Capítulo 4

Diferenciabilidade

Se[1] uma função g de uma variável $x \in \mathbb{R}$ admite derivada num ponto a, ou seja, se o limite $\lim_{h\to 0} \frac{g(a+h)-g(a)}{h}$ existir, então g é contínua neste ponto. Note que para funções de uma variável, derivada e derivada parcial é a mesma coisa.

No caso de duas ou mais variáveis existência das derivadas parciais $f_i := f_{x_i}$ num ponto não garante continuidade de f neste ponto. Por isso introduz-se uma noção de diferenciabilidade mais forte como derivada parcial.

No diagrama seguinte ilustramos o programa e os resultados principais (A, Â, B, C, e D) do Capítulo 4. Seja $f\colon \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$ uma função num subconjunto aberto U, seja $p \in U$ um ponto. Escrevemos f_i para a derivada parcial em respeito à i-ésima variável.

$$
\begin{tikzcd}
\forall f_i \text{ existem em } p \arrow[rr, dotted, no head, "\not\Rightarrow", "\mathrm{A}"'] \arrow[dr, Rightarrow, shift right, "\text{e } \forall f_i \text{ contínuas} \quad \hat{\mathrm{A}}"'] & & f \text{ contínua em } p \\
& f \text{ diferenciável em } p \arrow[ul, Rightarrow, shift right, "\mathrm{C}"'] \arrow[ur, Rightarrow, "\mathrm{B}"'] \arrow[d, Leftrightarrow, "\mathrm{D}"] & \\
& \begin{cases} \text{a) } \forall f_i \text{ existem em } p \\ \text{b) } \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{|(h,k)|} = 0 \end{cases} &
\end{tikzcd}
$$

onde b) refere-se ao caso de duas variáveis, o caso de $k \geq 2$ variáveis sendo análogo. As implicações reciprocas de Â, B, e C são falsas; veja respectivamente os Exercícios 4.2.4, 4.2.2 (cone), e 4.1.1.

Neste Capítulo 4 seguimos em grandes partes o livro excelente [Gui01, §11].

[1] Cap. 4 atualizado 20 Ago 2023

4.1 Derivadas parciais são insuficiente

A. *Existência de derivadas parciais* $f_i(p) \not\Rightarrow f$ *contínua em* p.

Para ver isso, considere a função

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Exercício 4.1.1. Para a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida acima

a) calcule as derivadas parciais f_x e f_y em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; $f_x = \frac{y^3-2yx^2}{(x^2+y^2)^2}$

b) confere que $f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$;

c) mostre que f não é contínua na origem $(0,0)$; veja (2.1.2)

d) mostre que f_x e f_y não são contínuas na origem $(0,0)$.

4.2 Diferenciação

No caso de uma função g de uma variável x, num ponto a são equivalente

$$\begin{aligned} & g \text{ diferenciável no ponto } a \text{ com derivada } \alpha \\ :\Longleftrightarrow\ & \lim_{h\to 0} \tfrac{g(a+h)-g(a)}{h} = \alpha \\ \Longleftrightarrow\ & \lim_{h\to 0} \tfrac{g(a+h)-g(a)-\alpha h}{h} = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \lim_{h\to 0} \tfrac{g(a+h)-g(a)-\alpha h}{|h|} = 0. \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

A última equivalência vale no caso de um limite nulo.[2] Note que, em contraste ao primeiro limite, o terceiro limite se oferece para generalização ao caso de duas ou mais variáveis:

Definição 4.2.1 (Diferenciável)**.** Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ uma função e $(a,b) \in U$.

a) Diz-se que f é **diferenciável no ponto** (a,b) se existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\overbrace{f(a+h,b+k) - f(a,b) - \alpha h - \beta k}^{=:R_{\alpha,\beta}(h,k)}}{|(h,k)|} = 0 \tag{4.2.2}$$

ou equivalentemente

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{R_{\alpha,\beta}(h,k)}{|(h,k)|} = 0 \tag{4.2.3}$$

onde $|(h,k)| = \sqrt{h^2+k^2}$ é a distancia do ponto (h,k) da origem.

[2] o ponto na definição (2.1.1) do limite $L=0$ é que $\left|\frac{G(h)}{h} - 0\right| = \left|\frac{G(h)}{|h|} - 0\right|$

b) Diz-se que f é **diferenciável** se é diferenciável em todo ponto.

c) Para funções $f\colon \mathbb{R}^k \supset U \to \mathbb{R}$ de k variáveis generaliza-se a) e b) analogamente.

d) Chamamos uma lista de funções $(f^1, \dots, f^m)\colon \mathbb{R}^k \supset U \to \mathbb{R}^m$ **diferenciável** se cada um membro $f^1, \dots, f^m\colon \mathbb{R}^k \supset U \to \mathbb{R}$ é diferenciável.

Diferenciabilidade implica continuidade e assim resolve o déficit A das derivadas parciais.

$$\boxed{\text{B. } f \textit{ diferenciável em } p \Rightarrow f \textit{ contínua em } p.}$$

Demonstração de B. Com a definição de $R_{\alpha,\beta}(h,k)$ e linearidade do limite obtemos a primeira identidade no seguinte

$$\begin{aligned}
&\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h, b+k) \\
&= f(a,b) + \lim_{(h,k)\to(0,0)} (\alpha h + \beta k) + \lim_{(h,k)\to(0,0)} \underbrace{\frac{R_{\alpha,\beta}(h,k)}{|(h,k)|}}_{\to 0 \text{ hip. } f \text{ dif.}} \cdot \underbrace{|(h,k)|}_{\text{limitado}} \\
&= f(a,b).
\end{aligned}$$

□

Exercício 4.2.2 (Reciproco de B é falso - Cone)**.** O gráfico da função $f(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}$ é um cone em $\mathbb{R}^3$. Mostre que na origem $(0,0)$ a função f é contínua, mas não tem derivadas parciais, assim não é diferenciável segundo C embaixo.

As propriedades A e B indicam que diferenciabilidade é mais forte como existência das derivadas parciais f_i. Assim é plausível o seguinte.

$$\boxed{\text{C. } f \textit{ diferenciável em } p \underset{(\not\Leftarrow)}{\Rightarrow} \textit{todas derivadas parciais } f_i(p) \textit{ existem.}}$$

O reciproco de C é falso como Exercício 4.1.1 mostra: Aquela função f admite todas derivadas parciais, particularmente na origem $f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$. Mas f não é contínua em $(0,0)$ e assim, segundo B, nao é diferenciável em $(0,0)$.

Um exemplo de uma função tal que, na origem: todas derivadas parciais existem, a função é contínua, mas não diferenciável, é o seguinte.

Exercício 4.2.3 (Reciproco de C é falso)**.** Mostre que a função

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , (x,y) = (0,0), \end{cases} \tag{4.2.4}$$

a) é contínua na origem, b) admite derivadas parciais $f_1(0,0)$ e $f_2(0,0)$, mas c) não é diferenciável na origem. c) Outro critério chegará em Exc. 5.3.8.

[Dicas. a) b) Coordenadas polares.]

Demonstração de C. Pela hipótese existem α, β tal que o limite em (4.2.1) existe quando $(h,k) \to (0,0)$. Assim o limite existe ao longo de qualquer caminho lidando à origem, por exemplo $(h,0) \to (0,0)$ ao longo do eixo-x. Obtemos

$$0 \stackrel{(4.2.1)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b) - \alpha h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b) - f(a,b)}{h} - \alpha$$

o que é a definição que $f_x(a,b)$ existe e iguale α. Analogamente para $f_y(a,b)$. □

4.2.1 Uma condição equivalente

Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ uma função e $(a,b) \in U$. Vale a equivalência

$$\boxed{\text{D. } f \text{ diferenciável em } (a,b) \Leftrightarrow \begin{cases} a) \text{ todas } f_i(a,b) \text{ existem} \\ b) \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{|(h,k)|} = 0 \end{cases}}$$

onde a função r em b) é definida por

$$r(h,k) := f(a+h,b+k) - f(a,b) - f_x(a,b)h - f_y(a,b)k \tag{4.2.5}$$

o que faz sentido dado a informação em a) que todas as derivadas parciais no ponto (a,b) existem. Observe que $r = R_{\alpha,\beta}$ onde $\alpha = f_x(a,b)$ e $\beta = f_y(a,b)$.

Note que, se f é diferenciável em (a,b), então segue ademais

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} r(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h,b+k) - f(a,b) = 0$$

porque f é contínua em (a,b), segundo § 4.2 C.

Demonstração de D. '⇒' Seja f diferenciável em (a,b). a) vale conforme C. b) A demonstração de C mostra que $\alpha = f_x(a,b)$ e $\beta = f_y(a,b)$, assim $R_{\alpha,\beta} = r$ e

$$0 \stackrel{(4.2.3)}{=} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \tfrac{R_{\alpha,\beta}(h,k)}{|(h,k)|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \tfrac{r(h,k)}{|(h,k)|}.$$

'⇐' Óbvio usando $\alpha := f_x(a,b)$ e $\beta := f_y(a,b)$. □

4.2.2 Uma condição suficiente importantíssima

O que é suficiente, para que a existência de todas as derivadas parciais $f_i(p)$ implica diferenciabilidade de f em p, é continuidade das f_i em p como veremos próximo. Frequentemente é mais fácil verificar continuidade das derivadas parciais do que diferenciabilidade pela definição, ou seja pelo limes (4.2.2). Por isso, o critério seguinte é importantíssimo no dia-a-dia.

$$\boxed{\hat{\text{A}}. \text{ Em } p \text{ todas } f_i \text{ existem e são contínuas } \underset{(\not\Leftarrow)}{\Rightarrow} f \text{ diferenciável em } p.}$$

Demonstração de Â. [Gui01, §11.2]. □

O reciproco de Â é falso. Enquanto, segundo C, todas derivadas parciais (de primeira ordem) existem em p, não precisam ser contínuas:

Exercício 4.2.4. Considere a função $\sigma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dado por

$$\sigma(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & ,\ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & ,\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mostre que

a) σ é diferenciável em $(0,0)$ de fato em $\mathbb{R}^2$;

b) σ_x e σ_y existem em $\mathbb{R}^2$;

c) mas σ_x e σ_y não são contínuas em $(0,0)$.

4.2.3 A classe C^k revisitada

Seja $f\colon \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}$ uma função e $k \in \mathbb{N}_0$. Pela Definição 3.4.1 a função f é de classe $C^k(U)$ se e somente se todas as derivadas parciais de f de todas as ordens de zero ate inclusive ordem k existem em U e são contínuas em U. É muito trabalho checar existência e continuidade de $1+n+n^2+\cdots+n^k$ funções.

Na verdade só precisa-se verificar existência e continuidade de n^k funções:

Lema 4.2.5. *Uma função f é de classe $C^k(U)$ se e somente se todas as derivadas parciais de ordem k existem em U e são contínuas em U.*

Demonstração. Suponha que todas as derivadas parciais de f de ordem k existem em U e são contínuas em U. Uma derivada parcial de ordem k é da forma $f_{i_1 i_2 \ldots i_k} = (f_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}})_{i_k}$ onde $i_1, i_2, \ldots, i_k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Nas outras palavras todas derivadas parciais (da primeira ordem) da função $g := f_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}$ existem e são contínuas em U. Segundo Â a função $g\colon U \to \mathbb{R}$ é diferenciável e assim, segundo B, contínua. Este argumento prova que todas derivadas parciais de ordem $k-1$ são contínuas em U também. Daí concluímos com a mesma argumentação que todas derivadas parciais de ordem $k-2$ são contínuas em U. Iterando concluímos continuidade das derivadas parciais de ordem $k-3$, $k-4$, ..., 1, 0. A última conclusão (ordem 0) diz que f é contínua em U. □

4.3 Aplicação – plano tangente

No § 3.3 tínhamos introduzidos duas curvas C_1 e C_2 no gráfico $S = \mathrm{gr}(f)$ de uma função contínua $f\colon \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ passando um ponto $P = (a, b, f(a, b)))$.

Para definir o plano tangente suponhamos que f é de classe $C^1(U)$.

Assim plano tangente num ponto varia continuamente com o ponto. Os dois vetores velocidade $C_1'(a)$ e $C_2'(b)$ geram as tangentes T_1 e T_2 às curvas no ponto P. Os dois vetores velocidade são linearmente independente:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \alpha C_1'(a) + \beta C_2'(b) = \begin{pmatrix}\alpha\\0\\\alpha f_x(a,b)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\\beta\\\beta f_y(a,b)\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0 = \beta.$$

Definição 4.3.1. As retas T_1 e T_2 tangente a $S = \mathrm{gr}(f)$ no ponto P geram um plano $T_P S$ em $\mathbb{R}^3$ passando P, o **plano tangente** ao gráfico no ponto P.

Proposição 4.3.2. *Num ponto $P = (x_0, y_0, z_0)$ o plano tangente $T_P S$ a um gráfico $S = \mathrm{gr}(f)$ é dado pela equação afim*

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0). \tag{4.3.1}$$

Demonstração. Um plano geral passando $P = (x_0, y_0, z_0)$ é dado pela equação

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

onde A, B, C são três constantes. Conforme § 3.3 a tangente T_1 é dada pelas equações $z = z_0 + f_x(x_0, y_0)(x - x_0)$ e $y = y_0$. Segue $C = 1$ e $A = f_x(x_0, y_0)$. Para T_2 temos $z = z_0 + f_y(x_0, y_0)(y - y_0)$ e $x = x_0$. Segue $C = 1$ e $B = f_y(x_0, y_0)$. □

Escreve-se, equivalentemente, a equação do plano tangente na forma de um produto escalar: $T_P S$ é composto dos pontos $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ de produto zero

$$N_P \cdot (X - P) = 0, \qquad N_P := \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) \\ f_x(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Usa-se o fato que um plano é unicamente determinado por um ponto dele e uma reta ortogonal. No nosso caso temos o ponto $P \in S$, a reta ortogonal passando P é dada por

$$R_P := P + \mathbb{R} N_P := \{t N_P \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Chama-se R_P de **reta normal** e N_P de **vetor normal**.

Exercício 4.3.3. Seja $S = \{z = 2x^2 + y^2\} \subset \mathbb{R}^3$. Determine a equação do plano tangente $T_{(1,1,3)} S$ e também vetor e reta normal nesse ponto.

4.4 Derivada

Consideramos temporariamente listas de funções $f = (f^1, \dots, f^m)$.

Definição 4.4.1 (Valores em $\mathbb{R}^m$)**.** Uma aplicação $f = (f^1, \dots, f^m) \colon \mathbb{R}^k \supset U \to \mathbb{R}^m$ de k variáveis com valores em $\mathbb{R}^m$ é chamada de **diferenciável num ponto** $a \in U$ se cada um membro $f^1, \dots, f^m \colon U \to \mathbb{R}$ é diferenciável em a.

Neste caso a **derivada** de f am a, denotada de $f'(a)$ ou $Df(a)$, é a transformação linear $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ cuja matriz em respeito às bases canônicas,[3] chamada de **matriz Jacobiana** de f no ponto a, tem como entradas as derivadas parciais $f^i_{x_j}(a) = \frac{\partial f^i}{\partial x_j}(a)$, ou seja

$$\mathrm{Jac}_f(a) := \frac{\partial(f^1,\dots,f^m)}{\partial(x_1,\dots,x_k)} := [Df(a)]_{\mathcal{E}^k,\mathcal{E}^m} = \begin{bmatrix} f^1_{x_1}(a) & \dots & f^1_{x_k}(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f^m_{x_1}(a) & \dots & f^m_{x_k}(a) \end{bmatrix}. \quad (4.4.1)$$

Denotamos de $\mathrm{Mat}(m \times k)$ o conjunto das matrizes de m linhas e k colunas. Assim $\mathrm{Jac}_f(a) = \frac{\partial(f^1,\dots,f^m)}{\partial(x_1,\dots,x_k)} \in \mathrm{Mat}(m \times k)$.

Note que a matriz Jacobiana (4.4.1) depende continuamente do ponto $a \in \mathrm{U}$ se e somente todas derivadas parciais são continuas em U – o que diferenciabilidade em p não garante. Vamos pedir mais:

Definição 4.4.2 (Aproximação linear)**.** Se todos membros $f^1,\dots,f^k$ sao de classe $C^1(U)$, a derivada é chamada de **aproximação linear** de f no ponto a.

Já voltamos para funções.

Definição 4.4.3 (Valores em $\mathbb{R}$)**.** Para funções $f\colon \mathbb{R}^k \supset U \to \mathbb{R}$ e $a \in U$ usamos o símbolo $df(a)$ para a derivada e chamamos a aplicação

$$df\colon U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}), \quad a \mapsto df(a)$$

de **diferencial** de f no ponto a. O conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{R}^k,\mathbb{R})$ é composto das transformações lineares $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$.

Em respeito às bases canônicas a derivada em a é a matriz $1 \times k$ dada por $[df(a)] = [f_{x_1}(a) \dots f_{x_k}(a)]$. Para $i \in \{1,\dots,k\}$ vale

$$df(a)e_i = [f_{x_1}(a) \dots f_{x_i}(a) \dots f_{x_k}(a)] \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = f_{x_i}(a).$$

Para $v \in \mathbb{R}^k$ obtemos

$$df(a)v = [f_{x_1}(a) \dots f_{x_k}(a)] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{bmatrix} = f_{x_1}(a)v_1 + \dots + f_{x_k}(a)v_k.$$

[3] $\mathcal{E}^k = \{e_1,\dots,e_k\} \subset \mathbb{R}^k$ onde $e_i \in \mathbb{R}^k$ é a lista cujos membros são nulos só o i-ésimo é 1; $\mathcal{E}^m = \{e_1,\dots,e_m\} \subset \mathbb{R}^m$onde $e_i \in \mathbb{R}^m$ é a lista cujos membros são nulos só o i-ésimo é 1

Isso implica a identidade

$$df = f_{x_1} dx_1 + \cdots + f_{x_k} dx_k$$

entre as diferenciais df e $dx_1, \dots, dx_k$ das funções coordenadas

$$x_i \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}, \quad p \mapsto p_i, \qquad i \in \{1, \dots, k\}.$$

Só resta observar que $v_i = \frac{d}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0} (p_i + \varepsilon v_i) = \frac{d}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0} x_i(p + \varepsilon v) = dx_i(p)v$.