МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 36, № 4 (1984)

СИГНАТУРА РАЗВЕТВЛЕННОГО НАКРЫВАЮЩЕГО

О. Я. Виро

Работа написана как дифференциально-топологическая. По-видимому, доказываемая формула верна также и для кусочно линейных и топологических разветвленных накрытий с локально плоскими многообразиями ветвления, хотя приводимое здесь дифференциально-топологическое доказательство не допускает автоматического перенесения в эти категории.

Главный результат формулируется и доказывается в § 2. В § 1 излагается вспомогательный материал. В п. 1.1 воспроизводятся определения и некоторые результаты, относящиеся к теории разветвленных накрытий. (В этой теории нет общепринятой системы определений, и потому некоторое уточнение терминологии необходимо.) В п. 1.2 описывается известная (см., например, [1]) конструкция самопересечений гладкого подмногообразия, участвующая в последующих формулировках. В п. 1.3 излагается формула Хирцебруха.

§ 1. Предварительные сведения

1.1. Гладкие разветвленные накрытия. Пусть m и n — натуральные числа, большие единицы. Модельными m-листными разветвленными накрытиями размерности n называются отображения

$$(x, z) \mapsto (x, z^m)\colon \mathbf{R}^{n-2} \times \mathbf{C} \to \mathbf{R}^{n-2} \times \mathbf{C},$$

$$(x, z) \mapsto (x, z^m)\colon \mathbf{R}_+^{n-2} \times \mathbf{C} \to \mathbf{R}_+^{n-2} \times \mathbf{C}.$$

Пусть X и Y — (гладкие) многообразия. Сюръективное отображение $P\colon Y \to X$ называется (гладким) разветвленным накрытием, если каждая точка многообразия X обладает такой окрестностью U, что ее прообраз $P^{-1}(U)$ представляется в виде объединения $\bigcup_\alpha V_\alpha$ попарно не пересекающихся открытых множеств V_α, для каждого из которых отображение $V_\alpha \to U$, определяемое отображением P или является диффеоморфизмом или диффеоморфно одному из модельных разветвленных накрытий. Многообразие X называется базой разветвленного накрытия $P\colon Y \to X$, а Y — разветвленным накрывающим многообразия X. Индексом ветвления разветвленного накрытия $P\colon Y \to X$ в точке $y \in Y$ называется абсолютная величина локальной степени отображения P в точке y.

Множество точек многообразия Y, в которых индекс ветвления гладкого разветвленного накрытия $P\colon Y \to X$ равен числу m, большему единицы, является (гладким) собственным подмногообразием коразмерности 2 многообразия Y, трансверсально входящим на ∂Y. Оно обозначается через $B_{m, P}$. Многообразия $B_{2, P}$, $B_{3, P}$, . . . попарно не пересекаются, и их объединение $\bigcup_{m=2}^{\infty} B_{m, P}$ называется многообразием ветвления разветвленного накрытия $P\colon Y \to X$ и обозначается через B_P.

Если база разветвленного накрытия $P\colon Y \to X$ ориентирована, то существует и единственна такая ориентация разветвленного накрывающего, что относительно этих ориентаций локальная степень отображения P положительна в любой точке многообразия Y. Такие ориентации многообразий X и Y называются согласованными.

Диффеоморфизм $T\colon Y \to Y$ называется автоморфизмом разветвленного накрытия $P\colon Y \to X$, если $P \circ T = P$. Автоморфизмы разветвленного накрытия P образуют группу, которая обозначается через $\mathrm{Aut}(P)$. Если индуцированное отображением P отображение пространства орбит $Y/\mathrm{Aut}(P)$ на X является гомеоморфизмом, то разветвленное накрытие P называется регулярным. Регулярное разветвленное накрытие называется циклическим, если его группа автоморфизмов есть циклическая группа.

Пусть B — многообразие, $\nu\colon N \to B$ и $\mu\colon M \to B$ — (гладкие) расслоения со слоем D^2. Отображение $\pi\colon N \to M$ называется m-листным *разветвленным морфизмом* расслоения ν в расслоение μ, если каждая точка многообразия B обладает такой окрестностью U и существуют такие тривиализации $\tilde{t}\colon U \times D^2 \to \nu^{-1}(U)$ и $t\colon U \times D^2 \to$

$\to \mu^{-1}(U)$ сужений расслоений ν и μ на U, что

$$t^{-1}\pi\tilde{t}\,(u, v) = (u, v^m)$$

для $(u, v) \in U \times D^2$ $(\subset U \times \mathbf{C})$. Ясно, что π является m-листным разветвленным накрытием, многообразием ветвления которого служит нулевое сечение расслоения ν.

Если $m = 2$, то это разветвленное накрытие (как и вообще всякое двулистное разветвленное накрытие) является циклическим.

1.1.A (см. [2, теорема B]). *Пусть π: $N \to M$ есть m-листный разветвленный морфизм D^2-расслоения ν: $N \to B$ в D^2-расслоение μ: $M \to B$. Если $m > 2$, то цикличность π как разветвленного накрытия равносильна ориентируемости любого из расслоений μ и ν.*

Если p: $\tilde{B} \to B$ — двулистное накрытие, определяемое классом $w_1(\mu)$, а $\tilde{\nu}$: $\tilde{N} \to \tilde{B}$ и $\tilde{\mu}$: $\tilde{M} \to \tilde{B}$ — расслоения, индуцированные отображением p и расслоениями ν и μ, то существует m-листный разветвленный морфизм $\tilde{\pi}$: $\tilde{N} \to \tilde{M}$ расслоения $\tilde{\nu}$ в $\tilde{\mu}$, накрывающий морфизм π и являющийся циклическим m-листным разветвленным накрытием.

Следующая несложная теорема показывает, что в окрестности многообразия ветвления любое разветвленное накрытие устроено как разветвленный морфизм.

1.1.B. *Пусть P: $Y \to X$ — разветвленное накрытие. Тогда для каждого $r > 1$ существуют такие D^2-расслоения ν_r: $N_r \to B_{r,P}$ и μ_r: $M_r \to B_{r,P}$, вложение i_r: $N_r \to Y$ и погружение j_r: $M_r \to X$, продолжающие включение $B_{r,P} \hookrightarrow Y$ и погружение $P\,|_{B_{r,P}}$: $B_{r,P} \to X$, и r-листный разветвленный морфизм π_r: $N_r \to M_r$, что $\bigcup_{r=2}^{\infty} i_r(N_r)$ есть трубчатая окрестность подмногообразия B_P и что для каждого r коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} N_r & \xrightarrow{i_r} & Y \\ {\scriptstyle \pi_r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P} \\ M_r & \xrightarrow{j_r} & X. \end{array}$$

1.2. Самопересечения подмногообразий Пусть L — замкнутое подмногообразие многообразия M. Построим последовательность $L_0 \supset L_1 \supset L_2 \supset \ldots$ подмногообразий многообразия M. Положим $L_0 = M$, $L_1 = L$ и, если L_r уже построено, то, подвергнув малой изотопии включение $L_r \subset M$, получим вложение $i_r \colon L_r \to M$, трансверсальное к L, и положим $L_{r+1} = L \cap i_r(L_r)$.

Если L и M ориентированы, то естественную ориентацию (как трансверсальные пересечения ориентированных подмногообразий ориентированного многообразия) получают и все L_r.

Оказывается, что в случае четного r эта ориентация подмногообразия L_r не зависит от ориентации подмногообразия L. Более того, даже если L неориентируемо, подмногообразие L_r с четным r ориентируемо и имеет зависящую только от ориентации многообразия M естественную ориентацию, которая строится следующим образом.

Будем обозначать нормальное расслоение подмногообразия A многообразия X через $\nu_X A$. Очевидно, расслоение $\nu_M L_r$ раскладывается в прямую сумму:

$$\bigoplus_{k=1}^{r} (\nu_{L_{k-1}} L_k)\,|_{L_r}. \tag{1}$$

Ввиду малости изотопии, соединяющей включение $L_{k-1} \subset M$ с i_{k-1}, можно считать, что она неподвижна на L_k и поэтому индуцирует изоморфизм

$$(\nu_{L_{k-2}} L_{k-1})\,|_{L_k} \to \nu_{L_{k-1}} L_k.$$

Таким образом, имеются канонические изоморфизмы между слагаемыми суммы (1). Поэтому если ориентировать слой одного слагаемого, то возникает ориентация слоя всей суммы, не зависящая в случае четного r от исходной ориентации. Таким образом, в случае четного r расслоение $\nu_M L_r$ имеет естественную ориентацию. Вместе с ориентацией многообразия M она и дает ориентацию многообразия L_r.

Многообразия L_r зависят от произвола в построении вложений i_r. Однако, при другом выборе вложений получаются, как легко видеть, кобордантные подмногообразия, причем в случаях, когда они имеют естественные ориентации, они ориентированно кобордантны прежним подмногообразиям. В этих случаях класс кобордизмов подмногообразия L_r (являющийся элементом группы Ω_{n-2r}) обозначается через L^r.

1.3. Формула Хирцебруха. Сигнатуру ориентированного замкнутого $4k$-мерного многообразия (т. е. сигнатуру его индексов пересечения $H_{2k}(M; \mathbf{Q}) \times H_{2k}(M; \mathbf{Q}) \to \mathbf{Q}$) будем обозначать через $\operatorname{sign} M$. Если L — замкнутое подмногообразие коразмерности 2 ориентированного замкнутого $4k$-мерного многообразия M и α — функция, представимая степенным рядом $\sum_{r=0}^{\infty} \alpha_r t^r$, то через $\operatorname{sign} \alpha\,(L)$ обозначается сумма

$$\sum_{r=0}^{2k} \alpha_{2r} \operatorname{sign} L^{2r}.$$

1.3.А (теорема Хирцебруха [3, п. 5]). *Пусть X, Y — замкнутые $4k$-мерные многообразия, P: $Y \to X$ — циклическое m-листное разветвленное накрытие с $B_P = B_{m,\,P}$, и пусть X и Y согласованно ориентированы. Тогда*

$$\operatorname{sign} X = \operatorname{sign} \frac{(1+B_P)^m + (1-B_P)^m}{(1+B_P)^m - (1-B_P)^m} B_P = \frac{1}{m} \operatorname{sign} Y + \frac{m^2-1}{3m} \operatorname{sign} B_P^2 + \ldots \qquad (2)$$

Формулу (2) можно переписать в следующей форме, более удобной для обобщения

$$\operatorname{sign} Y = m \operatorname{sign} X - \operatorname{sign} \frac{(1+mB_P)(1-B_P)^m - (1-mB_P)(1+B_P)^m}{(1+B_P)^m - (1-B_P)^m}. \qquad (3)$$

Обозначим функцию

$$x \mapsto \frac{(1+mx)(1-x)^m - (1-mx)(1+x)^m}{(1+x)^m - (1-x)^m}$$

через Π_m. Тогда формула (3) превращается в формулу

$$\operatorname{sign} Y = m \operatorname{sign} X - \operatorname{sign} \Pi_m (B_P). \qquad (4)$$

§ 2. Обобщение формулы Хирцебруха.

2.1. Основная теорема. *Пусть X, Y — замкнутые $4k$-мерные многообразия, P: $Y \to X$ есть m-листное разветвленное накрытие, и пусть Y и Y согласованно ориентированы. Тогда*

$$\operatorname{sign} Y = m \operatorname{sign} X - \sum_{r=2}^{m} \operatorname{sign} \Pi_r (B_{r,\,P}). \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть N_r, M_r, ν_r: $N_r \to B_{r,\,P}$, μ_r: $M_r \to B_{r,\,P}$, i_r: $N_r \to Y$, j_r: $M_r \to X$ и π_r: $N_r \to M_r$ — многообразия и отображения, существующие в силу 1.1.В. Введем в X риманову метрику. Положим $N=\bigcup_{r=2}^{m}N_r$. Индуцируем в $Y\setminus \operatorname{int} N$ риманову метрику посредством P из X и продолжим ее на все Y. Индуцируем в M_r риманову метрику посредством j_r из X.

Обозначим через $\mathscr{L}$ определяющуюся каноническим образом по римановой метрике дифференциальную форму, реализующую класс Хирцебруха $L_k(p_1, \ldots, p_k)$. В силу теоремы Хирцебруха [4, теорема 8.22],

$$\operatorname{sign} Y=\int_Y \mathscr{L} \tag{6}$$

и

$$\operatorname{sign} X=\int_X \mathscr{L}. \tag{7}$$

В силу естественности формы $\mathscr{L}$ относительно локальных изометрий,

$$\int_{Y\setminus N} \mathscr{L}=\int_{Y\setminus N} P^*(\mathscr{L})=\int_X \varphi\mathscr{L}, \tag{8}$$

где $\varphi\colon X\to \mathbf{Z}$ — функция, определяемая формулой

$$\varphi(x)=\operatorname{card}(P^{-1}(x)\setminus N).$$

По той же причине

$$\int_{M_r} \mathscr{L}=\int_{M_r} j_r^*(\mathscr{L})=\int_X \varphi_r\mathscr{L}, \tag{9}$$

где $\varphi_r\colon X\to \mathbf{Z}$ — функция, определяемая формулой

$$\varphi_r(x)=\operatorname{card}(j_r^{-1}(x)).$$

Очевидно,

$$\varphi(x)=m-\sum_{r=2}^{m} r\varphi_r(x)$$

для $x\in X$, и потому

$$\int_X \varphi\mathscr{L}=m\int_X \mathscr{L}-\sum_{r=2}^{m} r\int_X \varphi_r\mathscr{L}.$$

Из этого равенства и из равенств (7), (8) и (9) получаем

$$\int_{Y\setminus N} \mathscr{L}=m\operatorname{sign} X-\sum_{r=2}^{m} r\int_{M_r} \mathscr{L}. \tag{10}$$

Представляя интеграл $\int_Y \mathscr{L}$ в виде суммы $\int_{Y\setminus N}\mathscr{L}+$ $+\sum_{r=2}^{m}\int_{N_r}\mathscr{L}$ и пользуясь равенствами (6) и (10), получаем

$$\operatorname{sign} Y = m \operatorname{sign} X - \sum_{r=2}^{m}\left(r\int_{M_r}\mathscr{L} - \int_{N_r}\mathscr{L}\right). \qquad (11)$$

В силу 1.1.A разветвленный морфизм π_r: $N_r \to M_r$ расслоения ν_r: $N_r \to B_{r,P}$ в расслоение μ_r: $M_r \to B_{r,P}$ двулистно накрывается разветвленным морфизмом $\tilde{\pi}_r$: $\tilde{N}_r \to \tilde{M}_r$, являющимся циклическим r-листным разветвленным накрытием. Индуцируем в $\tilde{N}_r$ и $\tilde{M}_r$ римановы метрики из N_r и M_r.

Как следует из теории кобордизмов свободных действий, построенной Коннером и Флойдом [5], существуют такое натуральное число c, такие компактные ориентированные многообразия F_r и G_r и такое r-листное циклическое (неразветвленное) накрытие Q_r: $G_r \to F_r$, что сужение $\partial G_r \to \partial F_r$ последнего диффеоморфно c-кратной несвязной сумме сужения $(-\partial\tilde{N}_r) \to (-\partial\tilde{M}_r)$ разветвленного накрытия $\tilde{\pi}_r$: $\tilde{N}_r \to M_r$. Продолжим риманову метрику с края $\partial F_r = c\,(-\partial\tilde{M}_r)$ на многообразие F_r таким образом, чтобы вместе с имеющейся римановой метрикой в $\tilde{M}_r$ она давала риманову метрику в замкнутом многообразии $F_r \cup c\tilde{M}_r$. Индуцируем из римановой метрики в F_r посредством Q_r риманову метрику в G_r.

В силу формулы Хирцебруха, примененной к r-листному циклическому разветвленному накрытию

$$Q_r \cup c\tilde{\pi}_r\colon\ G_r \cup_{\partial G_r} c\tilde{N}_r \to F_r \cup_{\partial F_r} c\tilde{M}_r,$$

$$\operatorname{sign}(G_r \cup_{\partial G_r} c\tilde{N}_r) = r \operatorname{sign}(F_r \cup_{\partial F_r} c\tilde{M}_r) - $$
$$-\operatorname{sign} c\Pi_r(B_r, \tilde{\pi}_r). \qquad (12)$$

С другой стороны, в силу теоремы Хирцебруха [4, теорема 8.22]

$$\operatorname{sign}(G_r \cup_{\partial G_r} c\tilde{N}_r) = \int_{G_r}\mathscr{L} + c\int_{\tilde{N}_r}\mathscr{L} = \int_{G_r}\mathscr{L} + 2c\int_{N_r}\mathscr{L}, \qquad (13)$$

$$\operatorname{sign}(F_r \cup_{\partial F_r} c\tilde{M}_r) = \int_{F_r}\mathscr{L} + c\int_{\tilde{M}_r}\mathscr{L} = \int_{F_r}\mathscr{L} + 2c\int_{M_r}\mathscr{L}. \qquad (14)$$

Наконец, в силу естественности формы $\mathscr{L}$ относительно локальных изометрий

$$\int_{G_r} \mathscr{L} = r \int_{F_r} \mathscr{L}.$$

Отсюда и из равенств (12) — (14) получаем

$$r \int_{F_r} \mathscr{L} + 2c \int_{N_r} \mathscr{L} = r \int_{F_r} \mathscr{L} + 2rc \int_{M_r} \mathscr{L} - c \operatorname{sign} \Pi_r (B_{r, \tilde{\pi}_r})$$

или

$$2 \left(r \int_{M_r} \mathscr{L} - \int_{N_r} \mathscr{L} \right) = \operatorname{sign} \Pi_r (B_{r, \tilde{\pi}_r}). \qquad (15)$$

Многообразие $(B_{r, \tilde{\pi}_r})_s$ очевидно, двулистно накрывает $(B_{r, \pi_r})_s = (B_{r, P})_s$ для любого s. Следовательно,

$$\operatorname{sign} \Pi_r (B_{r, \tilde{\pi}_r}) = 2 \operatorname{sign} \Pi_r (B_{r, P}). \qquad (16)$$

Доказываемая формула (5) получается в результате сопоставления равенств (11), (15) и (16).

2.2. Четырехмерный случай. Пусть, в условиях теоремы 2.1, $\dim X = \dim Y = 4$. Тогда

$$\operatorname{sign} \Pi_r (B_{r, P}) = \frac{r^2 - 1}{3} e (B_{r, P}) = \frac{r^2 - 1}{3r} e (P \mid B_{r, P}),$$

где через e обозначаются нормальные числа Эйлера подмногообразия и погружения.

Таким образом, в силу теоремы 2.1

$$\operatorname{sign} Y = m \operatorname{sign} X - \sum_{r=2}^{m} \frac{r^2 - 1}{3} e (B_{r, P}) = \qquad (17)$$

$$= m \operatorname{sign} X - \sum_{r=2}^{m} \frac{r^2 - 1}{3r} e (P \mid B_{r, P}). \qquad (18)$$

2.3. Замечание. Теорема 2.1 была сформулирована мною как гипотеза на учебном топологическом семинаре Ленинградского университета, после чего участники этого семинара А. Ю. Ненашев и Н. Ю. Нецветаев доказали ее специальные случаи: А. Ю. Ненашев нашел доказательство для случая $B_P = B_{2, P}$, а Н. Ю. Нецветаев — для случая $\dim X = 4$. Их доказательства были модификациями принадлежащих Ениху и Оссе [6] и Гордону [7] элементарных доказательств соответствующих специальных случаев формулы Хирцебруха. Пользуясь возможностью, благодарю Н. Ю. Нецветаева и А. Ю. Ненашева за полезные обсуждения.

Ленинградский государственный университет

Поступило 16.IV.1982

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Атья М. Ф., Зингер И. М., Индекс эллиптических операторов. III, Успехи матем. наук, 24, № 1 (1969), 127—182.
[2] Савельев И. В., О кусочно-линейных разветвленных накрытиях, Кандид. дисс., М., 1977.
[3] Hirzebruch F., The signature of ramified coverings. Global analysis, Papers in honor of K. Kodaira, Princeton, 1969, 253—265.
[4] Хирцебрух Ф., Топологические методы в алгебраической геометрии, М., «Мир», 1973.
[5] Коннер П., Флойд Э., Гладкие периодические отображения, М., «Мир», 1969.
[6] Jänich K., Ossa E., On the signature of an involution, Topology, 8, № 1 (1969).
[7] Gordon C. Mc. A., On the G-signature theorem in dimension four, Preprint.