УДК 513.83

Пересечения петель в двумерных многообразиях. II. Свободные петли

Тураев В. Г., Виро О. Я.

§ 1. Введение

Настоящая работа является продолжением статьи первого автора [6], но может читаться независимо.

1.1. Предмет работы. В настоящей работе рассматривается следующая задача: каково наименьшее число точек пересечения и самопересечения петель, входящих в данные гомотопические классы отображений окружности S^1 в двумерное многообразие A (разумеется, с учетом кратностей этих точек)? Важными специальными случаями этой задачи являются следующие вопросы: при каких условиях данные гомотопические классы отображений $S^1 \to A$ представляются попарно непересекающимися петлями? при каких условиях такие классы представляются простыми (т. е. несамопересекающимися) петлями?

Решение аналогичных задач, относящихся к отображениям n-мерной сферы в $2n$-мерное многообразие, сыграло важную роль в топологии многообразий больших размерностей. Это решение было получено Кервером [2] в случае $n>2$ в терминах введенных им эрмитовых форм, обобщающих классические формы индексов пересечения (см. также Уолл [7]). В случае $n=2$ подобные задачи, насколько нам известно, пока не решены.

Сформулированные выше вопросы о гомотопических классах отображений окружности в двумерное многообразие A допускают 3 модификации. В первой речь идет о свободных гомотопических классах, во второй — об элементах группы $\pi_1(A, a)$ в случае $a \in \operatorname{Int} A$ и в третьей — об элементах группы $\pi_1(A, a)$ в случае $a \in \partial A$. (В старших размерностях подобные модификации равносильны.) Настоящая работа посвящена первой из этих модификаций. О второй модификации нам известно только то, что в вопросе о самопересечениях она эквивалентна первой: если представляемый элементом α группы $\pi_1(A, a)$ с $a \in \operatorname{Int} A$ свободный гомотопический класс отображений $S^1 \to A$ представляется петлей с l самопересечениями, то и α представляется петлей с l самопересечениями. Это следует из того, что в случае $a \in \operatorname{Int} A$ внутренние автоморфизмы группы $\pi_1(A, a)$ реализуются гомеоморфизмами $(A, a) \to (A, a)$. Третья из указанных модификаций (случай $a \in \partial A$) впервые была рассмотрена в [6]. Данный там ответ аналогичен ответу, найденному Кервером в многомерной ситуации и формулируется в терминах введенной в [6] для случая $a \in \partial A$ формы

$$\mathbf{Z}[\pi_1(A, a)] \times \mathbf{Z}[\pi_1(A, a)] \to \mathbf{Z}[\pi_1(A, a)],$$

являющейся двумерным аналогом упомянутых выше эрмитовых форм Кервера. В случае $a \in \operatorname{Int} A$ в [6] построено аналогичное спаривание и в его терминах сформулированы необходимые условия реализуемости свободного гомотопического класса отображений $S^1 \to A$ простой петлей и необходимые условия реализуемости нескольких таких классов непересекающимися петлями.

В настоящей работе доказывается, что эти условия являются и достаточными. Более того, здесь показывается, что в широком классе случаев в терминах этого же спаривания можно сформулировать ответ на вопрос о минимальном числе точек пересечения и самопересечения петель, входящих в данные свободные гомотопические классы петель в A. Подчеркнем, что хотя для введения используемого здесь спаривания необходимо зафиксировать точку a в A, это спаривание оказывается хорошо приспособленным для изучения гомотопических классов свободных петель.

В заключение этого пункта отметим, что алгоритмическое решение части изучаемых здесь задач хорошо известно: в работах Рейнхарта [5], Цишанга [8], [9] и Чиллингуорса [1] построены алгоритмы, определяющие содержат ли данные свободные гомотопические классы петель в A непересекающиеся простые петли. По-видимому, небольшим видоизменением их методов можно получить и алгоритмы, определяющие наименьшее число точек пересечения и самопересечения петель, входящих в данные свободные гомотопические классы. В настоящей работе алгоритмические проблемы не рассматриваются.

1.2. Терминология и обозначения. Терминология статьи — дифференциально-топологическая. Всюду в дальнейшем через A обозначается связное двумерное многообразие, через a — его точка и через π — фундаментальная группа $\pi_1(A, a)$. В касательном пространстве T_aA раз и навсегда фиксируется ориентация.

Для $\alpha \in \pi$ через $\operatorname{fr}(\alpha)$ обозначается свободный гомотопический класс отображений $S^1 \to A$, определяемый классом α. Положим $w(\alpha)=1$, если петли класса α являются дезориентирующими, и $w(\alpha)=0$ в противном случае (так что $\alpha \mapsto w(\alpha) \bmod 2\colon \pi \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ — гомоморфизм, определяемый первым классом Штифеля — Уитни многообразия A). Для инволюции кольца $\mathbf{Z}[\pi]$, определяемой формулой

$$\sum_{\alpha \in \pi} n_\alpha \alpha \mapsto \sum_{\alpha \in \pi} (-1)^{w(\alpha)} n_\alpha \alpha^{-1},$$

будем употреблять обозначение $\beta \mapsto \overline{\beta}$. Для $\beta = \sum_{\alpha \in \pi} n_\alpha \alpha \in \mathbf{Z}[\pi]$ через $|\beta|$ обозначается число $\sum_{\alpha \in \pi} |n_\alpha|$. Для петель $x, y\colon S^1 \to A$ через $k(x, y)$ обозначается число $\operatorname{card}\{(t_1, t_2) \in S^1 \times S^1 \mid x(t_1) = y(t_2)\}$ и через $l(x)$ — число таких неупорядоченных пар $t, t' \in S^1$, что $t \neq t'$ и $x(t) = x(t')$.

1.3. Формулировки результатов. В [6, добавление 2] описана конструкция (воспроизводящаяся ниже в § 2), которая относит упорядоченной паре (α, β) элементов группы π некоторый элемент фактор-группы аддитивной группы кольца $\mathbf{Z}[\pi]$ по подгруппе

$$(\alpha - 1)\mathbf{Z}[\pi] + \mathbf{Z}[\pi](\overline{\beta} - 1),$$

обозначаемый через $\Lambda(\alpha, \beta)$ и называемый *пересечением классов* α и β. Указанная фактор-группа обозначается через $P_{\alpha,\beta}$, а проекция $\mathbf{Z}[\pi] \to P_{\alpha,\beta}$ — через $\operatorname{pr}_{\alpha,\beta}$. Для $\gamma \in P_{\alpha,\beta}$ через $|\gamma|$ обозначается число $\min\{|\delta|, \delta \in \operatorname{pr}^{-1}_{\alpha,\beta}(\gamma)\}$.

Теорема I. *Пусть* $\alpha, \beta \in \pi$, $x \in \mathrm{fr}(\alpha)$ *и* $y \in \mathrm{fr}(\beta)$. *Тогда*

$$k(x, y) \geqslant |\Lambda(\alpha, \beta)|, \qquad (1)$$

$$l(x) \geqslant \frac{1}{2}(|\Lambda(\alpha, \alpha)| - w(\alpha)). \qquad (2)$$

Теорема I доставляет оценки снизу чисел пересечений и самопересечений петель через гомотопические инварианты этих петель. Отметим, что оценка (1) числа $k(x, y)$ существенно сильнее стандартной оценки через индекс пересечения целочисленных гомологических классов петель x и y в случае ориентируемого A и через индекс пересечения тех же классов $\mathrm{mod}\, 2$ в случае неориентируемого A. Однако, оценка (1) не является точной. Например, если A — лист Мебиуса, α — куб образующей его фундаментальной группы и β — пятая степень образующей, то, как легко вычислить, $|\Lambda(\alpha, \beta)| = 1$. В то же время, прямые геометрические рассуждения (основывающиеся на подсчете индексов пересечения и чисел Бетти) показывают, что петли, входящие в α и β, имеют не менее трех точек пересечения. Как видно из формулируемой ниже теоремы II, если исключить ситуации, сходные с этим примером, то оценка (1) уже окажется точной (неулучшаемой).

Что касается числа самопересечений петли x: $S^1 \to A$, то, наряду с (2), имеет место следующая гомологическая оценка. Допустим, что класс петли x в группе $H_1(A; \mathbf{Z})/\mathrm{Tors}\, H_1(A; \mathbf{Z})$ отличен от 0, и пусть n — наибольшее натуральное число, на которое делится этот класс. Тогда: а) если A ориентируемо и компактно, то $l(x) \geqslant n-1$; в) если A неориентируемо и замкнуто, то $l(x) \geqslant [(n-1)/2]$, где квадратные скобки обозначают взятие целой части. Если в условиях утверждения в) x — характеристическая петля (т. е. ее индекс пересечения с дезориентирующими петлями равен $1\, \mathrm{mod}\, 2$, а с остальными — $0\, \mathrm{mod}\, 2$), то в последнем неравенстве правую часть можно увеличить на 1. Эти оценки вытекают очевидным образом из результатов Микса и Патруски [3], [4], касающихся минимального числа компонент одномерного подмногообразия многообразия A, реализующего данный гомологический класс.

Указанная гомологическая оценка и оценка (2) независимы в том смысле, что ни одна из них не следует за другой. Например, если A — цилиндр и x — петля в A, гомотопная n-й степени средней линии, то утверждение а) дает неравенство $l(x) \geqslant n-1$, а оценка (2) дает в данном случае тривиальное неравенство $l(x) \geqslant 0$. Если исключить подобную ситуацию, предположив, что гомотопический класс петли x не представляется в виде β^n с $n \geqslant 2$ и $\beta \in w^{-1}(0) \subset \pi$, то как показывает следующая теорема, оценка (2) уже окажется точной.

Для $\alpha \in \pi$ через $e(\alpha)$ обозначим наибольшее из таких натуральных n, что α представляется в виде β^n с $\beta \in \pi$ и $w(\beta) = w(\alpha)$. Такое наибольшее число не существует только в 2 случаях: когда $\alpha = 1$ и когда A — проективная плоскость. В этих случаях положим $e(\alpha) = 1$. Для $\alpha, \beta \in \pi$ в случае, когда $w(\alpha) = w(\beta) = 1$, числа $e(\alpha)$ и $e(\beta)$ нечетны и классы $\alpha^{e(\beta)}$, $\beta^{e(\alpha)}$ сопряжены, положим

$$n(\alpha, \beta) = \min(e(\alpha), e(\beta)) - \text{н. о. д.}\ (e(\alpha), e(\beta)),$$

где н. о. д. — наибольший общий делитель. В остальных случаях положим $n(\alpha, \beta) = 0$

Теорема II. *Если* $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \pi$, *то существуют такие погружения* $x_1, \ldots, x_r$: $S^1 \to A$ *с трансверсальными пересечениями и самопересечениями, входящие соответственно в* $\mathrm{fr}(\alpha_1), \ldots, \mathrm{fr}(\alpha_r)$, *что*:

(i) *для любых* $i \neq j$

$$k(x_i, x_j) = |\Lambda(\alpha_i, \alpha_j)| + n(\alpha_i, \alpha_j);$$

(ii) *для любого* i

$$l(x_i) = \frac{1}{2}(|\Lambda(\alpha_i, \alpha_i)| - w(\alpha_i)) + (1 - w(\alpha_i))(e(\alpha_i) - 1).$$

Заметим, что если A ориентируемо, то $n(\alpha, \beta) = 0$ для любых $\alpha, \beta \in \pi$. Таким образом, теорема II показывает, что для ориентируемых многообразий оценка (1) неулучшаема. Как уже было сказано, для неориентируемых многообразий это не так. Стоит отметить, что для выполнения равенства $n(\alpha, \beta) = 0$ достаточно (но не необходимо) выполнения любого из следующих условий: $w(\alpha) = 0$; $w(\beta) = 0$; элементы группы $H_1(A; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$, представляемые классами α и β, различны; гомологический $\mathrm{mod}\, 2$ индекс пересечения классов α и β равен 0.

Следствие I. *Если* $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \pi$, *то для того чтобы классы* $\mathrm{fr}(\alpha_1), \ldots, \mathrm{fr}(\alpha_r)$ *содержали попарно непересекающиеся петли, необходимо и достаточно, чтобы для любых* $i, j = 1, \ldots, r$ *с* $i \neq j$ *выполнялось равенство* $\Lambda(\alpha_i, \alpha_j) = 0$.

Следствие II. *Если* $\alpha \in \pi$, *то следующие условия равносильны*:

(i) *класс* $\mathrm{fr}(\alpha)$ *содержит простую петлю*;

(ii) $e(\alpha) = 1$ *и* $\Lambda(\alpha, \alpha) = \mathrm{pr}_{\alpha,\alpha}(w(\alpha))$;

(iii) $e(\alpha) = 1$ *и* $|\Lambda(\alpha, \alpha)| = w(\alpha)$.

Как уже говорилось в п. 1.1, в случае, когда отмеченная точка a лежит в $\mathrm{Int}\, A$, условие (i) равносильно тому, что α представляется простой петлей. Если $a \in \partial A$, то (i), разумеется, равносильно тому, что для некоторого $\beta \in \pi$ класс $\beta\alpha\beta^{-1}$ представляется простой петлей. Заметим также, что условие $e(\alpha) = 1$ выполняется тогда и только тогда, когда или $\alpha = 1$, или A — проективная плоскость, или α не представляется в виде β^n с $\beta \in \pi$ и $n \geqslant 2$, или $\alpha = \beta^2$, где $\beta \in \pi$, $w(\beta) = 1$ и β не представляется в виде γ^n с $\gamma \in \pi$ и $n \geqslant 2$.

Доказательство теорем I, II и вывод из них следствий I и II излагаются в § 3. В § 2 воспроизводится определение пересечения и устанавливается ряд его свойств.

§ 2. Формы пересечений

2.1. Случай $a \in \partial A$. Пусть $\alpha, \beta \in \pi$. *Пусть* f: $(I, 0) \to (\partial A, a)$ (где $I = [0, 1]$) — такое гладкое вложение, что пара, состоящая из вектора $f'(0)$ и вектора, направленного внутрь A, задает в $T_a A$ выделенную ориентацию. Пусть x: $(I, \partial I) \to (A, a)$ и y: $(I, \partial I) \to (A, f(1))$ — такие трансверсальные петли, что x представляет α и петля $(fy)f^{-1}$ представляет β. Положим

$$T = \{(t_1, t_2) \in I \times I \mid x(t_1) = y(t_2)\}.$$

В силу трансверсальности петель x и y множество T конечно. Для $t = (t_1, t_2) \in T$ обозначим через γ_t элемент группы π, представляемый петлей $x|_{[0, t_1]}(y|_{[0, t_2]})^{-1}f^{-1}$. Положим $\varepsilon_t = 1$, если ориентация пространства $T_a A$, перенесенная вдоль пути $f(y|_{[0, t_2]})$, задается парой $(x'(t_1), y'(t_2))$, и положим $\varepsilon_t=-1$ в противном случае. Сумма $\sum_{t\in T}\varepsilon_t\gamma_t$ зависит лишь от α и β (см. [6]); отображение $(\alpha,\beta)\to\sum_{t\in T}\varepsilon_t\gamma_t$: $\pi\times\pi\to\mathbf{Z}[\pi]$ обозначается через λ_A или, короче, через λ. Отображение

$$(\alpha,\beta)\mapsto\mathrm{pr}_{\alpha,\beta}(\lambda(\alpha,\beta)):\pi\times\pi\to\bigoplus_{\alpha,\beta\in\pi}P_{\alpha,\beta}$$

и есть (в случае $a\in\partial A$) отображение Λ, о котором шла речь в § 1.

Ниже потребуются следующие свойства формы $\lambda=\lambda_A$, установленные в [6]. Для любых γ, δ, $\eta\in\pi$

$$\lambda(\gamma\delta,\eta)=\lambda(\gamma,\eta)+\gamma\lambda(\delta,\eta),\tag{3}$$

$$\lambda(\gamma^{-1},\eta)=-\gamma^{-1}\lambda(\gamma,\eta),\tag{4}$$

$$\lambda(\gamma,\eta)+\overline{\lambda(\eta,\gamma)}=(\gamma-1)(\bar\eta-1).\tag{5}$$

Если λ': $\pi\times\pi\to\mathbf{Z}[\pi]$ — форма, отвечающая ориентации пространства T_aA, противоположной заданной, то

$$\lambda'(\gamma,\eta)=\overline{\lambda(\eta,\gamma)}.\tag{6}$$

2.2. Случай $a\in\operatorname{Int}A$. Пусть D — содержащийся в $\operatorname{Int}A$ замкнутый диск с $a\in\partial D$. Положим $B=A\setminus\operatorname{Int}D$. Обозначим через i гомоморфизм включения $\pi_1(B,a)\to\pi$ и через i' — индуцированный им гомоморфизм $\mathbf{Z}[\pi_1(B,a)]\to\mathbf{Z}[\pi]$. Пусть $\lambda=\lambda_B$: $\pi_1(B,a)^2\to\mathbf{Z}[\pi_1(B,a)]$ — пересечение в $\pi_1(B,a)$, отвечающее выделенной ориентации пространства $T_aB=T_aA$. Для α, $\beta\in\pi$ положим $\tilde\Lambda(\alpha,\beta)=\{i'(\lambda(\delta,\eta))\mid\delta\in i^{-1}(\alpha),\ \eta\in i^{-1}(\beta)\}$. Очевидно, что $\tilde\Lambda(\alpha,\beta)$ не зависит от выбора диска D.

Лемма. *Для любых $\alpha,\beta\in\pi$ множество $\tilde\Lambda(\alpha,\beta)$ является классом смежности аддитивной группы кольца $\mathbf{Z}[\pi]$ по подгруппе* $(\alpha-1)\mathbf{Z}[\pi]+\mathbf{Z}[\pi](\bar\beta-1)$.

Доказательство. Обозначим через ν класс в $\pi_1(B,a)$ петли g: $(I,\partial I)\to(\partial A,a)$, которая параметризует окружность ∂A и для которой пара ($g'(0)$, направленный внутрь A вектор) задает выделенную в T_aA ориентацию. Из формул (3) и (4) следует, что для любых γ, δ, $\eta\in\pi_1(B,a)$ имеем

$$\lambda(\gamma\nu\gamma^{-1}\delta,\eta)=\lambda(\gamma,\eta)+\gamma\lambda(\nu,\eta)-$$
$$-\gamma\nu\gamma^{-1}\lambda(\gamma,\eta)+\gamma\nu\gamma^{-1}\lambda(\delta,\eta).$$

Поэтому $i'(\lambda(\gamma\nu\gamma^{-1}\delta,\eta))=i'(\gamma\lambda(\nu,\eta)+\lambda(\delta,\eta))$. Непосредственно проверяется, что $\lambda(\nu,\eta)=1-\bar\eta$, и, значит,

$$i'(\lambda(\gamma\nu\gamma^{-1}\delta,\eta))=i'(\lambda(\delta,\eta))+i'(\gamma(1-\bar\eta)).\tag{7}$$

Аналогичным образом имеем

$$i'(\lambda(\delta,\gamma\nu\gamma^{-1}\eta))=i'(\lambda(\delta,\eta))+i'((\delta-1)\bar\gamma).\tag{8}$$

Поскольку ν порождает $\operatorname{Ker}i$ как нормальный делитель, из (7) и (8) следует утверждение леммы.

В силу этой леммы образ множества $\tilde\Lambda(\alpha,\beta)$ при проекции $\mathbf{Z}[\pi]\to P_{\alpha,\beta}$ представляет собой элемент группы $P_{\alpha,\beta}$. Этот элемент обозначается через $\Lambda(\alpha, \beta)$. Отображение

$$(\alpha, \beta) \mapsto \Lambda(\alpha, \beta): \pi^2 \to \bigoplus_{\alpha,\beta\in\pi} P_{\alpha,\beta}$$

будем называть пересечением в π.

2.3. Свойства пересечения Λ. Пусть $\alpha, \beta\in\pi$.

(i) Очевидно, что инволюция $x\mapsto\bar{x}$ в $\mathbf{Z}[\pi]$ индуцирует изоморфизм $P_{\alpha,\beta}\to P_{\beta,\alpha}$. Для его обозначения тоже используется черта. Тогда

$$\Lambda(\alpha, \beta)+\overline{\Lambda(\beta, \alpha)}=0.$$

Это следует из формулы (5).

(ii). Группы $P_{\alpha,\beta}$, $P_{\alpha^{-1},\beta}$, $P_{\alpha,\beta^{-1}}$ и $P_{\alpha^{-1},\beta^{-1}}$ канонически изоморфны друг другу, так как $(\alpha^{-1}-1)\mathbf{Z}[\pi]=(\alpha-1)\mathbf{Z}[\pi]$ и $\mathbf{Z}[\pi](\bar{\beta}^{-1}-1)=\mathbf{Z}[\pi](\bar{\beta}-1)$. Если отождествить эти группы посредством канонических изоморфизмов, то будут выполняться равенства

$$\Lambda(\alpha, \beta)=-\Lambda(\alpha^{-1}, \beta)=-\Lambda(\alpha, \beta^{-1})=\Lambda(\alpha^{-1}, \beta^{-1}).$$

Докажем, например, первое равенство. В силу формулы (4), $\lambda(\delta^{-1}, \eta)=-\delta^{-1}\lambda(\delta, \eta)$. Поэтому

$$\begin{aligned}\lambda(\delta^{-1}, \eta)&=(\delta-1)\delta^{-1}\lambda(\delta, \eta)-\lambda(\delta, \eta)\equiv\\&\equiv-\lambda(\delta, \eta)\operatorname{mod}(\delta-1)\mathbf{Z}[\pi].\end{aligned}$$

(iii). Для $\gamma\in\pi$ аддитивный гомоморфизм $x\mapsto\gamma x$: $\mathbf{Z}[\pi]\to\mathbf{Z}[\pi]$ индуцирует гомоморфизм $P_{\alpha,\beta}\to P_{\gamma\alpha\gamma^{-1},\beta}$, так как

$$\gamma[(\alpha-1)\mathbf{Z}[\pi]+\mathbf{Z}[\pi](\bar{\beta}-1)]=(\gamma\alpha\gamma^{-1}-1)\mathbf{Z}[\pi]+\mathbf{Z}[\pi](\bar{\beta}-1).$$

Обозначим этот гомоморфизм через L_γ. Тогда для любого $\gamma\in\pi$

$$\Lambda(\gamma\alpha\gamma^{-1}, \beta)=L_\gamma(\Lambda(\alpha, \beta)).$$

Это следует из равенств

$$\begin{aligned}\lambda(\gamma\delta\gamma^{-1}, \eta)&=\lambda(\gamma, \eta)+\gamma\lambda(\delta, \eta)-\gamma\delta\gamma^{-1}\lambda(\gamma, \eta)\equiv\\&\equiv\gamma\lambda(\delta, \eta)\operatorname{mod}(1-\gamma\delta\gamma^{-1})\mathbf{Z}[\pi].\end{aligned}$$

(iii)′. Аналогично, гомоморфизм $x\mapsto x\gamma$: $\mathbf{Z}[\pi]\to\mathbf{Z}[\pi]$ индуцирует гомоморфизм $P_{\alpha,\beta}\to P_{\alpha,\gamma^{-1}\beta\gamma}$, который мы будем обозначать через R_γ. При этом

$$\Lambda(\alpha, \gamma\beta\gamma^{-1})=(-1)^{w(\gamma)}R_{\gamma^{-1}}(\Lambda(\alpha,\beta)).$$

(iv). Если Λ' — пересечение, отвечающее ориентации пространства T_aA, противоположной заданной, то

$$\Lambda'(\alpha, \beta)=-\Lambda(\alpha, \beta).$$

Это следует из формул (5) и (6).

(v). Очевидно, что суммирование коэффициентов по модулю два $\mathbf{Z}[\pi]\to\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ определяет гомоморфизм $P_{\alpha,\beta}\to\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ и что образ пересечения $\Lambda(\alpha, \beta)$ классов α и β при этом гомоморфизме равен индексу пересечения гомологических классов, определяемых α и β. В случае ориентируемого A этот результат усиливается очевидным образом.

(vi). Пусть s: $I\to A$ — путь в A с $s(0)=a$. Положим $b=s(1)$. Обозначим через Λ' пересечение в $\pi_1(A, b)$, отвечающее ориентации пространства T_bA, получающейся переносом вдоль s из выделенной ориентации пространства T_aA. Обозначим через u гомоморфизм переноса

$\pi \to \pi_1(A, b)$ вдоль s и через U — индуцированный им изоморфизм $P_{\alpha,\beta} \to P_{u(\alpha),u(\beta)}$. Тогда

$$\Lambda'(u(\alpha),\ u(\beta)) = U(\Lambda(\alpha,\ \beta)). \tag{9}$$

Доказательство. Достаточно доказать это предложение в случае, когда s — простой путь и хотя бы один из его концов лежит в $\operatorname{Int} A$, так как любой путь гомотопен произведению таких путей. В указанном случае α и β можно представить петлями, не пересекающимися с $s(I)$. С помощью этих петель равенство (9) проверяется прямым вычислением.

2.4. Расширение пересечения Λ до эрмитовой формы[1]. Обозначим прямую сумму $\bigoplus_{\alpha,\beta\in\pi} P_{\alpha,\beta}$ через Q и введем в Q структуру $\mathbf{Z}[\pi]$-бимодуля, положив для $\gamma\in\pi$ и $\xi\in P_{\alpha,\beta}$

$$\gamma\xi = L_\gamma(\xi) \quad \text{и} \quad \xi\gamma = R_\gamma(\xi)$$

(см. п. 2.3, (iii) и (iii)$'$). Инволюция $\xi \mapsto \bar{\xi}$: $Q \to Q$ (переводящая $P_{\alpha,\beta}$ в $P_{\beta,\alpha}$ — см. п. 2.3, (i)) связана с этой структурой очевидным соотношением $\overline{\gamma\xi} = \bar{\xi}\bar{\gamma}$.

Продолжим пересечение Λ: $\pi\times\pi\to Q$ до $\mathbf{Z}$-билинейной формы

$$\mathscr{L}\colon \mathbf{Z}[\pi]\times\mathbf{Z}[\pi]\to Q.$$

Относительно структуры левого $\mathbf{Z}[\pi]$-модуля в $\mathbf{Z}[\pi]$, определяемой формулой $\gamma\cdot\alpha = \gamma\alpha\gamma^{-1}$, и инволюции $\xi\mapsto\bar{\xi}$ в Q форма $\mathscr{L}$ является косоэрмитовой, т. е.

$$\mathscr{L}(\gamma\cdot\alpha,\beta) = \gamma\mathscr{L}(\alpha,\beta),\quad \mathscr{L}(\alpha,\gamma\cdot\beta) = \mathscr{L}(\alpha,\beta)\bar{\gamma},\quad \mathscr{L}(\alpha,\beta) + \overline{\mathscr{L}(\beta,\alpha)} = 0.$$

Это следует из утверждений (iii), (iii)$'$ и (i) предыдущего пункта.

2.5. Гомологическая интерпретация пересечения. Обозначим через θ локальную систему коэффициентов на A со слоем $\mathbf{Z}$, определяемую действием $(\gamma, n)\mapsto(-1)^{w(\gamma)}n$: $\pi\times\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$. Как хорошо известно, в двумерной гомологической группе пары $(A, \partial A)$ с коэффициентами в θ и замкнутыми носителями существует такой класс $[A, \partial A]$, что для любой локальной системы коэффициентов ξ на A гомоморфизм

$$[A,\ \partial A]\cap\colon H^*(A,\ \partial A;\ \xi)\to H_{2-*}(A;\ \theta\otimes\xi) \tag{10}$$

является изоморфизмом. С элементом α группы π свяжем локальную систему коэффициентов ξ_α на A со слоем $\mathbf{Z}[\pi]/(\alpha-1)\mathbf{Z}[\pi]$, определяемую действием π на $\mathbf{Z}[\pi]/(\alpha-1)\mathbf{Z}[\pi]$, которое паре $(\gamma,\ \delta \bmod (\alpha-1)\mathbf{Z}[\pi])$, где $\gamma\in\pi$, $\delta\in\mathbf{Z}[\pi]$, относит $\delta\gamma \bmod (\alpha-1)\mathbf{Z}[\pi]$. Легко проверить, что если $A_\alpha\to A$ — накрытие, отвечающее подгруппе $\{\alpha^n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ группы π, то градуированная группа $H_*(A;\ \xi_\alpha)$ канонически изоморфна $H_*(A_\alpha;\ \mathbf{Z})$. В частности, $H_1(A;\ \xi_\alpha) = H_1(A_\alpha;\ \mathbf{Z})$ — циклическая группа с канонической образующей (отвечающей элементу α группы $\{\alpha^n\}_{n\in\mathbf{Z}}$).

Если α, $\beta\in\pi$, то спаривание

$$\mathbf{Z}[\pi]/(\alpha-1)\mathbf{Z}[\pi]\times\mathbf{Z}[\pi]/(\beta-1)\mathbf{Z}[\pi]\to P_{\alpha,\beta},$$

определяемое формулой

$$(\delta \bmod (\alpha-1)\mathbf{Z}[\pi],\ \eta \bmod (\beta-1)\mathbf{Z}[\pi])\mapsto$$
$$\mapsto \delta\bar{\eta} \bmod ((\alpha-1)\mathbf{Z}[\pi] + \mathbf{Z}[\pi](\bar{\beta}-1)),$$

[1] Результаты этого и следующего пунктов в § 3 не используются.

задает спаривание локальных систем коэффициентов $\theta\otimes\xi_\alpha$ и $\theta\otimes\xi_\beta$ в $\theta\otimes P$, где P обозначает постоянную локальную систему на A со слоем $P_{\alpha,\beta}$. Последнее спаривание определяет форму

$$\cup\colon H^1(A, \partial A;\ \theta\otimes\xi_\alpha)\times H^1(A, \partial A;\ \theta\otimes\xi_\beta)\to H^2(A, \partial A;\ \theta\otimes P).$$

Компонуя эту форму с изоморфизмами (10), получаем спаривание

$$H_1(A;\ \xi_\alpha)\times H_1(A;\ \xi_\beta)\to H_0(A;\ P)=P_{\alpha,\beta}.$$

Непосредственно проверяется, что паре, составленной из канонических образующих групп $H_1(A;\ \xi_\alpha)$ и $H_1(A;\ \xi_\beta)$, отвечает при этом спаривании элемент $\Lambda(\alpha, \beta)$ группы $P_{\alpha,\beta}$.

Данная интерпретация пересечения Λ подсказывает его обобщение на случай двумерного комплекса Пуанкаре над произвольной областью коэффициентов.

§ 3. Доказательство теорем I, II и следствий I, II

3.1. Лемма. *Пусть $b\in A$ и Λ' — пересечение в $\pi_1(A, b)$, отвечающее некоторой ориентации пространства T_bA. Пусть α, $\beta\in\pi$ и α', $\beta'\in\pi_1(A, b)$ и пусть* $\mathrm{fr}(\alpha)=\mathrm{fr}(\alpha')$ *и* $\mathrm{fr}(\beta)=\mathrm{fr}(\beta')$. *Тогда* $|\Lambda'(\alpha', \beta')|=|\Lambda(\alpha, \beta)|$.

Доказательство. В силу утверждения (vi) п. 2.3, число $|\Lambda(\alpha, \beta)|$ не меняется при перенесении классов α, β вдоль пути в A. Поэтому можно считать, что $b=a$. При этом либо $\Lambda'=\Lambda$, либо $\Lambda'=-\Lambda$. Так как $\mathrm{fr}(\alpha)=\mathrm{fr}(\alpha')$ и $\mathrm{fr}(\beta)=\mathrm{fr}(\beta')$, классы α и β сопряжены соответственно с α' и β'. Таким образом, в силу утверждений (iii), (iii)$'$, (iv) п. 2.3,

$$|\Lambda'(\alpha', \beta')|=|\pm\Lambda(\alpha, \beta)|=|\Lambda(\alpha, \beta)|.$$

3.2. Доказательство теоремы I. Докажем неравенство (1). Если $k(x, y)=\infty$, то это неравенство очевидно. Поэтому будем считать, что $k(x, y)<\infty$, т. е. что число точек пересечения петель x и y (с учетом кратностей) конечно. Зафиксируем для каждой точки множества $x(S^1)\cap y(S^1)$ замкнутую круговую окрестность. Будем считать, что эти круги попарно не пересекаются, и обозначим через E их объединение. Снабдим E плоской римановой метрикой. Очевидно, что множество $x^{-1}(\mathrm{Int}\,E)$ представляет собой объединение открытых попарно непересекающихся дуг в S^1. Пусть x' — такое непрерывное отображение $S^1\to A$, что x' отображает каждую из указанных дуг биективно на прямолинейный интервал в $\mathrm{Int}\,E$, а в дополнении множества $x^{-1}(\mathrm{Int}\,E)$ отображения x и x' совпадают. Определим $y'\colon S^1\to A$ по y таким же способом. Очевидно, что x гомотопно x', y гомотопно y', петли x' и y' трансверсальны и $k(x, y)\geqslant k(x', y)$. Поэтому при доказательстве неравенства (1) можно считать, что x и y пересекаются трансверсально.

Пусть теперь D — замкнутый диск в $A\setminus(x(S^1)\cup y(S^1))$, пересекающийся с каждым из множеств $x(S^1)$, $y(S^1)$ в одной точке. Обозначим единственную точку множества $D\cap x(S^1)=\partial D\cap x(S^1)$ через b, пересечение в $\pi_1(A, b)$ через Λ' и элементы группы $\pi_1(A, b)=\pi_1(A, D)$, представляемые петлями x и y, соответственно через α' и β'. Непосредственно из определения пересечения следует, что $k(x, y)\geqslant|\Lambda'(\alpha', \beta')|$. В силу леммы 3.1 отсюда следует неравенство (1).

Докажем (2). Как и выше, можно считать, что самопересечения петли x трансверсальны. Пошевелив x, легко получить такую петлю x', что x и x' трансверсальны и $k(x, x')=2l(x)+w(\alpha)$. По доказанному,

$k(x, x') \geqslant |\Lambda(\alpha, \alpha)|$. Значит,

$$l(x) \geqslant \frac{1}{2}(|\Lambda(\alpha, \alpha)| - w(\alpha)).$$

3.3. Лемма. *Пусть* $\alpha, \beta \in \pi$ *и* $\delta = \sum_{\gamma \in \pi} n_\gamma \gamma \in \mathbf{Z}[\pi]$. *Если* $|\delta| > |\mathrm{pr}_{\alpha,\beta}(\delta)|$, *то либо* $|n_\gamma| \geqslant 2$ *для некоторого* $\gamma \in \pi$, *либо найдутся такие различные* $\gamma, \eta \in \pi$, *что* $n_\gamma \neq 0$, $n_\eta \neq 0$ *и* $\gamma = \alpha^m \eta \beta^n$ *для некоторых целых* m *и* n.

Доказательство. Разобьем группу π на попарно непересекающиеся классы следующим образом: элементы γ и η группы π входят в один класс, если $\gamma = \alpha^m \eta \beta^n$ для некоторых целых m и n. Для каждого такого класса, скажем, Γ составим сумму $\sum_{\gamma \in \Gamma} n_\gamma$; обозначим через $\|\delta\|$ число тех классов, для которых такая сумма нечетна. Очевидно, что $|\delta| \geqslant \|\delta\|$ и что если $\delta' - \delta \in (\alpha - 1)\mathbf{Z}[\pi] + \mathbf{Z}[\pi](\bar{\beta} - 1)$, то $\|\delta'\| = \|\delta\|$. Поэтому

$$|\mathrm{pr}_{\alpha,\beta}(\delta)| = \min\{|\delta'|,\ \delta' - \delta \in (\alpha - 1)\mathbf{Z}[\pi] + \mathbf{Z}[\pi](\bar{\beta} - 1)\} \geqslant \|\delta\|.$$

Значит, если $|\delta| > |\mathrm{pr}_{\alpha,\beta}(\delta)|$, то $|\delta| > \|\delta\|$. Отсюда следует утверждение леммы.

3.4. Доказательство теоремы II. Как и в [6], общий случай легко редуцируется к случаю компактного A. Будем считать, что классы $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ нетривиальны и что A не гомеоморфно ни сфере, ни проективной плоскости (для этих двух многообразий утверждение теоремы проверяется непосредственно). Зафиксируем в A риманову метрику постоянной неположительной кривизны, относительно которой край ∂A является вполне геодезическим подмногообразием. Как известно, каждый нетривиальный свободный гомотопический класс петель в A представляется замкнутой геодезической (единственной, если кривизна отрицательна). Обозначим через $x_1 : I \to A, \ldots, x_r : I \to A$ геодезические петли, представляющие соответственно $\mathrm{fr}(\alpha_1), \ldots, \mathrm{fr}(\alpha_r)$. (Здесь $x_i(0) = x_i(1)$ и $x_i'(0) = x_i'(1)$ при всех i.) Допустим, что эти петли имеют только трансверсальные пересечения и самопересечения и докажем, что они удовлетворяют условиям теоремы.

Докажем (i) в случае $i=1$ и $j=2$. Пусть D — замкнутый диск в A, пересекающийся с каждым из множеств $x_1(I)$, $x_2(I)$ в одной точке, не лежащей в пересечении этих множеств. Изменив при необходимости точку отсчета на $x_i(I)$, можем считать, что

$$D \cap x_i(I) = \partial D \cap x_i(I) = x_i(0) \quad \text{при } i = 1, 2.$$

В силу леммы 3.1, можем также считать, что $x_1(0) = a$ и что петли x_1, x_2 представляют в $\pi_1(A, D) = \pi$ соответственно α_1 и α_2.

Положим $T = \{(t_1, t_2) \in I \times I \mid x_1(t_1) = x_2(t_2)\}$. Для $t = (t_1, t_2) \in T$ обозначим через γ_t элемент группы $\pi_1(A, D) = \pi$, представляемый произведением $(x_1|_{[0,t_1]})(x_2|_{[0,t_2]})^{-1}$. По определению пересечения

$$\Lambda(\alpha_1, \alpha_2) = \mathrm{pr}_{\alpha_1,\alpha_2}\left(\sum_{t \in T} \pm \gamma_t\right)$$

при некотором выборе знаков $\pm$. Отсюда, в силу леммы 3.3, следует, что если $k(x_1, x_2) = \mathrm{card}\, T > |\Lambda(\alpha_1, \alpha_2)|$, то для некоторых $t, t' \in T$ и $m, n \in$ $\in \mathbf{Z}$

$$\gamma_{t'} = \alpha_1^m \gamma_t \alpha_2^n. \tag{11}$$

Пусть $t=(t_1, t_2)$ и $t'=(t_1', t_2')$. Из (11) следует, что пути

$$(x_1|_{[0,t_1]})^{-1} x_1^{-m} (x_1|_{[0,t_1']}) \text{ и } (x_2|_{[0,t_2]})^{-1} x_2^{n} (x_2|_{[0,t_2']})$$

с общим началом $x_1(t_1)=x_2(t_2)$ и общим концом $x_1(t_1')=x_2(t_2')$ гомотопны. Первый из этих путей проходит по $x_1(I)$ и потому гомотопен геодезической $I\to A$, образ которой лежит в $x_1(I)$. Аналогично, второй путь гомотопен геодезической, образ которой лежит в $x_2(I)$. В частности, эти две геодезические различны. Однако, как хорошо известно, в многообразии с метрикой постоянной неположительной кривизны две различные геодезические с общими концами не могут быть гомотопны. Полученное противоречие доказывает, что $k(x_1, x_2)=|\Lambda(\alpha_1, \alpha_2)|$.

Утверждение (ii) доказывается аналогичным образом с учетом того, что, поскольку самопересечения геодезической x_i трансверсальны, $e(\alpha_i)=1$ (см. также [6, § 3]).

Если некоторые из пересечений или самопересечений петель $x_1, \ldots$ $\ldots, x_r$ не трансверсальны, то это множество петель распадается на такие подмножества, что петли, входящие в одно подмножество, являются степенями некоторой геодезической, а петли, входящие в разные подмножества, трансверсальны. Поэтому общий случай теоремы II сводится к рассмотренному выше с помощью следующих утверждений: a) если классы $\alpha, \beta\in\pi$ представляются трансверсальными замкнутыми геодезическими, то $|\Lambda(\alpha^p, \beta^q)|=|pq|\cdot|\Lambda(\alpha, \beta)|$ для любых целых p и q; b) если $\alpha\in\pi$ представляется замкнутой геодезической с трансверсальными самопересечениями, то $|\Lambda(\alpha^p, \alpha^q)|=|pq|(|\Lambda(\alpha, \alpha)|-w(\alpha))+m$, где m — наибольший общий делитель чисел $|p|$ и $|q|$ в случае, когда $w(\alpha)=1$ и p, q нечетны, и $m=0$ в остальных случаях; c) если x: $S^1\to A$ — петля с трансверсальными самопересечениями и если $p, q\in\mathbf{Z}$, то, пошевелив петли x^p и x^q, можно получить соответственно такие петли y_p и y_q, что: $k(y_p, y_q)=2|pq|l(x)+M$, где $M=\min(|p|, |q|)$ в случае, когда $w(x)=1$ и p, q нечетны, и $M=0$ в остальных случаях; при $s=p, q$

$$l(y_s)=\begin{cases} s^2 l(x)+|s|-1, & \text{если } w(x)=0, \\ s^2 l(x)+\left[\dfrac{|s|-1}{2}\right], & \text{если } w(x)=1. \end{cases}$$

Утверждения a) и b) доказываются так же, как рассмотренные выше частные случаи утверждений (i) и (ii). Утверждение c) проверяется непосредственно.

3.5. Вывод следствия I из теорем I, II. Если классы $\mathrm{fr}(\alpha_i)$ и $\mathrm{fr}(\alpha_j)$ с $i\neq j$ содержат непересекающиеся петли, то, в силу теоремы I, $|\Lambda(\alpha_i, \alpha_j)|=0$ и потому $\Lambda(\alpha_i, \alpha_j)=0$. Обратно, если $\Lambda(\alpha_i, \alpha_j)=0$, то, в силу утверждения (v) п. 2.3, гомологический $\mathrm{mod}\,2$ индекс пересечения классов α_i и α_j равен 0, и значит, $n(\alpha_i, \alpha_j)=0$. Поэтому обратное утверждение следует из теоремы II.

3.6. Вывод следствия II из теорем I, II. Докажем импликацию (i)$\Rightarrow$(ii). Если $\mathrm{fr}(\alpha)$ содержит простую петлю, то, во-первых, $e(\alpha)=1$ (см. [5]), и, во-вторых, для некоторого $\beta\in\pi$ класс $\beta\alpha\beta^{-1}$ представляется простой петлей. Тогда непосредственно проверяется, что

$$\Lambda(\beta\alpha\beta^{-1}, \beta\alpha\beta^{-1})=-\mathrm{pr}_{\beta\alpha\beta^{-1}, \beta\alpha\beta^{-1}}(w(\alpha)).$$

Отсюда, в силу утверждений (iv) и (vi) п. 2.3, следует равенство $\Lambda(\alpha, \alpha)=\pm \mathrm{pr}_{\alpha,\alpha}(w(\alpha))$. Доказываемое утверждение следует теперь из формулы $-\mathrm{pr}_{\alpha,\alpha}(w(\alpha))=\mathrm{pr}_{\alpha,\alpha}(w(\alpha))$, которая в случае $w(\alpha)=0$ очевидна, а в случае $w(\alpha)=1$ следует из равенств

$$\mathrm{pr}_{\alpha,\alpha}(2)=\mathrm{pr}_{\alpha,\alpha}((\alpha-1)\alpha^{-1}-(\bar{\alpha}-1))=0.$$

Для доказательства импликации (ii)$\Rightarrow$(iii) достаточно доказать, что $|\mathrm{pr}_{\alpha,\alpha}(1)|=1$. Очевидно, что $0\leqslant|\mathrm{pr}_{\alpha,\alpha}(1)|\leqslant 1$. Равенство $|\mathrm{pr}_{\alpha,\alpha}(1)|=0$ невозможно: из него следовало бы равенство $\mathrm{pr}_{\alpha,\alpha}(1)=0$, а это противоречит тому, что суммирование коэффициентов $P_{\alpha,\alpha}\to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ переводит $\mathrm{pr}_{\alpha,\alpha}(1)$ в 1.

Импликация (iii)$\Rightarrow$(i) следует из теоремы II.

3.7. Замечание. Еще одно условие, эквивалентное условиям (i)—(iii) следствия II, можно сформулировать в терминах введенной в [6, добавление 2] операции самопересечения μ. Вот оно: $e(\alpha)=1$ и $\mu(\alpha)=0$.

Литература

1. *Chillingworth D. R. J.* Winding numbers on surfaces. II.— Math. Ann., 1972, v. 199, p. 131—153.
2. *Kervaire M. A.* Geometric and algebraic intersection numbers.— Comm. Math. Helv., 1965, v. 39, p. 271—280.
3. *Meeks W., Patrusky J.* Representing codimension-one homology classes by embedded submanifolds.— Pacif. J. Math., 1977, v. 68, p. 175—176.
4. *Meeks W. H.* Representing codimension-one homology classes on closed nonorientable manifolds by submanifolds. III.— Illinois J. Math., 1979, v. 23, p. 199—210.
5. *Reinhart B. L.* Algorithms for Jordan curves on compact surfaces.— Ann. Math., 1962, v. 75, p. 209—222.
6. *Тураев В. Г.* Пересечения петель в двумерных многообразиях.— Матем. сб., 1978, т. 106 (148), с. 566—588.
7. *Wall C. T. C.* Surgery on compact manifolds. London — New York: Academic Press, 1970.
8. *Zieschang H.* Algorithmen für einfache Kurven auf Flächen.— Math. Scand., 1965, v. 17, p. 17—40.
9. *Zieschang H.* Algorithmen für einfache Kurven auf Flächen. II.— Math. Scand., 1969, v. 25, p. 49—58.

Математический институт
им. В. А. Стеклова АН СССР
Ленинградское отделение

Поступила в редакцию
14.V.1982