ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Серия математическая

37(1973), 1241—1258

УДК 513.8

О. Я. ВИРО

РАЗВЕТВЛЕННЫЕ НАКРЫТИЯ МНОГООБРАЗИЙ С КРАЕМ И ИНВАРИАНТЫ ЗАЦЕПЛЕНИЙ. I

В работе найдены связи между инвариантами узла $K \subset S^{2k-1}$ коразмерности 2 и инвариантами циклических разветвленных накрытий шара D^{2k} с ветвлением над ориентированными компактными подмногообразиями, натянутыми на K; аналогичные связи изучаются в более общей ситуации.

Настоящая работа посвящена новой интерпретации некоторых известных теоретико-узловых инвариантов, как например, сигнатуры и единиц Минковского. Оказывается, что их можно рассматривать как инварианты циклических разветвленных накрытий шара с ветвлением над ориентированной поверхностью, натянутой на зацепление. В частности, сигнатура одномерного зацепления равна сигнатуре многообразия, двулистно разветвленно накрывающего шар.

Эта интерпретация позволяет определить подобные инварианты в более общей ситуации. Кроме того, на ее основе удается: 1) выявить связь между подходами Рохлина ([3]) и Тристрама ([9]) к проблеме реализации двумерных гомологических классов четырехмерного многообразия; 2) обобщить результаты Рохлина ([3]) на случай поверхности с особенностями; 3) обобщить неравенства Мурасуги ([8]) — Тристрама ([9]) на большие размерности. Этим приложениям будет посвящена вторая часть статьи.

В статье используется дифференциально-топологическая терминология. В частности, многообразиями называются гладкие многообразия, а подмногообразиями — подмногообразия гладких многообразий в смысле дифференциальной топологии.

В первых трех параграфах излагается главным образом известный материал в форме, приспособленной к нуждам настоящей работы. В § 1 описывается построение канонических разветвленных накрытий, представляющее собой модификацию конструкции из [([3]), § 2]; в §§ 2, 3 изучаются инварианты четномерного $\mathbf{Z}_m$-многообразия с краем, связанные с его квадратичной формой. Основные результаты сформулированы и частично доказаны в § 4; в § 5 завершается доказательство основной теоремы.

Автор благодарит В. А. Рохлина за постановку задачи и помощь.

§ 1. Канонические накрытия

1.1. Циклические разветвленные накрытия. Подмногообразие A многообразия X мы будем называть *правильным*, если $\partial X \cap \cap A = \partial A$ и в точках своего края A трансверсально ∂X.

Пусть Y — многообразие размерности $n+2$, и пусть A — собственное правильное n-мерное подмногообразие $(n+2)$-мерного многообразия X. Отображение $P: Y \to X$ называется *циклическим m-листным разветвленным накрытием многообразия X с ветвлением над A*, или, короче, *циклическим m-листным разветвленным накрытием пары* (X, A), если: а) определяемое отображением P отображение $p: Y \setminus P^{-1}(A) \to X \setminus A$ есть циклическое m-листное гладкое накрытие; б) для всякой точки $a \in A$ существуют такие вложения $\tilde{\varphi}_a: D^n \times D^2 \to Y$ и $\varphi_a: D^n \times D^2 \to X$, что $\varphi_a(D^n \times \times D^2)$ — окрестность точки a и

$$P \circ \tilde{\varphi}_a(v, w) = \varphi_a(v, w^m),$$

где $v \in D^n$, $w \in D^2$ (w рассматривается как комплексное число).

1.2 Определение. Пару, состоящую из ориентированного связного компактного $(n+2)$-мерного многообразия X с $H^1(X) = H^1(\partial X) = 0$ и его ориентированного компактного правильного n-мерного подмногообразия A, реализующего нуль группы $H_n(X, \partial X)$, мы будем называть *специальной парой.*

1.3. Построение канонических накрытий. Пусть (X, A) — специальная пара с $\dim A = n$, и пусть $\lambda: H_1(X \setminus A) \to \mathbf{Z}$ — коэффициент зацепления с фундаментальным классом подмногообразия A. Построим для каждого натурального m накрытие $p_m: Z_m \to X \setminus A$, отвечающее ядру композиции

$$\pi_1(X \setminus A) \xrightarrow{h} H_1(X \setminus A) \xrightarrow{\lambda} \mathbf{Z} \xrightarrow{\zeta_m} \mathbf{Z}_m,$$

где h — гомоморфизм Гуревича и ζ_m — естественная проекция.

Пусть B — (замкнутая) трубчатая окрестность подмногообразия A в X; она обладает структурой гладкого $SO(2)$-расслоения над A со слоем D^2. Поскольку край C слоя этого расслоения однократно зацеплен с A, композиция гомоморфизма включения $\pi_1(C) \to \pi_1(X \setminus A)$ с гомоморфизмом $\zeta_m \lambda h$ сюръективна. Из этого следует, что связны слои расслоения $p_m^{-1}(B \setminus A) \to A$, получающегося как композиция сужения $p_m^{-1}(B \setminus A) \to B \setminus A$ накрытия $p_m: Z_m \to \to X \setminus A$ и сужения $B \setminus A \to A$ расслоения $B \to A$, и потому расслоение $p_m^{-1}(B \setminus A) \to A$ наделяется структурой $SO(2)$-расслоения со слоем $D^2 \setminus \{0\}$. Пусть $p'_m: B_m \to A$ — ассоциированное расслоение со слоем D^2, и пусть $i: p_m^{-1}(B \setminus A) \to B_m$ — естественное вложение. Определим послойное вложение $i': p_m^{-1}(B \setminus A) \to B_m$ формулой $i'(w) = |w|^{\frac{1-m}{m}} i(w)$ и склеим многообразия Z_m и B_m посредством этого вложения. Естественные дифференциальные структуры многообразий Z_m и B_m определяют дифференциальную структуру полученного многообразия. Обозначим его через $N_m(X, A)$ и определим отображение

$P_m: N_m(X, A) \to X$ формулой

$$P_m(x) = \begin{cases} p_m(x), & \text{если } x \in Z_m, \\ p'_m(x), & \text{если } x \notin Z_m. \end{cases}$$

Очевидно, это отображение является циклическим m-листным разветвленным накрытием пары (X, A).

Ориентируем $N_m(X, A)$ так, чтобы проекция P_m имела степень $+m$. Автоморфизмы разветвленного накрытия $P_m: N_m(X, A) \to X$ (т. е. диффеоморфизмы $f: N_m(X, A) \to N_m(X, A)$ с $P_m f = P_m$) сохраняют ориентацию; они образуют группу, канонически изоморфную группе

$$\pi_1(X \setminus A)/p_{m*}\pi_1(Z_m) = \pi_1(X \setminus A)/\mathrm{Ker}(\zeta_m \lambda h)$$

автоморфизмов накрытия $p_m: Z_m \to X \setminus A$, которая в свою очередь канонически изоморфна $\mathbf{Z}_m$. Пусть $T: N_m(X, A) \to N_m(X, A)$ — автоморфизм накрытия $P_m: N_m(X, A) \to X$, отвечающий стандартной образующей группы $\mathbf{Z}_m$.

Разветвленное накрытие $P_m: N_m(X, A) \to X$ и $\mathbf{Z}_m$-многообразие* $(N_m(X, A), T)$ зависят лишь от исходных данных: специальной пары (X, A) и натурального числа m. Мы будем называть $P_m: N_m(X, A) \to X$ *каноническим m-листным накрытием*, а $\mathbf{Z}_m$-многообразие $(N_m(X, A), T)$ — *каноническим m-листным накрывающим пары* (X, A).

1.4. Кобордантность $\mathbf{Z}_m$-многообразий с краем. Назовем n-мерные $\mathbf{Z}_m$-многообразия (X_1, T_1), (X_2, T_2) *кобордантными*, если существует $\mathbf{Z}_m$-многообразие (X, T) размерности $n+1$, край которого можно получить, склеив (X_1, T_1) с $(-X_2, T_2)$ посредством некоторого эквивариантного диффеоморфизма $(\partial X_1, T_1/\partial X_1) \to (\partial X_2, T_2/\partial X_2)$.

Для замкнутых многообразий это определение эквивалентно обычному [(2), стр. 92—93]. Подобно тому, как это делается в замкнутом случае, можно показать, что кобордантность $\mathbf{Z}_m$-многообразий с краем — эквивалентность. Однако классы кобордантных $\mathbf{Z}_m$-многообразий с краем не образуют группы относительно дизъюнктного суммирования.

1.5. *Если (X_0, A_0), (X_1, A_1) — специальные пары с $X_0 = X_1 = X$ и $\partial A_0 = \partial A_1$, то для каждого натурального m канонические m-листные накрывающие $(N_m(X_0, A_0), T)$, $(N_m(X_1, A_1), T)$ кобордантны.*

Доказательство. Пусть $\dim A_0 = n$. Подмногообразие $\{0\} \times (-A_0) \cup I \times \partial A_1 \cup \{1\} \times A_1$ реализует нуль группы $H_n(\partial(I \times X))$. Поэтому существует реализующее нуль группы $H_{n+1}(I \times X, \partial(I \times X))$ правильное подмногообразие A с краем

$$\partial A = \{0\} \times (-A_0) \cup I \times \partial A_1 \cup \{1\} \times A_1.$$

Очевидно, $(I \times X, A)$ — специальная пара.

---

* Под $\mathbf{Z}_m$-многообразием мы будем понимать пару, состоящую из ориентированного компактного многообразия X и сохраняющего ориентацию диффеоморфизма $T: X \to X$ с $T^m = 1$.

Определим вложение $i: X\setminus A_0 \to I\times X\setminus A$ формулой $i(x)=(0, x)$. Из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X\setminus A_0) \arrow[r, "h_0"] \arrow[d, "i_*"'] & H_1(X\setminus A_0) \arrow[d, "i_*"] \arrow[dr, "\lambda_0"] & & \\ \pi_1(I\times X\setminus A) \arrow[r, "h"] & H_1(I\times X\setminus A) \arrow[r, "\lambda"'] & \mathbf{Z} \arrow[r, "\zeta_m"] & \mathbf{Z}_m \end{tikzcd}$$

в которой h_0 и h — гомоморфизмы Гуревича, ζ_m — естественная проекция, λ_0 — коэффициент зацепления с A_0 в X, а λ — коэффициент зацепления с A в $I\times X$, следует, что накрытие $p_m: N_m(X, A_0)\setminus P_m^{-1}(A_0)\to X\setminus A_0$, отвечающее ядру гомоморфизма $\zeta_m\lambda_0 h_0$, эквивалентно сужению накрытия

$$p_m: N_m(I\times X, A)\setminus P_m^{-1}(A)\to I\times X\setminus A,$$

отвечающего ядру гомоморфизма $\zeta_m\lambda h$; эта эквивалентность естественно продолжается до вложения

$$j_0: N_m(X, A_0)\to\partial N_m(I\times X, A).$$

Очевидно, j_0 обращает ориентацию и коммутирует с T. Аналогичным образом строится вложение

$$j_1: N_m(X, A_1)\to\partial N_m(I\times X, A)$$

с $\operatorname{Im} j_1=\partial N_m(I\times X, A)\setminus\operatorname{Int}\operatorname{Im} j_0$, которое согласовано с ориентациями и коммутирует с T. Вложения j_0 и j_1 дают представление края $\mathbf{Z}_m$-многообразия $N_m(I\times X, A)$ в виде результата склеивания $(-N_m(X, A_0), T)$ с $(N_m(X, A_1), T)$.

§ 2. Инварианты $\mathbf{Z}_m$-многообразий

2.1. Формы с изометрией. Пусть $\mathscr{F}$ — поле характеристики 0. Тройку, состоящую из конечномерного векторного пространства $\mathscr{V}$ над $\mathscr{F}$, билинейной симметрической или кососимметрической формы q на $\mathscr{V}$ и ее изометрии $\tau:\mathscr{V}\to\mathscr{V}$ мы будем называть **Z**-*формой* (над $\mathscr{F}$). Будем называть **Z**-форму $(\mathscr{V}, q, \tau)$ с $\tau^m=1$ $\mathbf{Z}_m$-*формой.*

Невырожденной частью **Z**-формы $(\mathscr{V}, q, \tau)$ будем называть **Z**-форму, получающуюся из $(\mathscr{V}, q, \tau)$ в результате факторизации по радикалу формы q (т. е. по аннулятору всего пространства $\mathscr{V}$). Назовем **Z**-форму $(\mathscr{V}, q, \tau)$ *кобордантной нулю*, если ее невырожденная часть $(\tilde{\mathscr{V}}, \tilde q, \tilde\tau)$ такова, что $\tilde{\mathscr{V}}$ содержит $\tilde\tau$-инвариантное вполне изотропное (т. е. аннулирующее себя) подпространство половинной размерности. Будем называть **Z**- формы $(\mathscr{V}_1, q_1, \tau_1)$, $(\mathscr{V}_2, q_2, \tau_2)$ *кобордантными*, если они обе симметрические или обе кососимметрические и если **Z**-форма

$$(\mathscr{V}_1\oplus\mathscr{V}_2,\ q_1\oplus(-q_2),\ \tau_1\oplus\tau_2)$$

кобордантна нулю. Нетрудно проверить, что кобордантность **Z**-форм — эквивалентность (ср. Левин ([5]), ([6])).

Множество классов кобордантных симметрических **Z**-форм над $\mathscr{F}$ обозначим через $\Lambda_{+1}(\mathscr{F})$, а множество классов кобордантных кососимметрических $\mathbf{Z}$-форм над $\mathscr{F}$ — через $\Lambda_{-1}(\mathscr{F})$. Эти множества являются, как нетрудно видеть, группами относительно ортогонального суммирования.

2.2. Форма $\mathbf{Z}_m$-многообразия. Пусть (X, T) есть $\mathbf{Z}_m$-многообразие размерности $2k$. Диффеоморфизм T индуцирует линейное преобразование

$$T_*: H_k(X; \mathbf{Q}) \to H_k(X; \mathbf{Q})$$

периода m, которое сохраняет индекс пересечения

$$Q: H_k(X; \mathbf{Q}) \otimes H_k(X; \mathbf{Q}) \to \mathbf{Q}.$$

Таким образом, $(H_k(X; \mathbf{Q}), Q, T^*)$ есть $\mathbf{Z}_m$-форма над $\mathbf{Q}$; мы будем называть ее формой $\mathbf{Z}_m$-многообразия (X, T).

2.3. *Формы кобордантных $\mathbf{Z}_m$-многообразий кобордантны.*

Эта теорема очевидным образом вытекает из следующих двух лемм:

1) *Форма $\mathbf{Z}_m$-многообразия, являющегося результатом склеивания $\mathbf{Z}_m$-многообразий (X_1, T_1), (X_2, T_2) посредством эквивариантного диффеоморфизма $(\partial X_1, T_1|\partial X_1) \to (-\partial X_2, T_2|\partial X_2)$, кобордантна ортогональной сумме форм $\mathbf{Z}_m$-многообразий (X_1, T_1), (X_2, T_2).*

2) *Форма кобордантного нулю $\mathbf{Z}_m$-многообразия кобордантна нулю.*

Доказательство первой леммы содержится в доказательстве аддитивности G-сигнатуры [([1]), предложение 7.1]; доказательство второй содержится в доказательстве того, что G-сигнатура кобордантного нулю G-многообразия равна нулю.

§ 3. Инварианты $\mathbf{Z}$-форм

3.1. Разложение $\mathbf{Z}$-формы. Пусть $\mathscr{F}$ — поле характеристики 0, и пусть $\Phi = (\mathscr{V}, q, \tau)$ есть $\mathbf{Z}$-форма над $\mathscr{F}$. Если λ — неприводимый многочлен над $\mathscr{F}$, то через $\mathscr{V}_\lambda$ обозначим λ-примарную компоненту пространства $\mathscr{V}$:

$$\mathscr{V}_\lambda = \operatorname{Ker} \lambda(\tau)^N \quad \text{для большого } N;$$

сужение $\mathscr{V}$-формы Φ на $\mathscr{V}_\lambda$ будем обозначать через Φ_λ или через $(\mathscr{V}_\lambda, q_\lambda, \tau_\lambda)$.

Если $\lambda(t) = t^k + a_1 t^{k-1} + \ldots + a_k$ — многочлен с коэффициентами в $\mathscr{F}$, то многочлен

$$\bar{\lambda}(t) = \frac{1}{a_k}(a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} + \ldots + 1)$$

назовем *симметричным* многочлену λ. Как показал Милнор [([7]), лемма 3.1], если многочлен λ не симметричен многочлену λ', то подпространство $\mathscr{V}_\lambda$ ортогонально (относительно q) подпространству $\mathscr{V}_{\lambda'}$. Из этого следует, что $\mathbf{Z}$-форму $\Phi = (\mathscr{V}, q, \tau)$ можно разложить в ортогональную сумму $\mathbf{Z}$-форм двух типов: 1) Φ_λ, где λ — симметрический (т. е. симметричный себе) неприводимый многочлен над $\mathscr{F}$, и 2) $(\mathscr{V}_\lambda + \mathscr{V}_{\bar{\lambda}}, q|\mathscr{V}_\lambda + \mathscr{V}_{\bar{\lambda}}, \tau|\mathscr{V}_\lambda + \mathscr{V}_{\bar{\lambda}})$, где λ —

несимметрический неприводимый многочлен над $\mathcal{F}$, и что слагаемые второго типа кобордантны нулю. Кроме того, $\mathbf{Z}$-форма Φ кобордантна нулю тогда и только тогда, когда все ее слагаемые первого типа кобордантны нулю; см. Левин ([6]).

3.2. Расширения $\mathbf{Z}$-формы. Если $\Phi = (\mathcal{V}, q, \tau)$ есть $\mathbf{Z}$-форма над $\mathcal{F}$ и $\mathcal{K}$ — расширение поля $\mathcal{F}$, то имеется очевидное расширение $\mathbf{Z}$-формы Φ до $\mathbf{Z}$-формы над $\mathcal{K}$. Эту $\mathbf{Z}$-форму мы будем обозначать через $\Phi^{\mathcal{K}}$ или через $(\mathcal{V}^{\mathcal{K}}, q^{\mathcal{K}}, \tau^{\mathcal{K}})$.

3.3. ЛЕММА (Левин [([6]), предложение 17]). *Симметрическая $\mathbf{Z}$-форма над $\mathbf{Q}$ кобордантна нулю тогда и только тогда, когда ее расширения до $\mathbf{Z}$-форм над всеми пополнениями поля $\mathbf{Q}$ кобордантны нулю.*

3.4. ЛЕММА (Левин [([6]), предложение 16]). *Если $(\mathcal{V}, q, \tau)$ — невырожденная симметрическая $\mathbf{Z}$-форма над одним из пополнений поля $\mathbf{Q}$ и если характеристический многочлен преобразования τ равен λ^e, где λ — неприводимый симметрический многочлен, то $\mathbf{Z}$-форма $(\mathcal{V}, q, \tau)$ кобордантна нулю тогда и только тогда, когда $\mathbf{Z}_1$-форма $(\mathcal{V}, q, 1)$ кобордантна нулю и показатель e четен.*

3.5. Инварианты симметрических $\mathbf{Z}_1$-форм. Пусть $\mathcal{V}$ — векторное пространство размерности n над $\mathcal{F}$, и пусть q — билинейная симметрическая форма на $\mathcal{V}$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортогональный (относительно q) базис пространства $\mathcal{V}$ с

$$q(e_i \otimes e_i) = a_i,$$

где $a_i \in \mathcal{F}$, $a_i \neq 0$ для $1 \leqslant i \leqslant r$ и $a_i = 0$ для $r < i \leqslant n$.

Обозначим через $d(q)$ элемент факторгруппы $\dot{\mathcal{F}}/(\dot{\mathcal{F}})^2$ мультипликативной группы поля $\mathcal{F}$ по подгруппе квадратов, определяемый формулой

$$d(q) = (-1)^{\left[\frac{r}{2}\right]} \prod_{i=1}^{r} a_i \,(\mathrm{mod}\, (\dot{\mathcal{F}})^2).$$

Обозначим через $\varepsilon(q)$ число r, приведенное по модулю 2. Ясно, что $d(q)$ и $\varepsilon(q)$ — инварианты класса $\mathbf{Z}_1$-форм, кобордантных $\mathbf{Z}_1$-форме $(\mathcal{V}, q, 1)$.

Пусть $\mathcal{F} = \mathbf{Q}_p$ — поле p-адических чисел. Обозначим произведение $\prod_{i=1}^{r} a_i$ через D; пусть $D = p^\alpha d$, где d — единица кольца целых p-адических чисел. Из классификации квадратичных форм над $\mathbf{Q}_p$ (см., например, ([4])) следует, что класс $\mathbf{Z}_1$-форм, кобордантных $\mathbf{Z}_1$-форме $(\mathcal{V}, q, 1)$, полностью определяется инвариантами $\varepsilon(q)$, $d(q)$ и *единицей Минковского*

$$C_q = \begin{cases} (p, D)^\alpha \prod\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r} (a_i, a_j), & \text{если } p \neq 2, \\ (-1)^{\left[\frac{r}{4}\right] + \left(1 + \left[\frac{r}{2}\right]\right)\frac{(d+1)}{2} + \frac{(d^2-1)\alpha}{8} + 1} \prod\limits_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r} (a_i, a_j), & \text{если } p = 2 \end{cases}$$

(здесь (,) — символ Гильберта). В случае четного r единицу Минковского можно заменить введенным Левиным ([6]) инвариантом

$$\mu(q) = (-1, -1)^{\frac{r(r+6)}{8}} (-1, D)^{\frac{r}{2}} \prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant r} (a_i, a_j).$$

Действительно, нетрудно убедиться в том, что

$$C(q) = (d(q), (-1)^{p-1} p^{\alpha}) \mu(q). \tag{1}$$

3.6. Инварианты симметрических $\mathbf{Z}$-форм. Пусть $\Phi = (\mathscr{V}, q, \tau)$ — симметрическая $\mathbf{Z}$-форма над $\mathbf{Q}$, и пусть $(\widetilde{\mathscr{V}}, \tilde{q}, \tilde{\tau})$ — ее невырожденная часть.

а) Для каждого симметрического неприводимого многочлена λ обозначим через $\varepsilon_\lambda(\Phi)$ приведенный по модулю 2 показатель, с которым λ входит в характеристический многочлен преобразования $\tilde{\tau}$.

б) Для каждого симметрического неприводимого многочлена λ обозначим через $d_\lambda(\Phi)$ инвариант $d(q_\lambda)$.

в) Для каждого симметрического неприводимого над $\mathbf{R}$ многочлена λ обозначим через $\sigma_\lambda(\Phi)$ сигнатуру $\sigma(q_\lambda^{\mathbf{R}})$.

Замечание. Сигнатуры $\sigma_\lambda(\Phi)$ можно получить, отправляясь от эрмитовой формы $q^{H\mathbf{C}}: (\mathscr{V} \otimes \mathbf{C}) \otimes (\mathscr{V} \otimes \mathbf{C}) \to \mathbf{C}$, определяемой формулой

$$q^{H\mathbf{C}}((v_1 \otimes z_1) \otimes (v_2 \otimes z_2)) = z_1 \bar{z}_2 q(v_1 \otimes v_2). \tag{2}$$

Именно, для $\zeta \in \mathbf{C}$ с $|\zeta| = 1$ и $\zeta \neq \pm 1$ сигнатура $\sigma_{t^2 - 2t\operatorname{Re}\zeta + 1}(\Phi)$ равна удвоенной сигнатуре сужения формы $q^{H\mathbf{C}}$ на $(v \otimes \mathbf{C})_{t-\zeta}$.

г) Для каждого симметрического неприводимого над $\mathbf{Q}_p$ многочлена λ обозначим через $C_\lambda^p(\Phi)$ единицу Минковского $C(q_\lambda^{\mathbf{Q}_p})$.

д) Так как всякий симметрический многочлен нечетной степени делится на $t-1$ или на $t+1$, то всякий неприводимый симметрический многочлен λ с $\lambda(1) \neq 0 \neq \lambda(-1)$ имеет четную степень. Поэтому для таких λ λ-примарные компоненты $\mathbf{Z}$-форм четномерны. Следовательно, для каждого симметрического неприводимого над $\mathbf{Q}_p$ многочлена λ с $\lambda(1) \neq 0 \neq \lambda(-1)$ определен инвариант Левина $\mu(q_\lambda^{\mathbf{Q}_p})$. Этот инвариант мы будем обозначать через $\mu_\lambda^p(\Phi)$.

3.7. *Симметрические $\mathbf{Z}$-формы Φ, Φ' кобордантны тогда и только тогда, когда $d_{t-1}(\Phi) = d_{t-1}(\Phi')$, $d_{t+1}(\Phi) = d_{t+1}(\Phi')$, $\varepsilon_\lambda(\Phi) = \varepsilon_\lambda(\Phi')$, $\sigma_\lambda(\Phi) = \sigma_\lambda(\Phi')$, $C_\lambda^p(\Phi) = C_\lambda^p(\Phi')$ при всех λ и p, для которых эти инварианты определены.*

Доказательство. Представим наши $\mathbf{Z}$-формы в виде

$$\Phi = \Phi_{t-1} \oplus \Phi_{t+1} \oplus \overline{\Phi} \text{ и } \Phi' = \Phi'_{t-1} \oplus \Phi'_{t+1} \oplus \overline{\Phi}'.$$

Кобордантность $\mathbf{Z}$-форм Φ, Φ' равносильна кобордантности соответствующих слагаемых этих разложений (см. п. 3.1). В силу результатов п. п. 3.3 — 3.5, для кобордантности $\mathbf{Z}$-форм Φ_{t-1}, Φ'_{t-1} и Φ_{t+1}, Φ'_{t+1} необходимо и достаточно, чтобы $d_\lambda(\Phi) = d_\lambda(\Phi')$, $\varepsilon_\lambda(\Phi) = \varepsilon_\lambda(\Phi')$, $\sigma_\lambda(\Phi) = \sigma_\lambda(\Phi')$, $C_\lambda^p(\Phi) = C_\lambda^p(\Phi')$ для $\lambda(t) = t-1$ и $\lambda(t) = t+1$ и для всех простых p.

Для всякого симметрического неприводимого над $\mathbf{Q}_p$ многочлена λ с $\lambda(1)\neq 0\neq\lambda(-1)$

$$d(q_\lambda^{\mathbf{Q}_p}) = ((-1)^{\deg\lambda}\lambda(1)\,\lambda(-1))^{\varepsilon_\lambda(\Phi)},$$

где $\deg\lambda$ — степень многочлена λ [см. ([6]), п. п. 7,21]. Поэтому формула (1) позволяет выразить инварианты μ_λ^p через C_λ^p и ε_λ:

$$\mu_\lambda^p(\Phi) = ((-1)^{\deg\lambda}\lambda(1)\,\lambda(-1), (-1)^{p-1}p^{\alpha})^{\varepsilon_\lambda(\Phi)} C_\lambda^p(\Phi), \tag{3}$$

где через α обозначен показатель при p в разложении числа $(\lambda(1)\,\lambda(-1))^{\varepsilon_\lambda(\Phi)}$.

С другой стороны, как показал Левин [([6]), теорема 21], инварианты ε_λ, σ_λ, μ_λ^p полностью определяют класс $\mathbf{Z}$-форм, кобордантных $\mathbf{Z}$-форме с тривиальными $(t-1)$-и $(t+1)$-примарными компонентами. Следовательно, $\mathbf{Z}$-формы $\overline{\Phi}, \overline{\Phi}'$ кобордантны тогда и только тогда, когда $\varepsilon_\lambda(\Phi) = \varepsilon_\lambda(\Phi')$, $\sigma_\lambda(\Phi) = \sigma_\lambda(\Phi')$ и $C_\lambda^p(\Phi) = C_\lambda^p(\Phi')$ для всех простых p и для всех λ с $\lambda(1)\neq 0\neq\lambda(-1)$, при которых эти инварианты определены.

3.8. ЛЕММА. *Всякая кососимметрическая $\mathbf{Z}$-форма, совпадающая со своей λ-примарной компонентой, где $\lambda(t)=t-1$ или $\lambda(t)=t+1$, кобордантна нулю.*

Доказательство. Как показал Левин [([6]), лемма 12], $\mathbf{Z}$-форма, совпадающая со своей λ-примарной компонентой, кобордантна такой $\mathbf{Z}$-форме $(\mathscr{V}, q, \tau)$, что λ — минимальный многочлен преобразования τ. Поэтому в случаях $\lambda(t)=t\pm 1$ можно считать, что всякое подпространство τ-инвариантно. С другой стороны, невырожденная часть формы q имеет (как невырожденная кососимметрическая форма) вполне изотропное подпространство половинной размерности.

3.9 Гомоморфизм M. Определим гомоморфизм

$$\mathrm{M}: \Lambda_{-1}(\mathscr{F})\to\Lambda_{+1}(\mathscr{F}),$$

отнеся классу кососимметрической $\mathbf{Z}$-формы $(\mathscr{V}, q, \tau)$ класс симметрической $\mathbf{Z}$-формы $(\mathscr{V}, \mu(q,\tau),\tau)$, где форма $\mu(q, \tau)$ определяется формулой

$$\mu(q,\tau)\,(v_1\otimes v_2) = q((\tau-\tau^{-1})\,v_1\otimes v_2)$$

[ср. Милнор ([7])]. Корректность определения и гомоморфность этого отображения вытекают непосредственно из определений.

3.10. *Гомоморфизм* M *инъективен.* Действительно, пусть $(\mathscr{V}, q, \tau)$ — такая кососимметрическая $\mathbf{Z}$-форма, что $\mathbf{Z}$-форма $(\mathscr{V}, \mu(q, \tau), \tau)$ кобордантна нулю. В соответствии с изложенным в п. п. 3.1, 3.8, достаточно рассмотреть случай $\mathscr{V}=\mathscr{V}_\lambda$, где λ — симметрический неприводимый многочлен с $\lambda(1)\neq 0\neq\lambda(-1)$. В этом случае $\tau-\tau^{-1}$ — автоморфизм, и потому форму q можно выразить через $\mu(q,\tau)$:

$$q(v_1\otimes v_2) = \mu(q,\tau)\,((\tau-\tau^{-1})^{-1}v_1\otimes v_2).$$

Следовательно, радикалы и τ-инвариантные вполне изотропные подпространства форм q и $\mu(q, \tau)$ совпадают, и, значит, $\mathbf{Z}$-форма $(\mathscr{V}, q, \tau)$ кобордантна нулю.

3.11. *Кососимметрические $\mathbf{Z}$-формы Φ, Φ' кобордантны тогда и только тогда, когда* $\varepsilon_\lambda(\text{М}\Phi) = \varepsilon_\lambda(\text{М}\Phi')$, $\sigma_\lambda(\text{М}\Phi) = \sigma_\lambda(\text{М}\Phi')$, $C^p_\lambda(\text{М}\Phi) = C^p_\lambda(\text{М}\Phi')$ *для всех простых p и для всех λ с $\lambda(1) \neq 0 \neq \lambda(-1)$, при которых эти инварианты определены.*

Эта теорема следует из результатов п. п. 3.7, 3.8 и 3.10.

Замечание. В силу равенств (3), теорема 3.11 останется верной, если в ее формулировке заменить условие $C^p_\lambda(\text{М}\Phi) = C^p_\lambda(\text{М}\Phi')$ условием $\mu^p_\lambda(\text{М}\Phi) = \mu^p_\lambda(\text{М}\Phi')$.

§ 4. Основные результаты

4.1. Построение инвариантов замкнутой специальной пары. Пусть (M, L) — специальная пара с $\dim M = 2k+1$, состоящая из замкнутых многообразий, и пусть A — ориентированное компактное правильное $2k$-мерное подмногообразие произведения $I \times M$, имеющее край $\partial A = \{1\} \times L$. В силу теоремы 1.5, класс $\mathbf{Z}_m$-многообразий, кобордантных каноническому накрывающему $(N_m(I \times M, A), T)$, не зависит от подмногообразия A, а зависит только от дифференциально-топологического типа пары (M, L), и потому инварианты этого класса являются инвариантами пары (M, L). В частности, как показывает теорема 2.3, к числу инвариантов пары (M, L) принадлежит класс $\mathbf{Z}_m$-форм, кобордантных форме канонического накрывающего $(N_m(I \times M, A), T)$, а значит, и инварианты этого класса, описанные в § 3.

4.2. Спаривание Зайферта. Пусть M — ориентированное замкнутое $(2k+1)$-мерное многообразие и N — его ориентированное компактное $2k$-мерное подмногообразие. Обозначим через $\hat{H}_k(N)$ ядро гомоморфизма включения

$$H_k(N; \mathbf{Q}) \longrightarrow H_k(M; \mathbf{Q}).$$

Ориентации многообразий N и M определяют нормальное векторное поле на N. Пусть $s: N \longrightarrow M \setminus N$ — малый сдвиг вдоль этого поля. Спариванием Зайферта пары (M, N) называется спаривание

$$\theta: \hat{H}_k(N) \otimes \hat{H}_k(N) \to \mathbf{Q},$$

определяемое формулой

$$\theta(v_1 \otimes v_2) = \lambda(v_1 \otimes s_*(v_2)), \tag{4}$$

где λ — коэффициент зацепления.

4.3. $\mathbf{Z}_m$-формы спаривания. Пусть $\mathscr{V}$ — конечномерное векторное пространство над $\mathbf{Q}$. В этом пункте по каждому спариванию $q: \mathscr{V} \otimes \mathscr{V} \longrightarrow \mathbf{Q}$ и каждому натуральному $m \geqslant 2$ мы построим две $\mathbf{Z}_m$-

формы над $\mathbf{Q}$: симметрическую, $(\mathscr{V}^{m-1}, q_{+1}, \tau)$, и кососимметрическую, $(\mathscr{V}^{m-1}, q_{-1}, \tau)$; мы будем называть их *$\mathbf{Z}_m$-формами спаривания q.*

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_{m-1}$ — координатные проекции $(m-1)$-ой декартовой степени $\mathscr{V}^{m-1}$ пространства $\mathscr{V}$ и $\eta_1, \ldots, \eta_{m-1}$ — координатные вложения. Определим оператор $\tau : \mathscr{V}^{m-1} \longrightarrow \mathscr{V}^{m-1}$ формулой

$$\tau(v) = \sum_{i=1}^{m-2} \eta_{i+1}\xi_i(v) - \sum_{i=1}^{m-1} \eta_i\xi_{m-1}(v). \tag{5}$$

Очевидно, $\tau^m = 1$. Для $\varepsilon = \pm 1$ определим формы $q_\varepsilon : \mathscr{V}^{m-1} \otimes \mathscr{V}^{m-1} \longrightarrow \mathbf{Q}$ формулой

$$q_\varepsilon(v_1 \otimes v_2) = \sum_{i=1}^{m-1} (q(\xi_i(v_1) \otimes \xi_i(v_2)) + \varepsilon q(\xi_i(v_2) \otimes \xi_i(v_1))) -$$

$$- \sum_{i=1}^{m-2} (q(\xi_{i+1}(v_1) \otimes \xi_i(v_2)) + \varepsilon q(\xi_{i+1}(v_2) \otimes \xi_i(v_1))). \tag{6}$$

Нетрудно проверить, что формы q_ε инвариантны относительно τ.

4.4. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. *Пусть (M, L) — специальная пара с $\dim M = 2k+1$, состоящая из замкнутых многообразий; пусть N — ориентированное компактное $2k$-мерное подмногообразие многообразия M, натянутое на L (т. е. с $\partial N = L$), и пусть A — ориентированное компактное правильное $2k$-мерное подмногообразие произведения $I \times M$, имеющее край $\partial A = \{1\} \times L$. Тогда для каждого $m \geqslant 2$ форма канонического m-листного накрывающего $(N_m(I \times M, A), T)$ кобордантна (симметрической в случае нечетного k и кососимметрической в случае четного k) $\mathbf{Z}_m$-форме спаривания Зайферта пары (M, N).*

4.5. Следствие. *Пусть L — ориентированное замкнутое $(2k-1)$-мерное подмногообразие сферы S^{2k+1}; пусть N — ориентированное компактное $2k$-мерное подмногообразие сферы S^{2k+1}, натянутое на L, и пусть A — ориентированное компактное правильное $2k$-мерное подмногообразие шара D^{2k+2}, имеющее край $\partial A = L$. Тогда для каждого $m \geqslant 2$ форма канонического m-листного накрывающего $(N_m(D^{2k+2}, A), T)$ кобордантна (симметрической в случае нечетного k и кососиметрической в случае четного k) $\mathbf{Z}_m$-форме спаривания Зайферта пары (S^{2k+1}, N).*

Вывод следствия из основной теоремы. Пусть D — подмногообразие шара D^{2k+2}, диффеоморфное D^{2k+2} и не пересекающееся с $A \cup S^{2k+1}$. Так как сужение канонического накрытия $P_m : N_m(D^{2k+2}, A) \to D^{2k+2}$ на $D^{2k+2} \setminus \operatorname{Int} D$ диффеоморфно каноническому накрытию $N_m(D^{2k+2} \setminus \operatorname{Int} D, A) \to$ $\to D^{2k+2} \setminus \operatorname{Int} D$, то $\mathbf{Z}_m$-многообразие $(N_m(D^{2k+2}, A), T)$ можно получить, приклеив к $(N_m(D^{2k+2} \setminus \operatorname{Int} D, A), T)$ $\mathbf{Z}_m$-многообразие $(P_m^{-1}(D), T \mid P_m^{-1}(D))$. Но $P_m^{-1}(D)$ диффеоморфно дизъюнктному объединению m копий шара D. Следовательно, формы $\mathbf{Z}_m$-многообразий $(N_m(D^{2k+2}, A), T), (N_m(D^{2k+2} \setminus \operatorname{Int} D, A), T)$ изоморфны. Пара $(D^{2k+2} \setminus \operatorname{Int} D, S^{2k+1})$ диффеоморфна $(I \times S^{2k+1}, \{1\} \times S^{2k+1})$ и потому, в силу основной теоремы, форма канонического накрывающего $(N_m(D^{2k+2}\setminus \mathrm{Int}\, D, A), T)$ кобордантна соответствующей $\mathbf{Z}_m$-форме спаривания Зайферта пары (S^{2k+1}, N).

4.6. Классические теоретико-узловые инварианты. Пусть (S^{2k+1}, K) — узел размерности $2k-1$ (т. е. пара, состоящая из сферы S^{2k+1} и ее ориентированного подмногообразия K, гомеоморфного S^{2k-1}). Спаривания Зайферта пар вида (S^{2k+1}, N), где N — ориентированное компактное подмногообразие сферы S^{2k+1}, натянутое на K, называются также *спариваниями Зайферта узла* (S^{2k+1}, K), а квадратичные формы, получающиеся в результате симметризации этих спариваний, называются *квадратичными формами узла* (S^{2k+1}, K). Сигнатура и единицы Минковского квадратичной формы узла называются *сигнатурой* и *единицами Минковского* этого узла; они действительно являются его инвариантами, т. е. не зависят от выбора N (см., например, ([10])).

Симметрическая $\mathbf{Z}_2$-форма спаривания получается в результате обычной симметризации этого спаривания. Поэтому *если k нечетно, то квадратичная форма узла (S^{2k+1}, K) кобордантна (как $\mathbf{Z}_1$-форма) квадратичной форме многообразия, двулистно разветвленно накрывающего шар D^{2k+2} с ветвлением над любым ориентированным компактным правильным подмногообразием, натянутым на K, и, значит, сигнатура и единицы Минковского узла (S^{2k+1}, K) равны соответственно сигнатуре и единицам Минковского квадратичной формы этого многообразия.*

4.7. Эрмитовы формы спаривания. Пусть $\mathscr{V}$ — конечномерное векторное пространство над $\mathbf{Q}$, и пусть $q: \mathscr{V}\otimes\mathscr{V} \longrightarrow \mathbf{Q}$ — спаривание. Для $\zeta \in \mathbf{C}$ с $|\zeta| = 1$, $\zeta \neq 1$ определим эрмитову форму $q_{(\zeta)}$: $(\mathscr{V}\otimes\mathbf{C})\otimes$ $\otimes(\mathscr{V}\otimes\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbf{C}$ формулой

$$q_{(\zeta)}((v_1\otimes z_1)\otimes(v_2\otimes z_2)) = z_1\bar{z}_2((1-\bar{\zeta})q(v_1\otimes v_2) + (1-\zeta)q(v_2\otimes v_1)) \tag{7}$$

[ср. ([5]), п. 25, ([9])].

Если ζ — первообразный корень m-ой степени из 1, то форма $q_{(\zeta)}$ изоморфна сужению на $(\mathscr{V}^{m-1}\otimes\mathbf{C})_{t-\zeta}$ эрмитовой формы $(q_{+1})^{\text{нс}}$ (см. п. 3.6), построенной по симметрической $\mathbf{Z}_m$-форме спаривания q.

Доказательство. Определим вложение $\nu: \mathscr{V}\otimes\mathbf{C} \longrightarrow \mathscr{V}^{m-1}\otimes\mathbf{C}$ формулой

$$\nu(v\otimes z) = \frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{i=1}^{m-1}\eta_i(v)\otimes(\zeta^{m-i}-1)z. \tag{8}$$

Покажем, что $\mathrm{Im}\,\nu = (\mathscr{V}^{m-1}\otimes\mathbf{C})_{t-\zeta}$. Действительно, пусть $v \in (\mathscr{V}^{m-1}\otimes\mathbf{C})_{t-\zeta} = \mathrm{Ker}(\tau-\zeta)$. Тогда

$$(\tau-\zeta)v = \sum_{i=2}^{m-1}\eta_i(\xi_{i-1}-\xi_{m-1}-\zeta\xi_i)v - \eta_1(\xi_{m-1}+\zeta\xi_1)v = 0.$$

Следовательно, $(\xi_{m-1}+\zeta\xi_1)v=0$ и $(\xi_{i-1}-\xi_{m-1}-\zeta\xi_i)v=0$ для $i=2,\ldots$ $\ldots, m-1$. Из этих уравнений получаем:

$$\xi_i(v)=\frac{\zeta^{m-i}-1}{\zeta-1}\xi_{m-1}(v). \tag{9}$$

Положим $w=\frac{\sqrt{m}}{\zeta-1}\xi_{m-1}(v)$. В силу (9) имеем:

$$\nu(w)=\frac{1}{\sqrt{m}}\sum_{i=1}^{m-1}(\zeta^{m-i}-1)\eta_i\frac{\sqrt{m}}{\zeta-1}\,\frac{\zeta-1}{\zeta^{m-i}-1}\xi_i(v)=\sum_{i=1}^{m-1}\eta_i\xi_i(v)=v.$$

Теперь покажем, что ν — изометрия. Действительно, в силу формул (8), (2), (6), (7),

$$\begin{aligned}&(q_{+1})^{HC}(\nu(v_1\otimes z_1)\otimes\nu(v_2\otimes z_2))=\\&=z_1\bar z_2\sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=1}^{m-1}(\zeta^{m-i}-1)\overline{(\zeta^{m-j}-1)}\frac{1}{m}q_{+1}(\eta_i(v_1)\otimes\eta_j(v_2))=\\&=\frac{z_1\bar z_2}{m}\Bigg\{\sum_{i=1}^{m-1}{}'(\zeta^{m-i}-1)\overline{(\zeta^{m-i}-1)}(q(v_1\otimes v_2)+q(v_2\otimes v_1))-\\&\quad-\sum_{i=1}^{m-2}(\zeta^{m-i-1}-1)\overline{(\zeta^{m-i}-1)}q(v_1\otimes v_2)-\\&\quad-\sum_{i=1}^{m-2}(\zeta^{m-i}-1)\overline{(\zeta^{m-i-1}-1)}q(v_2\otimes v_1)\Bigg\}=\\&=\frac{z_1\bar z_2}{m}\{2m(q(v_1\otimes v_2)+q(v_2\otimes v_1))-\\&\quad-m(1+\bar\zeta)q(v_1\otimes v_2)-m(1+\zeta)q(v_2\otimes v_1)\}=\\&=z_1\bar z_2((1-\bar\zeta)q(v_1\otimes v_2)+(1-\zeta)q(v_2\otimes v_1))=q_{(\zeta)}((v_1\otimes z_1)\otimes(v_2\otimes z_2)).\end{aligned}$$

4.8. Сигнатуры Левина — Тристрама. Сигнатуры эрмитовых форм спаривания Зайферта (в случае узлов любой размерности и одномерных зацеплений) рассматривались в работах Тристрама ([9]) и Левина ([5]), ([6]). (В статье Тристрама ([9]) сигнатура формы $q_{(\exp(p-1)\pi i/p)}$ обозначается через $\sigma_p(q)$, а в статье Левина ([5]) если A — матрица спаривания q, то сигнатура формы $q_{(\bar\zeta)}$ обозначается через $\sigma_A(-\zeta)$.)

В силу основной теоремы и результата предыдущего пункта, сигнатуры эрмитовых форм спаривания Зайферта, отвечающих корням из единицы, можно получить в качестве инвариантов циклических разветвленных накрывающих. Точнее, если в условиях основной теоремы k нечетно и ζ — первообразный корень m-ой степени из 1, то сигнатура отвечающей ζ эрмитовой форме спаривания Зайферта пары (M, N) равна сигнатуре сужения на $\operatorname{Ker}(T_*-\zeta)$ эрмитовой формы, построенной по форме $\mathbf{Z}_m$-многообразия $(N_m(I\times M, A), T)$.

§ 5. Доказательство основной теоремы

5.1. Выбор подмногообразия A. Как было показано в п. 4.1, класс $\mathbf{Z}_m$-форм, кобордантных форме канонического накрывающего $(N_m(I \times M, A), T)$, не зависит от A. Поэтому основную теорему достаточно доказать для какого-нибудь конкретного A. Мы будем считать, что A получено в результате сглаживания углов «подмногообразия с углами» $[^1/_2, 1] \times L \cup \{^1/_2\} \times N$. Точнее, пусть $c: I \times L \longrightarrow N$ — вложение с $c(1, x) = x$ для $x \in L$, и пусть $f: I \to I$ — гладкая функция с $f(t) = {}^1/_2$ для $t \leqslant {}^1/_2$, $f(1) = 1$ и $f'(t) > 0$ для $t > {}^1/_2$. Определим функцию $h: N \to I$ формулой

$$h(x) = \begin{cases} f(t), & \text{если } x = c(t, y) \in c(I \times L), \\ \frac{1}{2}, & \text{если } x \in N \setminus c(I \times L). \end{cases}$$

Положим $A = \{(t, x) \in I \times N \mid t \geqslant h(x)\}$.

5.2. Вспомогательные объекты. Обозначим через S множество

$$\{(t, x) \in I \times N \mid t \geqslant h(x)\}$$

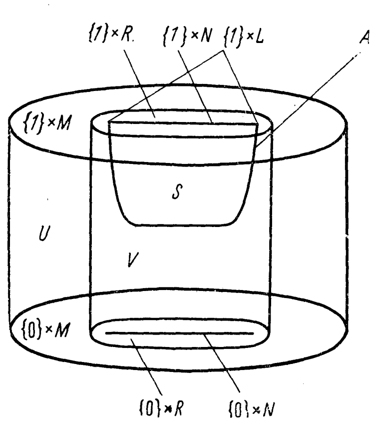

Рис. 1

(см. рис. 1); ясно, что S — подмногообразие размерности $2k + 1$ с углом на крае вдоль $\{1\} \times L$. Введем сокращения:

$$U = I \times M \setminus S, \quad X = I \times M, \quad \widetilde{U} = P_m^{-1}(U),$$

$$\widetilde{X} = N_m(I \times M, A), \quad \widetilde{A} = P_m^{-1}(A).$$

Так как коэффициент зацепления класса $x \in H_1(X \setminus A)$ с фундаментальным классом $[A]$ подмногообразия A равен индексу пересечения класса x с классом из $H_{2k+1}(X, A \cup \partial X)$, реализуемым подмногообразием S, то коэффициенты зацепления классов из образа гомоморфизма включения $H_1(U) \longrightarrow H_1(X \setminus A)$ с классом $[A]$ равны нулю. Поэтому сужение $\widetilde{U} \to U$ канонического накрытия $P_m: \widetilde{X} \to X$ тривиально, т. е. $\widetilde{U}$ состоит из m компонент, каждая из которых диффеоморфно отображается проекцией P_m на U. Пусть U_0 — одна из компонент многообразия $\widetilde{U}$; положим $U_j = T^j(U_0)$ для $j=1, \ldots, m-1$.

Обозначим через π естественную проекцию многообразия $X = I \times M$ на M. Фиксируем какую-нибудь риманову метрику на X. Пусть $C_1, \ldots, C_g$ — такие ориентированные связные компактные правильные $(k+1)$-мерные подмногообразия многообразия $[0, 1/2] \times M$, что:

1) $\partial C_1, \ldots, \partial C_g \subset A$;

2) подмногообразия $\pi(\partial C_1), \ldots, \pi(\partial C_g)$ реализуют некоторый базис $d_1, \ldots, d_g$ пространства $\hat{H}_k(N) = \mathrm{Ker}(H_k(N; \mathbf{Q}) \to H_k(M; \mathbf{Q}))$;

3) подмногообразия $C_1, \ldots, C_g$ ортогональны краю многообразия $[0, 1/2] \times M$.

Обозначим для $i = 1, \ldots, g$ и $j = 0, \ldots, m-2$ через $C_{i,j}$ «подмногообразие с углами»

$$P_m^{-1}(C_i) \cap (U_{j+1} \cup \widetilde{A} \cup U_j);$$

ориентируем $C_{i,j}$ так, чтобы сужение $C_{i,j} \cap (U_{j+1} \cup \widetilde{A}) \longrightarrow C_i$ проекции P_m имело степень $+1$. Обозначим через $e_{i,j}$ элемент группы $H_{k+1}(\widetilde{X}; \mathbf{Q})$, представителем которого является $C_{i,j}$; пусть $\mathscr{E}$ — подпространство пространства $H_{k+1}(\widetilde{X}; \mathbf{Q})$, порожденное векторами $e_{i,j}$ $(i=1, \ldots, g;\ j=0, \ldots \ldots, m-2)$.

Ясно, что $T_*^j e_{i,0} = e_{i,j}$ для $j \leqslant m-2$ и $T_*^{m-1} e_{i,0} = -\sum_{j=0}^{m-2} e_{i,j}$. Таким образом, подпространство $\mathscr{E}$ T_*-инвариантно.

5.3. Редукция к леммам. Основная теорема очевидным образом вытекает из следующих двух лемм.

ЛЕММА 1. *Невырожденные части $\mathbf{Z}_m$-формы $(H_{k+1})\widetilde{X}; \mathbf{Q})$, Q, $T_*)$ и ее сужения на $\mathscr{E}$ канонически изоморфны.*

ЛЕММА 2. *Сужение $\mathbf{Z}_m$-формы $(H_{k+1}(\widetilde{X}, \mathbf{Q})$, $Q, T_*)$ на $\mathscr{E}$ изоморфно $\mathbf{Z}_m$-форме спаривания $\theta : \hat{H}_k(N) \otimes \hat{H}_k(N) \to \mathbf{Q}$ (симметрической, если k нечетно, и кососимметрической, если k четно).*

5.4. Доказательство леммы 1. Пусть R — регулярная окрестность подмногообразия N в M. Положим

$$V = I \times R, \quad W = U \cup V, \quad \widetilde{V} = P_m^{-1}(V), \quad \widetilde{W} = P_m^{-1}(W),$$

$$\widetilde{M} = P_m^{-1}(\{0\} \times M), \quad \widetilde{N} = P_m^{-1}(\{0\} \times N),$$

$$W_j = \widetilde{W} \cap U_j, \quad N_j = \widetilde{N} \cap U_j.$$

Естественная деформационная ретракция $V \to I \times N \to A$ индуцирует деформационную ретракцию $\widetilde{V} \to \widetilde{A}$. Ясно, что композиция включения $\{0\} \times N \to V$ и ретракции $V \to A$ есть диффеоморфизм. Эта композиция индуцирует отображение $\widetilde{N} \to \widetilde{A}$, сужения которого на подмногообразия N_j также являются диффеоморфизмами. Поэтому гомоморфизм включения $\nu_* : H_*(W; \mathbf{Q}) \to H_*(V; \mathbf{Q})$ сюръективен.

Рассмотрим отрезок гомологической аддиционной последовательности триады $(\tilde{X}; \tilde{U}, \tilde{V})$:

$$H_{k+1}(\widetilde{W}; \mathbf{Q}) \to H_{k+1}(\widetilde{V}; \mathbf{Q}) \oplus H_{k+1}(\widetilde{U}; \mathbf{Q}) \xrightarrow{\varphi}$$

$$\xrightarrow{\varphi} H_{k+1}(\widetilde{X}; \mathbf{Q}) \xrightarrow{\chi} H_k(\widetilde{W}; \mathbf{Q}) \xrightarrow{\psi} H_k(\widetilde{V}; \mathbf{Q}) \oplus H_k(\widetilde{U}; \mathbf{Q}).$$

Из сюръективности ν_* следует, что $\operatorname{Im}\varphi$ совпадает с образом гомоморфизма включения $\varkappa_* : H_{k+1}(\tilde{U}; \mathbf{Q}) \to H_{k+1}(\tilde{X}; \mathbf{Q})$. Естественная деформационная ретракция $U \to \{0\} \times M$ индуцирует деформационную ретракцию $\tilde{U} \to \tilde{M}$ и потому $\operatorname{Im}\varkappa_*$ содержится в образе гомоморфизма включения $H_{k+1}(\partial\tilde{X}; \mathbf{Q}) \to H_{k+1}(\tilde{X}; \mathbf{Q})$, совпадающем с радикалом формы Q. Таким образом, $\operatorname{Im}\varphi$ содержится в радикале формы Q и, значит, изоморфны невырожденные части $\mathbf{Z}_m$-формы $(H_{k+1}(\tilde{X}; \mathbf{Q}), Q, T_*)$ и ее сужение на любое T_*-инвариантное прямое дополнение подпространства $\operatorname{Im}\varphi$.

Покажем, что $\mathscr{E}$ — прямое дополнение подпространства $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Ker}\chi$. Для этого достаточно доказать, что классы $\chi e_{i,j}$ с $i=1, \ldots, g$ и $j=0, \ldots$ $\ldots, m-2$ образуют базис пространства $\operatorname{Im}\chi = \operatorname{Ker}\psi$.

Пусть R' — трубчатая окрестность подмногообразия A в W, и пусть F_i — пересечение $C_i \cap \partial R'$, ориентированное как край многообразия $C_i \setminus \operatorname{Int} R'$. Положим $F_{i,j} = P_m^{-1}(F_i) \cap U_j$. Ясно, что $F_{i,j+1} \cup (-F_{i,j})$ реализует класс $\chi e_{i,j}$. С другой стороны, $F_{i,j}$ реализует образ класса d_i при композиции естественного изоморфизма $H_k(N; \mathbf{Q}) \to H_k(N_j; \mathbf{Q})$ и гомоморфизма включения $H_k(N_j; \mathbf{Q}) \to H_k(\tilde{W}; \mathbf{Q})$. Естественные деформационные ретракции $W \to \{0\} \times N$ и $U \to \{0\} \times M$ индуцируют деформационные ретракции $\tilde{W} \to \tilde{N}$ и $\tilde{U} \to \tilde{M}$. Поэтому в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} H_k(\widetilde{N}; \mathbf{Q}) & \to & H_k(\widetilde{M}; \mathbf{Q}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_k(\widetilde{W}; \mathbf{Q}) & \xrightarrow{\omega_*} & H_k(\widetilde{U}; \mathbf{Q}) \end{array},$$

образованной гомоморфизмами включения, вертикальные стрелки—изоморфизмы. Таким образом, реализуемые подмногообразиями $F_{i,j}$ классы $d_{i,j} \in H_k(\tilde{W}; \mathbf{Q})$ образуют базис пространства $\operatorname{Ker}\omega_*$. Так как композиция включения $N_j \to \tilde{V}$ и деформационной ретракции $\tilde{V} \to \tilde{A}$ есть диффеоморфизм и N_j — деформационный ретракт пространства W_j, то гомоморфизм включения $(\nu_* | H_k(W_j; \mathbf{Q}) | : H_k(W_j; \mathbf{Q}) \to H_k(\tilde{V}; \mathbf{Q})$ является изоморфизмом. Кроме того, ясно, что $\nu_* d_{i,j_1} = \nu_* d_{i,j_2}$ для любых i, j_1, j_2. Следовательно, классы $\chi e_{i,j} = d_{i,j+1} - d_{i,j}$ образуют базис пространства

$$\operatorname{Ker}\nu_* \cap \operatorname{Ker}\omega_* = \operatorname{Ker}\psi.$$

5.5. Доказательство леммы. 2. Как было показано в предыдущем пункте, классы $\chi e_{i,j}$ образуют базис пространства $\operatorname{Im}\chi$. Из этого следует, что классы $e_{i,j}$ линейно независимы. Кроме того,

$$T_*^j e_{i,0} = \begin{cases} e_{i,j}, & \text{если } j \leqslant m-2, \\ -\sum_{l=0}^{m-2} e_{i,l}, & \text{если } j = m-1. \end{cases}$$

Поэтому для доказательства леммы 2 достаточно доказать, что

$$Q(e_{i_1,j_1}\otimes e_{i_2,j_2})=\begin{cases}0, & \text{если } |j_1-j_2|>1,\\ -\theta(d_{i_1}\otimes d_{i_2}), & \text{если } j_1=j_2+1,\\ -\varepsilon\theta(d_{i_2}\otimes d_{i_1}), & \text{если } j_2=j_1+1,\\ \theta(d_{i_1}\otimes d_{i_2})+\varepsilon\theta(d_{i_2}\otimes d_{i_1}), & \text{если } j_1=j_2.\end{cases}$$

Построим сначала гладкие многообразия, реализующие $e_{i,j}$. Пусть β — множество единичных направленных внутрь $\left[\frac{1}{2}, 1\right]\times M$ векторов нормального расслоения подмногообразия $A\cap\left\{\frac{1}{2}\right\}\times M$ в X, и пусть γ — единичное касательное к $\left\{\frac{1}{2}\right\}\times M$ и нормальное к A векторное поле на $A\cap\left\{\frac{1}{2}\right\}\times M$, определяемое ориентациями многообразий A и M. Обозначим через β_i прообраз многообразия ∂C_i при естественной проекции $\beta\to A\cap\left\{\frac{1}{2}\right\}\times M$. Продолжим поля $\gamma\cap\beta_1, \dots, \gamma\cap\beta_g$ до нормальных полей $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ на $C_1, \dots, C_g$, следя при этом за тем, чтобы множества $\gamma_1\cup\beta_1, \dots, \gamma_g\cup\beta_g$ были гладкими подмногообразиями касательного пучка τX и чтобы подмногообразия $\gamma_1, \dots, \gamma_g$ были трансверсальны друг другу и нулевому сечению.

В силу компактности $\bigcup_{i=1}^{g} C_i$, длины векторов из $\bigcup_{i=1}^{g}\gamma_i$ не превосходят некоторого числа r. Пусть $\rho>0$ — такое вещественное число, что у подмногообразий $C_1, \dots, C_g, A\cap\left\{\frac{1}{2}\right\}\times M$ многообразия X существуют геодезические трубчатые окрестности радиуса ρ. Обозначим для $i=1, \dots, g$ и $t\in[-1, 1]$ через C_i^t образ подмногообразия $t\gamma_i$ касательного пучка τX при отображении $x\to\exp\frac{\rho}{r}x$, и для $i=1, \dots, g, t\in(0, 1]$ обозначим через D_i^t образ подмногообразия $t\beta_i$ при том же отображении. Множества C_i^t и D_i^t являются гладкими подмногообразиями многообразия X. Ориентируем C_i^t так, чтобы естественный диффеоморфизм $C_i^t\to C_i$ имел степень $+1$, если $t\geqslant 0$, и степень -1 в противном случае.

Положим $C_{i,j}^t=P_m^{-1}(C_i^t)\cap U_j$; обозначим через $D_{i,j}^t$ компоненту многообразия $P_m^{-1}(D_i^t)$, пересекающуюся с $C_{i,j}^t$, и положим для $t>0$

$$E_{i,j}^t=C_{i,j+1}^t\cup D_{i,j}^t\cup C_{i,j}^{-t}.$$

Ориентируем $E_{i,j}^t$ в соответствии с ориентацией многообразия $C_{i,j+1}^t$. Очевидно, подмногообразие $E_{i,j}^t$ pl-изотопно подмногообразию с углами $C_{i,j}$. Таким образом, подмногообразие $E_{i,j}^t$ реализует класс $e_{i,j}$.

Займемся теперь подсчетом $Q(e_{i_1,j_1}\otimes e_{i_2,j_2})$. Для этого найдем индексы пересечения $E_{i_1,j_1}^{\frac{1}{2}}\cdot E_{i_2,j_2}^{1}$. Очевидно

$$D^{\frac{1}{2}}_{i_1,j_1} \cap D^{1}_{i_2,j_2} \subset P_m^{-1}(D^{\frac{1}{2}}_{i_1} \cap D^{1}_{i_2}) \subset P_m^{-1}\left(\exp\left(\frac{\rho}{2r}\beta \cap \frac{\rho}{r}\beta\right)\right) = \varnothing.$$

Следовательно,

$$E^{\frac{1}{2}}_{i_1,j_1} \cdot E^{1}_{i_2,j_2} = (C^{\frac{1}{2}}_{i_1,j_1+1} \cup C^{-\frac{1}{2}}_{i_1,j_1}) \cdot (C^{1}_{i_2,j_2+1} \cup C^{-1}_{i_2,j_2}).$$

Кроме того, $C^{t}_{i,j} \subset U_j$. Поэтому если $|j_1 - j_2| > 1$, то

$$E^{\frac{1}{2}}_{i_1,j_1} \cdot E^{1}_{i_2,j_2} = 0.$$

Далее, если $t_1, t_2 \in [-1, 1]$ и $t_1 \neq t_2$, то индекс пересечения $C^{t_1}_{i_1,j} \cdot C^{t_2}_{i_2,j} = C^{t_1}_{i_1} \cdot C^{t_2}_{i_2}$ равен коэффициенту зацепления подмногообразий $\partial C^{t_1}_{i_1}, \partial C^{t_2}_{i_2}$ в $\left\{\frac{1}{2}\right\} \times M$. Этот коэффициент зацепления мы будем обозначать через $\mathcal{L}(\partial C^{t_1}_{i_1}, \partial C^{t_2}_{i_2})$.

Пусть теперь $j_1 = j_2 = j$. Имеем:

$$E^{\frac{1}{2}}_{i_1,j_1} \cdot E^{1}_{i_2,j_2} = C^{\frac{1}{2}}_{i_1} \cdot C^{1}_{i_2} + C^{-\frac{1}{2}}_{i_1} \cdot C^{-1}_{i_2} = \mathcal{L}(\partial C^{\frac{1}{2}}_{i_1}, \partial C^{1}_{i_2}) + \mathcal{L}(\partial C^{-\frac{1}{2}}_{i_1}, \partial C^{-1}_{i_2}).$$

Очевидные изотопии переводят $\partial C_i^{\frac{1}{2}} \cup \partial C^{1}_{i_2}$ в $\partial C_{i_1} \cup \partial C^{\frac{1}{2}}_{i_2}$ и $\partial C^{-\frac{1}{2}}_{i_1} \cup \partial C^{-1}_{i_2}$ в $(-\partial C^{\frac{1}{2}}_{i_1}) \cup (-\partial C_{i_2})$. Таким образом,

$$E^{\frac{1}{2}}_{i_1,j} \cdot E^{1}_{i_2,j} = \mathcal{L}(\partial C_{i_1}, \partial C^{\frac{1}{2}}_{i_2}) + \mathcal{L}(-\partial C^{\frac{1}{2}}_{i_1}, -\partial C_{i_2}) = \mathcal{L}(\partial C_{i_1}, \partial C^{\frac{1}{2}}_{i_2}) +$$
$$+ (-1)^{k+1}\mathcal{L}(\partial C_{i_2}, \partial C^{\frac{1}{2}}_{i_1}).$$

Но, по определению спаривания Зайферта,

$$\mathcal{L}(\partial C_{i_1}, \partial C^{\frac{1}{2}}_{i_2}) = \theta(d_{i_1} \otimes d_{i_2})$$

и

$$\mathcal{L}(\partial C_{i_2}, \partial C^{\frac{1}{2}}_{i_1}) = \theta(d_{i_2} \otimes d_{i_1});$$

значит, если $j_1 = j_2$, то

$$E^{\frac{1}{2}}_{i_1,j_1} \cdot E^{1}_{i_2,j_2} = \theta(d_{i_1} \otimes d_{i_2}) + (-1)^{k+1}\theta(d_{i_2} \otimes d_{i_1}).$$

Аналогичные рассуждения показывают, что если $j_1 = j_2 + 1$, то

$$E^{\frac{1}{2}}_{i_1,j_1} \cdot E^{1}_{i_2,j_2} = -\theta(d_{i_1} \otimes d_{i_2}),$$

и если $j_2 = j_1 + 1$, то

$$E^{\frac{1}{2}}_{i_1, j_1} \cdot E^{1}_{i_2, j_2} = (-1)^k \theta (d_{i_2} \otimes d_{i_1}).$$

Поступило
24.X.1972

Литература

[1] Атья М. Ф. и Зингер И. М., Индекс эллиптических операторов. III, Успехи матем. наук, 24, вып. 1 (1969), 127—182.

[2] Коннер П. и Флойд Э., Гладкие периодические отображения, М., «Мир», 1969.

[3] Рохлин В. А., Двумерные подмногообразия четырехмерных многообразий, Функц. анализ, 5, вып. 1 (1971), 48—60.

[4] Jones B. W., The arithmetic theory of quadratic forms, Carus mathematical monographs, New York, 1950.

[5] Levine J., Knot cobordism groups in codimension two, Comment. math. helv., 44 (1969), 229—244.

[6] Levine J., Invariants of knot cobordism, Inventiones math., 8 : 2 (1969), 98—110.

[7] Milnor J., On isometries of inner product spaces, Inventiones Math., 8 : 2 (1969), 83—97.

[8] Murasugi K., On a certain numerical invariant of link types, Trans. Amer. Math. Soc., 117 (1965), 387—422.

[9] Tristram A. G., Some cobordism invariants for links, Proc. Cambridge Phil. Soc., 66 (1969), 251—264.

[10] Trotter H. F., Homology of group systems with applications to knot theory, Ann. Math., 76 (1962), 464—498.