Capítulo 2

Limites e Continuidade

2.1 Limites

Definição 2.1.1 (Limite)**.** Seja $f\colon \mathbb{R}^k \supset D \to \mathbb{R}$ uma função com domínio D. Seja $a \in \overline{D}$ um elemento da fechadura de D. Dizemos que o **limite** de f quando a variável u tende a a (existe e) é igual a $L \in \mathbb{R}$, em símbolos

$$\lim_{u \to a} f(u) = L,$$

se e somente se

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall u \in D\colon \quad |u - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(u) - L| < \varepsilon.$$

Caso o limite L existir, então L é independente do caminho C ao longo do que os pontos u aproximam-se a a:

Lema 2.1.2 (Critério)**.** *Suponha que o limite de f quando os pontos u tendem a a ao longo de um caminho C_1 é L_1 e ao longo de um caminho C_2 é L_2 com $L_1 \neq L_2$. Então $\lim_{u \to a} f(u)$ não existe.*

Demonstração. Escolha $\varepsilon := (L_2 - L_1)/2$. □

Exemplo 2.1.3 (Limites não existem)**.** As funções são definidas em todo ponto menos da origem.

a) Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ igual -1 para $x < 0$, igual 1 para $x > 0$.

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \underbrace{f(x)}_{\equiv -1} = -1 \neq 1 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \underbrace{f(x)}_{\equiv 1}.$$

b)

$$\lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ \text{ao longo eixo-}x}} \underbrace{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}_{\equiv 1} = 1 \neq -1 = \lim_{\substack{(x,y) \to (0,0) \\ \text{ao longo eixo-}y}} \underbrace{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}_{\equiv -1}.$$

c)

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{ao longo} \\ \text{diagonal } y=x}} \underbrace{\frac{xy}{x^2+y^2}}_{\equiv 1/2} = \frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{ao longo} \\ \text{anti-diagonal } y=-x}} \underbrace{\frac{xy}{x^2+y^2}}_{\equiv -1/2}. \qquad (2.1.1)$$

Os limites ao longo do eixo-x, e ao longo do eixo-y, são ambos nulos.

d) Seja $m \in \mathbb{R}$ a inclinação da reta $y = mx$.

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{reta } y=mx}} \frac{xy^2}{x^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{xm^2}{1+m^4x^2} = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ \text{parábola } x=y^2}} \frac{xy^2}{x^2+y^4}.$$

O limite ao longo da parábola $x = -y^2$ é $-\frac{1}{2}$.

Exemplo 2.1.4 (Limite existe)**.** O limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$ é nulo.

Demonstração 1 (Definição 2.1.1). Escolha $\varepsilon > 0$ e defina $\delta := \varepsilon/3$. Seja $\sqrt{x^2+y^2} = |(x,y)-(0,0)| < \delta = \varepsilon/3$. Então

$$\left| \frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0 \right| = 3|y| \cdot \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 3|y| = 3\sqrt{y^2} \leq 3\sqrt{x^2+y^2} \leq 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Demonstração 2 (Coordenadas polares 1.1.1). De $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$ segue

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{3r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} = 3\lim_{r\to 0} r \overbrace{\cos^2\theta\sin\theta}^{\text{limitado}} = 0.$$

Seqüências em $\mathbb{R}^k$

As propriedades do limite de uma seqüência $(u^\ell) = \left(u^\ell\right)_{\ell=1}^\infty$ em $\mathbb{R}^k$, onde cada um membro $u^\ell = (u_1^\ell, \ldots, u_k^\ell) \in \mathbb{R}^k$ é uma lista ordenada de k números, são análogo a seqüências em $\mathbb{R}$. Dizemos que o limite definido por

$$\lim_{\ell\to\infty} u^\ell := \left(\lim_{\ell\to\infty} u_1^\ell, \ldots, \lim_{\ell\to\infty} u_k^\ell \right)$$

existe, se os k limites à direita existem.

Lema 2.1.5. *Dado seqüências $(u^\ell), (v^\ell) \subset \mathbb{R}^k$ com limites a e b, respectivamente. Então vale o seguinte*

(i) $\lim_{\ell\to\infty}(u^\ell + v^\ell) = a + b$;

(ii) $\lim_{\ell\to\infty}(u^\ell \cdot v^\ell) = a \cdot b$.

Lema 2.1.6 (Teorema do sanduíche)**.** *Dado três seqüências $(u^\ell) \leq (v^\ell) \leq (w^\ell)$*[1] *em $\mathbb{R}^k$ tal que $\lim_{\ell\to\infty} u^\ell = a = \lim_{\ell\to\infty} w^\ell$. Então $\lim_{\ell\to\infty} v^\ell = a$.*

---

[1] $(u^\ell) \leq (v^\ell) \leq (w^\ell) \; :\Leftrightarrow \; \forall \ell \in \mathbb{N}$: membros correspondentes de u^ℓ, v^ℓ, e W^ℓ satisfazem

$$u_1^\ell \leq v_1^\ell \leq w_1^\ell \quad , \quad u_2^\ell \leq v_2^\ell \leq w_2^\ell \quad , \quad \ldots \quad , \quad u_k^\ell \leq v_k^\ell \leq w_k^\ell$$

2.2 Continuidade

Definição 2.2.1. Seja $f\colon \mathbb{R}^k \supset D \to \mathbb{R}$ uma função com domínio D.

a) A função f é dita **contínua num ponto $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{D}$ do seu domínio** se 1) o limite $\lim_{u\to a} f(u)$ existe e 2) é igual ao valor $f(a)$. Em símbolos

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall u \in D\colon \quad |u - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(u) - f(a)| < \varepsilon.$$

b) A função f é **contínua** se é contínua em todo ponto do seu domínio. Neste caso dizemos que f é de **classe $\boldsymbol{C^0}$**. Denotamos de $C^0(D)$ o conjunto de todas as funções contínuas com domínio D.

Teorema 2.2.2 (Adição e multiplicação)**.** *Suponha que as funções f, g são contínuas nos seus domínios. Então são contínuas as funções $f+g$, $f-g$, e fg no seu domínio* $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$ *e a função f/g no seu domínio* $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \cap \{g \neq 0\}$.

Corolário 2.2.3. *a) Polinômios $p = p(x_1, \dots, x_k)$ são contínuas em $\mathbb{R}^k$.*
b) Funções racionais $h = p/q$, onde p e q são polinômios, são contínuas em $\mathbb{R}^k \setminus \{q = 0\}$.

Demonstração. Sabemos do calculo I que polinômios de uma variável são contínuas em $\mathbb{R}^k$. Polinômios $p(x_1, \dots, x_k)$ de varias variáveis são somas *finitas* de termos da forma $a_1 x_1^{j_1} + \cdots + a_k x_k^{j_k}$ onde $a_i \in \mathbb{R}$ e $j_i \in \mathbb{N}_0$. Aplique Teorema 2.2.2. □

Exercício 2.2.4. Determine o maior domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ no qual a função $f(x,y) := \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ é contínua.

Solução. Como função racional f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{x^2 + y^2 = 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Segundo Exemplo 2.1.3 b) o limite de f quando $(x,y) \to (0,0)$ não existe. Assim $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Comentário 2.2.5. A função $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

é descontínua no ponto $(0,0)$; veja Exemplo 2.1.3 b).

Exercício 2.2.6. Mostre que a função $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$h(x,y) := \begin{cases} \frac{3x^2 y}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

é contínua.

Solução. A função $\frac{3x^2y}{x^2+y^2}$ é racional assim contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{x^2 + y^2 = 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Resta checar se o limite de h quando $(x,y) \to (0,0)$ existe e é igual a $h(0,0)$: Isso é verdadeiro segundo Exemplo 2.1.4.

Teorema 2.2.7 (Composição)**.** *Se as funções $f(x_1,\dots,x_k)$ e $g(y)$ são contínuas e o domínio de g é contido na imagem de f, a* ***função composta***

$$h := g\circ f\colon \mathbb{R}^k \supset \operatorname{dom} f \to \mathbb{R}, \quad (x_1,\dots,x_k)\mapsto g(f(x_1,\dots,x_k))$$

é contínua.

Exercício 2.2.8. Determine o maior domínio D tal que a função $h(x,y) :=$ arctan$(\frac{y}{x})$ é contínua.

Resultado. Como $\operatorname{dom}(\arctan) = \mathbb{R} = \operatorname{im} f$ onde $f(x,y) := \frac{y}{x}$, obtemos $D = \operatorname{dom} f = \mathbb{R}^2 \setminus \{x=0\}$.