Lista 1c - Diferenciabilidade

Lista 1c

MA211
2023-1

Diferenciabilidade

Plano tangente T_pS

Vetor normal N_p

Aproximação linear L

Diferencial df

$U \subset \mathbb{R}^2$ aberto $\quad (a,b) \in U$

$f : \mathbb{R}^2 \supset U \longrightarrow \mathbb{R}$

pode substituir $\mathbb{R}^2$ por $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

déficit das derivadas parciais:

I. existência de todas derivadas parciais de f num ponto $\not\Longrightarrow$ continuidade de f neste ponto

Exemplo $\quad f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Exc.1 Para este f

a) Calcule f_x e f_y em $\mathbb{R}^2$

b) Checar: $f_x(0,0) = 0 = f_y(0,0)$ ✓

c) Mostre: f não é contínua em $(0,0)$

d) Mostre: f_x e f_y não são contínuas em $(0,0)$

Def. a) f é diferenciável em $(a,b) \in U$

$:\Longleftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ t.q.

$$\boxed{\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,b+k)-f(a,b)-\alpha h-\beta k}{|(h,k)|} = 0} \quad (DIF)$$

b) f é diferenciável $:\Longleftrightarrow$ f dif. no todo ponto

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{II. } f \text{ dif. em } (a,b)\in U \\ \Rightarrow \text{todas derivs. parcs. de } f \text{ em } (a,b) \text{ existem}\end{array}}$$

ideia da prova: use $(h,k)=(h,0)$ com $h\to 0$ em (DIF)

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} - \frac{\alpha \cancel{h}}{\cancel{h}} = 0$$

$\xRightarrow[\text{def.}]{\text{por}}$ $f_x(a,b)$ existe e é igual α

use $(h,k)=(0,k)$ para receber $f_y(a,b)=\beta$ #

Coment. Seja f dif. em (a,b), defina

$$\boxed{r(h,k) := f(a+h,b+k)-f(a,b)-f_x(a,b)\,h-f_y(a,b)\,k.}$$

Interprete r como o resto do que falta para o incremento $(h,k) \mapsto f(a+h,b+k)-f(a,b)$ de f fosse uma função linear.

diferenciabilidade resolve o déficit
das derivadas parciais em I :

III f diferenciável em (a,b)
$\Longrightarrow$ f contínua em (a,b)

<u>Obs.</u> Então f no Exc. I não é diferenciável
ainda que todas derivs. parcs. existem!

O que garante diferenciabilidade?

IV

f dif. em $(a,b) \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{a) todas derivs. parcs. existem no ponto } (a,b) \\ \text{b) } \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{r(h,k)}{|(h,k)|} = 0 \end{cases}$

<u>Le.</u>: Existência em a) junto com <u>continuidade</u> dos derivs. parcs. $\Longrightarrow$ b).

$\hat{I}$ Se todas derivs. parcs. de f num **aberto** existem e são contínuas

Le. e IV $\Longrightarrow$ f dif. neste **aberto**

$\overset{III}{\Longrightarrow}$ f contínua neste **aberto**

prova $\hat{I}$: Guidorizzi Calc. 2 §11.2 p. 195

$$\boxed{\text{III. } f \text{ dif. em } (a,b) \Rightarrow f \text{ contínua em } (a,b)}$$

$\Updownarrow$

$$\boxed{\begin{gathered}\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ tq.} \\ \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{R_{\alpha,\beta}(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0\end{gathered}}$$

$\Updownarrow$

$$\underbrace{\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h,b+k)}_{①\text{ existe}} \overset{②}{=} f(a,b)$$

onde $\underline{R_{\alpha,\beta}(h,k)} := \underline{f(a+h,b+k)} - f(a,b) - \alpha h - \beta k$

$$\Downarrow$$

$$\overbrace{= f(a,b) + \alpha h + \beta k - R_{\alpha,\beta}(h,k)}$$

$\underline{\text{pr}}$
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a+h,b+k)$$

$$= \underbrace{\lim_{(h,k)\to(0,0)} f(a,b)}_{f(a,b)} + \underbrace{\lim_{(h,k)\to(0,0)} (\alpha h + \beta k)}_{=0} - \underbrace{\lim \overbrace{\frac{R_{\alpha,\beta}(h,k)}{\|(h,k)\|}}^{\substack{\text{hipot. } \nearrow 0 \\ f \text{ dif. em } (a,b)}} \cdot \underbrace{\|(h,k)\|}_{\text{limitado}}}_{=0}$$

$$= f(a,b)$$

//

IV.

$$\boxed{f \text{ dif. em } (a,b) \iff \begin{cases} \text{a) todas derivs. parcs. em } (a,b) \text{ existem} \\ \text{b) } \lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{r(h,k)}{|(h,k)|} = 0 \end{cases}}$$

onde $\underline{r(h,k)} := f(a+h, b+k) - f(a,b) - f_x(a,b)\cdot h - f_y(a,b)\cdot k = R_{f_x(a,b),\, f_y(a,b)}(h,k)$

pr "$\Longrightarrow$"

Seja f dif. em (a,b).

a) vale conforme II.

b) A ideia da prova de II mostra que $\alpha = f_x(a,b)$ e $\beta = f_y(a,b)$.

Assim $R_{\alpha,\beta}(h,k) = r(h,k)$.

hip. $\exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tq.

$$0 \overset{\checkmark}{=} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{R_{\alpha,\beta}(h,k)}{|(h,k)|} \overset{\checkmark}{=} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{|(h,k)|} \quad \text{q.e.d.}$$

"$\Longleftarrow$" óbvio usando $\alpha := f_x(a,b)$ e $\beta := f_y(a,b)$.

#

Exc. 2

$$f(x,y) := \begin{cases} (x^2+y^2)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & , (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mostre que

- f dif. no ponto (0,0)
- todas derivs. parcs. de f existem em $\mathbb{R}^2$
- mas f_x e f_y não são contínuas em (0,0).

Exc. 3

$$f(x,y) := \begin{cases} x & , y \neq x^2 \\ 0 & , y = x^2 \end{cases}$$

a) Mostre que f é contínua em (0,0)

b) Calcule f_x ao longo do eixo x ($f_x(a,0) = ?$)

f_y . . . . — . . . . y ($f_y(0,b) = ?$)

c) Mostre que f não é diferenciável em (0,0)

[Dica: $\lim\limits_{(h,k)\to 0} \ldots$ para $k = h^2$]

d) Mostre que f_x e f_y não são contínuas em (0,0).

Plano Tangente

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $S = gr(f) \subset \mathbb{R}^3$,

$S \ni p = (x_0, y_0, \underbrace{f(x_0, y_0)}_{z_0})$, f dif. em (x_0, y_0).

$$\boxed{T_p S = \{ z - z_0 = \underset{\substack{\| \\ f_x(x_0,y_0)}}{\alpha} (x - x_0) + \underset{\substack{\| \\ f_y(x_0,y_0)}}{\beta} (y - y_0) \}}$$

Eq. do Plano Tangente

$\hat{N}_p := \frac{1}{|N_p|} N_p$ onde $N_p := (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1)$.

O vetor normal do plano tangente

$R_p := \{ p + \mu N_p \mid \mu \in \mathbb{R} \}$ reta normal

Def. A aproximação $L(x,y)$ de $f(x,y)$

$$f(x,y) \approx f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) =: L(x,y)$$

é chamada aproximação linear ou aproximação pelo plano tangente de f no ponto $p = (a, b, f(a,b)) \in S = gr(f)$.

Exc. 4 Mostre que o gráfico de L é $gr(L) = T_p S$.

Exc.5 Determine N_p e uma eq. do plano tangente em $p=(1,1,1)$ à superfície $\{z=\sqrt{xy}\}\subset\mathbb{R}^3$. 14.4 3

Exc.6 Explique porque $f(x,y)=\frac{x}{x+y}$ é dif. em $(2,1)$. 13

Exc.7 Seja f diferenciável e 19

$$f(2,5)=6\,,\ f_x(2,5)=1\,,\ f_y(2,5)=-1.$$

Use aproximação linear para estimar $f(\underbrace{2.2}_{22/10}, \underbrace{4.9}_{49/10})$.

Def. A diferencial de uma função dif. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ é definido:

$$df := \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Exc.8 Determine a diferencial da função 25

$$f(t,x)=e^{-2x}\cdot\cos(2\pi t).$$

Exc. 9 Determine uma eq. de T_pS 42
no ponto $P=(2,1,3)$ de uma superfície
S para a qual, infelizmente, você não
tem nenhuma formula.
Mas, felizmente, você sabe que as curvas

$$C_1(t) = (2+3t,\ 1-t^2,\ 3-4t+t^2)$$

$$C_2(u) = (1+u^2,\ 2u^3-1,\ 2u+1)$$

ambas estão em S.
Encontre uma eq. para T_pS
e determine o vetor normal N_p.
e a reta normal R_p.