimo e máximo de f ao longo da restrição $\{g=\kappa\}$.

I. Verifique que κ é um valor regular.

II. Candidatos: Determine os pontos p e reais λ tal que o sistema (6.2.1) vale.

III. Verificação: Cada ponto p do passo II é um candidato para ser máximo, ou mínimo, local da restrição $\tilde f := f|_{\{g=\kappa\}}$ ao conjunto de nível. Cada um p requer uma análise individual. Possível métodos são, por exemplo

   (a) calcular os valores $f(q)$ dos pontos $q \in \{g=\kappa\}$ pertinho de p;
   (b) analisar o comportamento dos valores $f(q)$ para pontos $q_i \in \{g=\kappa\}$ tal que $|q_i| \to \infty$ sabendo que p é um ponto crítico de $\tilde f$;
   (c) outras técnicas. (Veja Exemplo 6.2.6.)

Exemplo 6.2.4 (Nem máximo, nem mínimo, local – candidato só)**.** A função é $f(x,y) := y+x^3$ e a restrição $g(x,y) := y-x^3 = 0$. **I.** Como $\nabla g(x,y) = (-3x^2, 1)$ nunca se anula, ainda em $\mathbb{R}^2$, o valor 0 é regular. **II.** O sistema (6.2.1) só tem uma solução $p=(0,0)$ e $\lambda=0$ onde $f(0,0)=0$. **III.** Ao longo da restrição a função é da forma $f(x,x^3)=2x^3$ o que é <0 para $x<0$ e >0 para $x>0$.

[6] por definição isso significa que para todo caminho diferenciável $t \mapsto \gamma(t) \in \{g=\kappa\}$ passando $p=\gamma(0)$ tem-se $\frac{d}{dt}(f\circ\gamma)(0)=0$

Exemplo 6.2.5 (Média geométrica $\le$ Média aritmética)**.** Para $a, b, c > 0$ vale

$$(a \cdot b \cdot c)^{\frac{1}{3}} \le \frac{a+b+c}{3} \tag{6.2.2}$$

e tem-se igualdade "=" se e somente se $a = b = c$.

Solução. Seja $f(x, y, z) := xyz$ definido para todos os reais $x, y, z > 0$. Dado $\kappa > 0$, vamos minimizar f sujeito à restrição $g(x, y, z) := x + y + z = \kappa$.
I. O gradiente é constante $\nabla g(x, y, z) = (1, 1, 1)$ e não-nulo.
II. O sistema (6.2.1) toma a forma e lida às conclusões seguintes

$$\begin{cases} yz = \lambda \\ xz = \lambda \\ xy = \lambda \\ \ \kappa = x + y + z \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = y = z \ \wedge \ \kappa = 3x.$$

Assim o único candidato para ser max/min local de $f(x, y, z) = xyz$ ao longo de $\{x + y + z = \kappa\}$ é $p = (\frac{\kappa}{3}, \frac{\kappa}{3}, \frac{\kappa}{3})$ com valor $f(p) = (\frac{\kappa}{3})^3$.
III. Provamos que $f(p) = (\frac{\kappa}{3})^3$ é o maior valor de $f(x, y, z) = xyz$ ao longo do conjunto de nível $\{x + y + z = \kappa\}$. Isso provará a desigualdade

$$f(x, y, z) \le f(p) = (\tfrac{\kappa}{3})^3 = (\tfrac{x+y+z}{3})^3$$

e, como $\kappa > 0$ foi arbitrário, esta desigualdade vale para todos $x, y, z > 0$ e é uma igualdade "=" se e somente se $x = y = z$.

A fórmula $(x, y, z) \mapsto xyz$ define uma função continua na fechadura compacta[7] G do conjunto de nível $\{g = \kappa\} \subset \mathbb{R}^3$, onde possui um máximo (global) segundo Teorema 6.1.12, o qual não pode estar na fronteira $G \setminus \{g = \kappa\}$ pois la o valor $xyz = 0$ será o menor. Assim esse máximo está em $\{g = \kappa\}$ onde, segundo II, o único candidato para ser um máximo, ou mínimo, local é p.

Exemplo 6.2.6 (Caixa sem tampa)**.** Qual é o volume máximo de uma caixa retangular sem tampa feita de $12m^2$ de papelão?

Solução. Sejam x, y, z os comprimentos das arestas onde z seja a altura. A função para maximizar é o volume $V(x, y, z) = xyz$ da caixa sujeito à restrição que a área dos 5 lados $g(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz = 12$ é $12m^2$. Podemos supor que $x, y, z > 0$ porque se um deles fosse nulo o volume seria nulo o que não é um máximo. Assim o sistema (6.2.1) toma a forma

$$\begin{cases} yz = \lambda(2z + y) \\ xz = \lambda(2z + x) \\ xy = \lambda(2x + 2y) \\ 12 = xy + 2xz + 2yz \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (1)\ {\color{red}x}yz = \lambda(2zx + xy) \\ (2)\ x{\color{red}y}z = \lambda(2yz + xy) \\ (3)\ xy{\color{red}z} = \lambda(2xz + 2yz) \\ (4)\quad 12 = xy + 2xz + 2yz \end{cases}$$

[7] a fechadura G é fechada e limitada (:$\Leftrightarrow$ compacta): todo ponto (x, y, z) de G está contido na bola de raio κ: $|(x, y, z)|^2 = x^2 + y^2 + z^2 \le (x + y + z)^2 = \kappa^2$

onde a segunda forma é obtida multiplicando as linhas 1, 2, 3 com x, y, e z. Observe que $\lambda \neq 0$. $\lambda = 0 \Rightarrow xyz = 0$ contradição a $x, y, z > 0$

I. Em todo ponto (x, y, z) cada componente de ∇g é positivo porque $x, y, z > 0$.

II. Subtraindo obtemos

$$(1) - (2) \quad \stackrel{\lambda\neq 0}{\Rightarrow} \quad xz = yz \quad \stackrel{z\neq 0}{\Rightarrow} \quad x = y$$

e

$$(2) - (3) \quad \stackrel{\lambda\neq 0}{\Rightarrow} \quad 2xz = xy \quad \stackrel{x\neq 0}{\Rightarrow} \quad y = 2z.$$

Usando a restrição (4) obtemos

$$(4) \;\; 12 = xy + 2xz + 2yz \stackrel{\substack{x=y\\ y=2z}}{=} 4z^2 + 4z^2 + 4z^2 = 12z^2 \quad \stackrel{z>0}{\Rightarrow} \quad z = 1.$$

Assim o único candidato obtido no passo I é $p = (2, 2, 1)$ de volume $V(p) = 4$.

III.[8] Usando "Média aritmética $\geq$ Média geométrica" (6.2.2) obtemos

$$2^2 = \tfrac{g(x,y,z)}{3} = \tfrac{xy+2xz+2yz}{3} \geq (xy \cdot 2xz \cdot 2yz)^{\frac{1}{3}} = (2xyz)^{\frac{2}{3}} = (2V(x, y, z))^{\frac{2}{3}} .$$

Tomando isso à potencia $\frac{3}{2}$ obtemos $8 = (2^2)^{\frac{3}{2}} \geq 2V(x, y, z)$, equivalentemente

$$V(x, y, z) \leq 4 \quad \forall (x, y, z) \in \{g = 12\}$$

onde vale "=" se e somente se $xy = 2xz = 2yz$ o que é verdadeiro ao longo da restrição $\{g = 12\}$ exatamente para nosso ponto $p = (2, 2, 1)$. Assim p é o máximo de V em $\{g = 12\}$, ainda máximo estrito.

Isso prova que a caixa retangular sem tampa de medida $2m \times 2m \times 1m$, assim de volume $4m^2$, é a maior possível dado $12m^2$ de papelão.

Exercício 6.2.7. Determine o ponto da reta $x + 2y = 1$ cujo produto das coordenadas seja máximo.

Exercício 6.2.8. Determine o ponto da curva $xy = 1$, $x > 0$, $y > 0$, mais próximo da origem.

Exercício 6.2.9. Qual o ponto da parábola $y = x^2$ mais próximo de $(14, 1)$?

Exercício 6.2.10. Encontre extremas locais da função com a restrição dada. Podemos dizer algo com relação a tangencia? (Veja Comentário 6.2.2.)

(a) $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$ sujeito à restrição $x + 2y - 1 = 0$.

(b) $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ sujeito à restrição $x^2 + y^2 = 1$.

---

[8] proposta do aluno Arthur das turmas 1 2 de MA211 em 2023-2; depois vi que a própria desigualdade (6.2.2) pode ser demonstrada com o método de multiplicadores de Lagrange