Apêndice A

Uns básicos de Cálculo I

Na apresentação dos básicos seguintes, e suas demonstrações, seguimos o livro excelente "Postmodern Analysis" de Jürgen Jost [Jos05].

Teorema A.0.9. *Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função com um mínimo, ou máximo, local no ponto $x_0 \in (a,b)$. Se f é diferenciável em x_0, então $f'(x_0) = 0$.*

Demonstração. Tratamos o caso de um mínimo (para máximo considere $-f$). Vale que $f(x) \geq f(x_0)$ para todos os $x \in (a,b) \cap (-\delta, \delta)$ para um $\delta > 0$. Se $x < x_0$ vale $\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} \leq 0$ enquanto para $x > x_0$ vale $\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} \geq 0$. Como f é diferenciável em x_0, o limite seguinte existe

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x} = 0$$

e é 0, porque um limite não pode ser diferente ao longo de dois caminhos. □

Teorema A.0.10 (Teorema de Rolle)**.** *Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínuo onde $a < b$, diferenciável em (a,b), e $f(a) = f(b)$. Então existe $x_0 \in (a,b)$ com $f'(x_0) = 0$.*

Demonstração. Se f é constante em $[a,b]$, então $f'(x) = 0$ para todos $x \in (a,b)$. Se f não é constante, existe um $x_* \in (a,b)$ com $f(x_*) \neq f(a) = f(b)$. Suponhamos que $f(x_*) > f(a)$ (no caso '<' continue com $F := -f$). Segundo Teorema 6.1.12 do Valor Extremo a função contínua f no compacto $[a,b]$ assume seu máximo num ponto $x_0 \in [a,b]$. Num máximo $f(x_0) \geq f(x_*) > f(a) = f(b)$, consequentemente $x_0 \in (a,b)$. Segue $f'(x_0) = 0$ conforme Teorema A.0.9. □

Corolário A.0.11 (Teorema do Valor Médio)**.** *Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua onde $a < b$, diferenciável em (a,b). Então existe $x_0 \in (a,b)$ com*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração. Seja $F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Como $F(a) = 0 = F(b)$ existe, segundo o Teorema A.0.10 de Rolle, um $x_0 \in (a,b)$ tal que $0 = F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Teorema A.0.12 (Expansão de Taylor)**.** *Suponha que a função $f\colon [a,x]\to\mathbb{R}$ (ou $f\colon [x,a]\to\mathbb{R}$ dependente se $a<x$ ou $x<a$) possui uma derivada contínua $f^{(n)}$ em $[a,x]$ (resp. em $[x,a]$) e ainda seja $n+1$ vezes continuamente diferenciável em (a,x) (resp. em (x,a)). Então existe um $\bar{x}$ entre x_0 e x com*

$$f(x)=T_n(x)+R_n(x;\bar{x}) \tag{A.0.1}$$

onde o ***n-ésimo polinômio de Taylor*** *é* $T_n(x)=T_n^{f,a}(x)$

$$T_n(x):=f(a)+f'(a)(x-a)+\tfrac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2+\dots+\tfrac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

e o ***resto de Lagrange*** *é* $R_n(x;\bar{x})=R_n^{f,a}(x;\bar{x})$

$$R_n(x;\bar{x}):=\tfrac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\bar{x})(x-a)^{n+1}.$$

Demonstração. Como $x\neq a$ definimos $z\in\mathbb{R}$ através da igualdade

$$f(x)=\sum_{\ell=0}^{n}\frac{f^{(\ell)}(a)}{\ell!}(x-a)^\ell+\frac{1}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}z. \tag{A.0.2}$$

A função definida como segue

$$\varphi(y):=f(x)-f(y)-\sum_{\ell=1}^{n}\frac{f^{(\ell)}(y)}{\ell!}(x-y)^\ell-\frac{1}{(n+1)!}(x-y)^{n+1}z$$

é contínua em $[a,x]$ e diferenciável em (a,x) (suponha $a<x$ o caso $a>x$ sendo análogo). Obviamente $\varphi(x)=0$ e, segundo a definição de z, anula-se também $\varphi(a)=0$. Pelo Teorema A.0.10 de Rolle existe $\bar{x}\in(a,x)$ com $\varphi'(\bar{x})=0$. Como

$$\begin{aligned}\varphi'(y)&=-f'(y)-\underbrace{\sum_{\ell=1}^{n}\left(\tfrac{f^{(\ell+1)}(y)}{\ell!}(x-y)^\ell-\tfrac{f^{(\ell)}(y)}{(\ell-1)!}(x-y)^{\ell-1}\right)}_{=\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n-f'(y)}+\tfrac{1}{n!}(x-y)^n z\\&=-\tfrac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n+\tfrac{1}{n!}(x-y)^n z,\end{aligned}$$

o valor nulo $0=\varphi'(y=\bar{x})$ implica que

$$z=f^{(n+1)}(\bar{x}).$$

Insera isso em (A.0.2) para receber (A.0.1). □

Referências Bibliográficas

[Gui01] Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo*, volume 2. LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 5a edition, 2001.

[Jos05] Jürgen Jost. *Postmodern analysis*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2005.