# Lista 1a

MA211
2023-1

funções, domínio, imagem, gráfico, curvas de nível, limites, continuidade

$$f : \mathbb{R}^2 \supset D = \mathrm{dom}(f) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longmapsto f(x,y)$$

função de 2 variáveis

domínio

$\mathrm{dom}(f) := \{$ todos pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ nas quais $f$ é bem definido $\}$

$\subset \mathbb{R}^2$

imagem

$$\mathrm{im}(f) := \{ f(x,y) \mid (x,y) \in \mathrm{dom}(f) \}$$

$\subset \mathbb{R}$

gráfico

$\mathrm{gr}(f) := \{ (x, y, z) \mid (x,y) \in \mathrm{dom}(f)$ e $z = f(x,y) \}$

$\subset \mathbb{R}^3$

Dado • $f: \mathbb{R}^2 \supset D \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \mapsto f(x,y)$$

• $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ t.q. arbitrariamente próximos de $(a,b)$ existem pontos de $D$

|| $(a,b)$ não precisa ser elemento do domínio $D$, mas pode ser. ||

**Def.** Um número $L$ é chamado de limite de $f(x,y)$ quando $(x,y)$ tende a $(a,b)$, em símbolos

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$$

$$\left( \text{ou } f(x,y) \longrightarrow L \quad \text{quando } (x,y) \to (a,b) \right),$$

$:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.q. $\forall (x,y) \in D$:

$$0 < \underbrace{|(x,y)-(a,b)|}_{\text{distância entre } (x,y) \text{ e } (a,b)} < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon.$$

**Def.** Uma função $f: \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$, $u \mapsto f(u)$, $u = (u_1, \dots, u_n)$

é contínua num ponto $a \in D$ (do seu domínio!), $a = (a_1, \dots, a_n)$

$$:\Leftrightarrow \lim_{u \to a} f(u) = f(a)$$

"O limite de f em a (1) existe e (2) é igual ao valor de f em a"

**Def.** f é contínua no seu domínio D

:⇔ f é contínua no todo ponto de D.

Neste caso dizemos

"f é de classe $C^0$ em D"

ou

"$f \in C^0(D)$"

**Coment.** Polinomios $p, q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ são contínuas em $\mathbb{R}^n = D$ e funções racionais $h := \frac{p}{q}$ são contín. nos seus domínios $\operatorname{dom}(h)$.

Exc.1 Dado $g(x,y) = \cos(x+2y)$ 14.1 9

a) calcule $g(2,-1)$

b) determine o domínio $D = \text{dom}(g)$

c) determine a imagem $\text{im}(g)$

Exc.2 Determine e esboce o domínio da função 14.1

(i) $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ 13

(ii) $f(x,y,z) = \sqrt{1-x^2-y^2-z^2}$ 21

Exc.3 Esboce o gráfico da função 14.1

a) $f(x,y) = 1+y$ 23

b) " $= y^2+1$ 27

c) " $= 9-x^2-9y^2$ 29

Exc.4 Esboce várias curvas de nível 14.1

a) $f(x,y) = (y-2x)^2$ 43

b) " $= \sqrt{y^2-x^2}$ 49

Exc. 5 Descreva como o gráfico de $g$ é obtido a partir do gráfico de $f$. 14.1 69

(a) $g(x,y) = f(x,y)+2$

(b) $g(x,y) = 2f(x,y)$

(c) $g(x,y) = -f(x,y)$

(d) $g(x,y) = 2-f(x,y)$

**Exc. 6** Suponha $\lim_{(x,y)\to(3,1)} f(x,y) = 6$. 14.2 1

Podemos dizer uma coisa do valor de $f$ no ponto $(3,1)$?

E se a função $f$ for contínua?

**Exc. 7** Determine o limite, se existir, ou mostre que não existe. 14.2

a) $\lim_{(x,y)\to(1,2)} (5x^3 - x^2y^2)$ 5

b) $\lim_{(x,y)\to(2,1)} \left(\frac{4-xy}{x^2+3y^2}\right)$ 7

**Exc. 8** Determine o maior conjunto no qual a função é contínua.

a) $F(x,y) = \frac{xy}{1+e^{x-y}}$

b) $G(x,y) = \ln(x^2+y^2-4)$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{se } (x,y) = (0,0). \end{cases}$