

ДВУЛИСТНЫЕ РАЗВЕТВЛЕННЫЕ НАКРЫТИЯ ТРЕХМЕРНОЙ СФЕРЫ

Настоящая работа посвящена проблеме представимости трехмерного многообразия в виде двулистного разветвленного накрывающего сферы S^3 .

§ I. Введение.

I.1. Трехмерные многообразия и двулистные разветвленные накрытия сферы. Хорошо известно, что всякую ориентируемую замкнутую связную поверхность можно представить в виде двулистного разветвленного накрывающего сферы S^2 , причем накрытие единственно с точностью до изоморфизма.

Такое положение привело к попыткам получить аналогичные результаты для трехмерных многообразий. Александер [I] показал, что всякое ориентируемое замкнутое трехмерное многообразие можно представить в виде разветвленного накрывающего сферы S^3 . Однако, в отличие от двумерного случая, не всякое ориентируемое замкнутое связное трехмерное многообразие может быть **д в у л и с т н ы м** разветвленным накрывающим сферы S^3 (см. Фокс [4], Монтесинос [II] и Добавление к настоящей статье), а с другой стороны, существуют негомеоморфные зацепления с гомеоморфными двулистными разветвленными накрывающими (см. [I6]). Тем не менее, представляется весьма вероятным, что двулистные разветвленные накрытия трехмерной сферы могут сыграть важную роль в решении некоторых задач классификации трехмерных многообразий.

Как известно, для всякого зацепления (S^3, L) существует единственное с точностью до изоморфизма двулистное разветвленное накрытие сферы S^3 с ветвлением над L . Естественно, свойства накрывающего тесно связаны со свойствами зацепления (S^3, L) . Поэтому, представление трехмерного многообразия в виде **д в у л и с т н о г о** разветвленного накрывающего сферы позволяет сравнительно легко получить разнообразную информацию об этом многообразии. Вот несколько путей использования ^{*)} двулистного разветвленного накрытия $p: N \rightarrow S^3$ с ветвлением над подмногообразием L для получения информации об N .

*) Двулистные разветвленные накрытия трехмерной сферы использовались главным образом при изучении зацеплений — см., например, [I2], [3], [I4] и др. Однако, поскольку рассматривается проблема представимости трехмерных многообразий в виде двулистных разветвленных накрывающих сферы, здесь перечисляются приложения к теории трехмерных многообразий.

1. Гомологические группы многообразия N и коэффициенты зацепления

$$\text{Tor } H_1(N) \otimes \text{Tor } H_1(N) \longrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

легко вычисляются по квадратичной форме любой поверхности Зайферта зацепления (S^3, L) ; см., например [3]. Некоторые гомологические инварианты многообразия N вычисляются по (S^3, L) совсем просто: например, размерность пространства $H_1(N; \mathbb{Z}_2)$ на единицу меньше числа компонент подмногообразия L .

2. Если (S^3, L) — узел, т.е. если L связно, или, что то же, $H_1(N; \mathbb{Z}_2) = 0$, то $N \setminus$ точка можно вложить в \mathbb{R}^4 ; см. Зиман [19] (в действительности, Зиман [19] доказал большее: если многообразие M является конечнолистным циклическим разветвленным накрывающим какого-либо узла (S^3, L) , то $M \setminus$ точка можно вложить в \mathbb{R}^4).

3. Как будет показано в п.2.1, из результатов Вальдхаузена [18] следует, что N гомеоморфно S^3 тогда и только тогда, когда (S^3, L) — тривиальный узел. Поскольку существует алгоритм, устанавливающий, тривиален ли узел (см. Хакен [6] или Шуберт [13]), это свойство двулистных разветвленных накрытий дает алгоритм, устанавливающий гомеоморфно ли N сфере S^3 . Последний может быть полезен при рассмотрении кандидатов в контрпримеры к гипотезе Пуанкаре; ср. Бирман и Хилден [2].

4. Если $H_1(N; \mathbb{Z}_2) = 0$, то сигнатура $\sigma(X)$ ориентированного компактного четырехмерного многообразия X с $w_2(X) = 0$ и $\partial X = N$, приведенная по модулю 16, является топологическим инвариантом многообразия N . Если же N — гомологическая сфера, то $\sigma(X) \equiv 0$ или $8 \pmod{16}$ (и в этом случае вычет $\frac{\sigma(X)}{8} \pmod{2}$ называется инвариантом Кервера — Милнора многообразия N). Вычисление этого инварианта в общем случае (т.е. когда многообразие не представлено в виде двулистного разветвленного накрывающего сферу), по-видимому, не просто. В рассматриваемой же ситуации $\sigma(X) \equiv \sigma(S^3, L) \pmod{16}$, где $\sigma(S^3, L)$ — сигнатура зацепления (S^3, L) ; см. [17].

1.2. Результаты, имеющиеся в литературе. Автору известны семь статей, содержащих результаты о представимости трехмерного многообразия в виде двулистного разветвленного накрывающего сферу.

В работе Шуберта [14] доказано, что всякое ориентируемое замкнутое связное трехмерное многообразие рода g гомеоморфно двулистному разветвленному накрывающему некоторого зацепления с двумя мостами и что зацепления с двумя мостами гомеоморфны тог-

*) Определения зацеплений с n мостами и рода трехмерного многообразия см. ниже, в § 3.

да и только тогда, когда гомеоморфны их двулистные разветвленные покрывающие.

В [16] доказано, что всякое ориентируемое замкнутое связное трехмерное многообразие рода 2 гомеоморфно двулистному разветвленному покрывающему некоторого зацепления с тремя мостами ^{ж)} и указано достаточное условие представимости многообразия большего рода в виде двулистного разветвленного покрывающего сферы. Кроме того, в [16] построен пример негомеоморфных зацеплений (с четырьмя мостами), имеющих гомеоморфные двулистные разветвленные покрывающие. С другой стороны, как будет показано в п.2.1, из результатов Вальдхаузена [18] следует единственность представления сферы в виде двулистного разветвленного покрывающего сферы.

В работе Бирман и Хилдена [2] построен алгоритм, устанавливающий, гомеоморфно ли сфере ориентируемое замкнутое связное трехмерное многообразие, заданное разложением Хегора рода ≤ 2 . Существенной частью этого алгоритма является алгоритм, представляющий такие многообразия в виде двулистных разветвленных покрывающих сферы.

В работе Монтесиноса [10] указан способ, позволяющий в некоторых случаях представлять ориентируемое замкнутое связное трехмерное многообразие в виде двулистного разветвленного покрывающего сферы. Фокс [4] доказал, что этот способ не всегда приводит к построению двулистного разветвленного покрытия и что при $n \geq 3$ топос $S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$ размерности n не может быть двулистным разветвленным покрывающим сферу. Монтесинос [11] обобщил этот результат Фокса, доказав, что произведение окружности S^1 на ориентируемую замкнутую связную поверхность F_g рода $g \geq 1$ не может быть двулистным разветвленным покрывающим сферу.

1.3. Характер результатов работы. Из перечисленных в п.1.1 способов получения информации о многообразии N , двулистно разветвленно покрывающем сферу S^3 , в способах 1, 3 и 4 основную роль играет не представимость, а само представление многообразия N в виде двулистного разветвленного покрывающего сферы ^{жж)}, точнее, важны некоторые свойства зацепления (S^3, L) , двулистным разветвленным покрывающим которого является N . В связи с этим представляются полезными алгоритмы, которые по многообразию N , заданному тем или иным стандартным способом, строят такое зацепление (S^3, L) , что N гомеоморфно двулистному разветвленному на-

^{ж)} Позднее эту теорему доказали Бирман и Хилден [2].

^{жж)} На самом деле, и в 2, если интересоваться не только вложением, но и самим вложением.

крывающему зацепления (S^3, L) . Такие алгоритмы и являются основными результатами настоящей работы.

По-видимому, наиболее распространенными и простыми способами задания ориентируемого замкнутого связного трехмерного многообразия являются диаграммы Хегора и представления в виде результата морсовских перестроек сферы S^3 . Алгоритмы настоящей статьи предполагают, что N задано этими или близкими им способами. В частности, имеется алгоритм, в котором N предполагается заданным диаграммой Хегора рода ≤ 2 , а также такой алгоритм, в котором N предполагается представленным в виде результата морсовской перестройки (или даже произвольной переклейки) сферы S^3 вдоль симметрически обратимого ^{*)} зацепления.

То, что многообразия, к которым применимы эти алгоритмы, являются двулиственными разветвленными накрывающими сферы, легко доказать методами работы автора [16] (а для многообразий рода 2 было доказано в [16]). Однако, алгоритмы, которые можно было бы извлечь непосредственно из этих доказательств, либо предполагают довольно экзотические задания многообразия, содержащие много лишней информации, либо являются очень громоздкими из-за того, что содержат перевод более простых способов задания в эти сложные. (Таким сложным заданием является, например, представление склеивающего гомеоморфизма разложения Хегора в виде композиции сручиваний Ликориша [7]. Это задание предполагается алгоритмом, содержащимся в работе Бирман и Хилдена [2]).

В настоящей работе принят другой подход, заимствованный у Шуберта [14]. Этот подход позволяет построить сравнительно простые и удобные алгоритмы, и, кроме того, делает доказательства совершенно элементарными. Алгоритмы настоящей статьи оперируют с диаграммами, которые напоминают диаграммы Хегора и диаграммы зацеплений и содержат в некотором смысле столько же информации, сколько и исходные данные.

Автор старался описывать эти алгоритмы по возможности не формально, полагая, что большая формализация сделала бы их менее удобными для восприятия. Не подлежит сомнению, что специалист легко построит по этим описаниям алгоритмы, пригодные для реализации в виде программ для ЭВМ.

Все изложенное в статье верно как в кусочно-линейной, так и в дифференциальной категории. В тексте используются нейтральные термины, которые следует понимать в смысле любой из этих категорий.

1.4. Расположение материала. Работа содержит кроме настоящего введения еще пять параграфов, причем основные результаты сфор-

^{*)}Определение симметрически обратимых зацеплений см. в п.4.2.

мулированы в § 5.

В § 2 описываются некоторые стандартные двулистные разветвленные накрытия, нужные для последующих параграфов.

В § 3 определяются различные типы диаграмм, описываются их простейшие свойства и демонстрируется связь диаграмм, задающих двулистные разветвленные накрывающие, с диаграммами, задающими соответствующие подмногообразия ветвления.

В § 4 изучается свойство симметрической обратимости, очень важное в рассматриваемом круге вопросов; определяются симметрически обратимые зацепления и доказывается, что всякое двулистное разветвленное накрывающее сферы можно представить как результат морсовской перестройки сферы вдоль симметрически обратимого зацепления (это также сопровождается соответствующим алгоритмом). Кроме того, в § 4 устанавливаются различные достаточные условия существования и продолжимости двулистных разветвленных накрытий, формулирующиеся в терминах диаграмм.

В § 5, как уже было сказано, сформулированы основные результаты статьи. Основу их составляет теорема 5.2; остальные очевидным образом вытекают из этой теоремы и теорем параграфа 4. Параграф 6 содержит доказательство теоремы 5.2.

1.5. Автор благодарит своего руководителя профессора В.А.Рохлина за внимание и помощь.

§ 2. Стандартные накрытия

2.1. Накрытия сферы сферой. Определим для $n=2, 3, \dots$ отображение $P_{R^n}: R^n \rightarrow R^n$ формулой $P_{R^n}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-2}, x_{n-1}^2 - x_n^2, 2x_{n-1}x_n)$. Это — двулистное разветвленное накрытие с ветвлением над R^{n-2} .

Пусть $ster: S^n \setminus \{(1, 0, \dots, 0)\} \rightarrow R^n$ — стереографическая проекция, определяемая формулой

$$ster(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1-x_1} (x_2, \dots, x_{n+1}).$$

Определим отображение $P_{S^n}: S^n \rightarrow S^n$ формулой

$$P_{S^n}(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x = (1, 0, 0, \dots, 0) \\ ster^{-1} \circ P_{R^n} \circ ster(x), & \text{если } x \neq (1, 0, 0, \dots, 0). \end{cases}$$

Это — двулистное разветвленное накрытие с ветвлением над S^{n-2} . Единственным нетривиальным автоморфизмом этого накрытия является сужение $sm: S^n \rightarrow S^n$ симметрии пространства R^{n+1} относительно R^{n-1} .

Вальдхаузен [18] доказал, что всякая pl — инволюция $S^3 \rightarrow S^3$ с одномерным множеством неподвижных точек сопряжена в группе pl — гомеоморфизмов с инволюцией $sm: S^3 \rightarrow S^3$. Из этого в частности следует, что всякое двулистное разветвленное на-

крытие $S^3 \rightarrow S^3$ изоморфно $P_{2k}: S^3 \rightarrow S^3$ (ср. Бирман и Хилден [2]). Для сфер больших размерностей аналогичное утверждение не верно, см. Диффен [5], Виноградов и Кушельман [15].

2.2. Накрытия шара и сферы. Обозначим через P_k прообраз точки $(k, 0)$ при стереографической проекции $ster: S^2 \setminus \{(1, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, через m_k — прообраз отрезка $[(2k-1, 0), (2k, 0)]$ при той же проекции, и через I_k — прямолинейный отрезок в \mathbb{D}^3 с $\partial I_k = \{p_{2k-1}, p_{2k}\}$. Пусть m'_k — сегмент большого круга, заключенный между I_k и m_k .

Обозначим через \mathcal{D}_g трехмерное тело с g ручками, а через \mathcal{F}_g — его край, ориентируемую замкнутую связную поверхность рода g .

Расположим тело \mathcal{D}_g в \mathbb{R}^3 так — см. рис. I — чтобы прямая \mathbb{R}^1 была осью симметрии тела \mathcal{D}_g и пересекалась с ним по $(g+1)$ отрезкам $\tilde{I}_1, \dots, \tilde{I}_{g+1}$, а плоскость \mathbb{R}^2 пересекалась с ним по $(g+1)$ дискам $\tilde{m}'_1, \dots, \tilde{m}'_{g+1}$. Очевидно, пары $(p_{R^3}(\mathcal{D}_g), \bigcup_{i=1}^{g+1} p_{R^3}(\tilde{m}'_i))$ и $(\mathbb{D}^3, \bigcup_{i=1}^{g+1} m'_i)$ гомеоморфны. Фиксируем гомеоморфизм

$$(p_{R^3}(\mathcal{D}_g), \bigcup_{i=1}^{g+1} p_{R^3}(\tilde{m}'_i)) \rightarrow (\mathbb{D}^3, \bigcup_{i=1}^{g+1} m'_i)$$

и определим отображение $\varphi_g: \mathcal{D}_g \rightarrow \mathbb{D}^3$ как композицию сужения накрытия $p_{R^3}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ с этим гомеоморфизмом. Отображение $\varphi_g: \mathcal{D}_g \rightarrow \mathbb{D}^3$ — двулистное разветвленное накрытие с ветвлением над $\bigcup_{i=1}^{g+1} I_i$. Пусть

$\tau_g: \mathcal{F}_g \rightarrow S^2$ — сужение этого накрытия. Это — двулистное разветвленное накрытие с ветвлением над $\{p_1, \dots, p_{2g+2}\}$.

Всякое двулистное разветвленное накрытие $\mathcal{F}_g \rightarrow S^2$ изоморфно τ_g . Автору не известно, но представляется весьма вероятным, что всякое двулистное разветвленное накрытие $\mathcal{D}_g \rightarrow \mathbb{D}^3$ изоморфно φ_g .

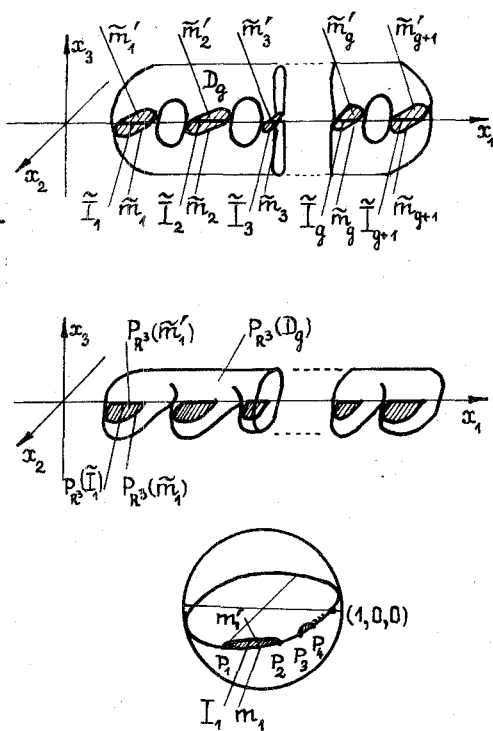


Рис. I.

§ 3. Диаграммы и двулистные разветвленные накрытия

3.1. M-диаграммы. Пару (Φ, Γ) , состоящую из ориентируемого замкнутого двумерного многообразия Φ и его замкнутого двумерного подмногообразия Γ , назовем M-диаграммой, ес-

ли в результате разрезания многообразия Φ вдоль Γ получается многообразие, каждая компонента которого гомеоморфна сфере с дырами и число компонент равно числу компонент многообразия Φ .

М е р и д и а н а м и компактного трехмерного многообразия Δ будем называть простые замкнутые кривые на $\partial\Delta$, которые ограничивают диски в Δ , но не гомотопны нулю в $\partial\Delta$. Пару $(\partial\Delta, \Gamma)$, состоящую из края $\partial\Delta$ ориентируемого компактного трехмерного многообразия Δ и объединения $\Gamma = \bigcup_{i=1}^n \gamma_i$ непересекающихся меридианов $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ многообразия Δ , будем называть M -д и а - г р а м м о й многообразия Δ , если в Δ существуют такие непересекающиеся диски $\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_n$ с $\partial\hat{\gamma}_i = \gamma_i$, что в результате разрезания многообразия Δ вдоль $\bigcup_{i=1}^n \hat{\gamma}_i$ получается многообразие, каждая компонента которого гомеоморфна D^3 и число компонент равно числу компонент многообразия Δ . (Ясно, что всякая M -диаграмма многообразия Δ является M -диаграммой в смысле предыдущего определения).

П р и м е р. Изображенная на рис. I пара $(\mathcal{F}_g, \bigcup_{i=1}^g \tilde{m}_i)$ является M -диаграммой тела \mathcal{D}_g .

Будем говорить, что M -диаграммы (Φ, Γ) , (Φ, Γ') и з о - т о п н ы, если существует такой изотопный тождественному гомеоморфизм $h: \Phi \rightarrow \Phi$, что $h(\Gamma) = \Gamma'$.

В основе применений M -диаграмм лежат следующие хорошо известные очевидные леммы.

1. Ориентируемое компактное трехмерное многообразие обладает M -диаграммой тогда и только тогда, когда каждая его компонента гомеоморфна одному из \mathcal{D}_q с $q=0, 1, 2, \dots$
2. Всякая M -диаграмма (Φ, Γ) является M -диаграммой некоторого ориентируемого компактного трехмерного многообразия Δ с $\partial\Delta = \Phi$, единственного с точностью до тождественного на Φ гомеоморфизма.
3. Если $(\partial\Delta, \Gamma)$ - некоторая M -диаграмма многообразия Δ , то всякая M -диаграмма $(\partial\Delta, \Gamma)$, изотопная $(\partial\Delta, \Gamma)$, также является M -диаграммой многообразия Δ .
4. Для любых двух M -диаграмм (Φ, Γ) , (Φ, Γ') существует гомеоморфизм $(\Phi, \Gamma) \rightarrow (\Phi, \Gamma')$.
5. Пусть Δ, Δ' - ориентируемые компактные трехмерные многообразия, и пусть $(\partial\Delta, \Gamma)$ - какая-нибудь M -диа-

грамма многообразия Δ . Гомеоморфизм $h: \partial\Delta \rightarrow \partial\Delta'$ продолжается до гомеоморфизма $\Delta \rightarrow \Delta'$ тогда и только тогда, когда $(\partial\Delta', h(\Gamma))$ является M -диаграммой многообразия Δ' .

3.2. Диаграммы S -пар. Тройку (\mathcal{F}, C, Q) , состоящую из замкнутого многообразия \mathcal{F} , его компактного подмногообразия C и конечного подмножества Q , будем называть S -диаграммой, если каждая компонента многообразия \mathcal{F} гомеоморфна S^2 , каждая компонента подмногообразия C гомеоморфна I и если $\partial C = Q \cap C$ и в каждой компоненте многообразия \mathcal{F} содержатся ровно две точки множества $Q \setminus \partial C$. Пару (\mathcal{F}, C) , состоящую из замкнутого многообразия \mathcal{F} и его компактного подмногообразия C , будем называть ES -диаграммой, если каждая компонента многообразия \mathcal{F} гомеоморфна S^2 и пересекается с C и каждая компонента подмногообразия C гомеоморфна I . Будем говорить, что ES -диаграмма (\mathcal{F}, C') является расширением S -диаграммы (\mathcal{F}, C, Q) , если $C' \supset C$ и $\partial C' = Q$.

Пару многообразий $(\mathcal{D}, \mathcal{U})$ будем называть S -парой, если для любой компоненты \mathcal{D}' многообразия \mathcal{D} пара $(\mathcal{D}', \mathcal{U} \cap \mathcal{D}')$ гомеоморфна одной из пар $(\mathcal{D}^3, \bigcup_{i=1}^n I_i)$ с $n = 1, 2, \dots$.

Пусть $(\mathcal{D}, \mathcal{U})$ - некоторая S -пара. Назовем ES -диаграмму $(\partial\mathcal{D}, C) ES$ -диаграммой пары $(\mathcal{D}, \mathcal{U})$, если $\partial\mathcal{U} = \partial C$ и существует такое подмногообразие \hat{C} многообразия \mathcal{D} , что $\partial\hat{C} = \mathcal{U} \cup C$ и каждая компонента подмногообразия \hat{C} гомеоморфна \mathcal{D}^2 (эти условия означают, что подмногообразия C, \mathcal{U} изотопны в \mathcal{D} относительно $\partial C = \partial\mathcal{U}$). Будем называть S -диаграмму $(\partial\mathcal{D}, C', Q) S$ -диаграммой пары $(\mathcal{D}, \mathcal{U})$, если существует расширение $(\partial\mathcal{D}, C)$ S -диаграммы $(\partial\mathcal{D}, C', Q)$ являющееся ES -диаграммой пары $(\mathcal{D}, \mathcal{U})$.

Пример. Построенная в п.2.2 s -пара $(\mathcal{D}^3, \bigcup_{i=1}^{g+1} I_i)$ имеет ES -диаграмму $(s^2, \bigcup_{i=1}^{g+1} m_i)$ и S -диаграмму $(s^2, \bigcup_{i=1}^g m_i,$

$\{p_1, \dots, p_{2g+2}\})$; см. рис. I.

Будем говорить, что S -диаграммы $(\mathcal{F}, C, Q), (\mathcal{F}, C', Q)$ изотопны, если существует такой гомеоморфизм $h: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, изотопный тождественному относительно Q ; что $h(C) = C'$.

В основе применений S - и ES -диаграмм лежат следующие очевидные леммы.

1. Всякая S -пара $(\mathcal{D}, \mathcal{U})$ обладает ES -диаграммой, а, значит, и S -диаграммой.

2. Всякая S -диаграмма обладает расширением. Для всякого расширения (\mathcal{F}, C') S -диаграммы (\mathcal{F}, C, Q) существует

вует такая S -пара (D, Y) с $\partial D = F$, что (F, C') является ES -диаграммой пары (D, Y) , и, значит, (F, C, Q) является S -диаграммой пары (D, Y) ; пара (D, Y) определяется S -диаграммой (F, C, Q) с точностью до гомеоморфизма, тождественного на F .

3. Если $(\partial D, C, Q)$ - некоторая S -диаграмма S -пары (D, Y) , то всякая S -диаграмма $(\partial D, C', Q)$ изотопная $(\partial D, C, Q)$ также является S -диаграммой S -пары (D, Y) .

4. Если $(F, C, Q), (F, C', Q')$ - такие S -диаграммы, что каждая компонента многообразия F содержит одинаковое число компонент подмногообразий C и C' , то существует гомеоморфизм $(F, C, Q) \rightarrow (F, C', Q')$.

5. Пусть $(D, Y), (D', Y')$ - некоторые S -пары и пусть $(\partial D, C, Q)$ - какая-нибудь S -диаграмма пары (D, Y) . Гомеоморфизм $h: \partial D \rightarrow \partial D'$ продолжается до гомеоморфизма $(D, Y) \rightarrow (D', Y')$ тогда и только тогда, когда $(\partial D', h(C), h(Q))$ является S -диаграммой пары (D', Y') .

3.3. M -диаграмма двулистного разветвленного накрывающего S -пары. Пусть (D, Y) - некоторая S -пара и пусть $p: \Delta \rightarrow D$ - двулистное разветвленное накрытие с ветвлением над Y (такое накрытие существует и единственно с точностью до изоморфизма, см., например, [19, § I]). Если $(\partial D, C, Q)$ - какая-нибудь S -диаграмма пары (D, Y) , то $(\partial \Delta, p^{-1}(C))$ есть

M -диаграмма многообразия Δ .

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай связного D . Тогда, в силу леммы предыдущего пункта, существует гомеоморфизм $h: D \rightarrow D^3$ с $h(C) = \bigcup_{i=1}^2 m_i$ и $h(Y) = \bigcup_{i=1}^2 I_i$.

В силу единственности двулистного разветвленного накрытия S -пары, h индуцирует гомеоморфизм $\tilde{h}: \Delta \rightarrow D_2$ с $\rho_2 \tilde{h} = h \rho$. Так как

$$p^{-1}(C) = \tilde{h}^{-1} \rho_2^{-1} h(C) = \tilde{h}^{-1} \rho_2^{-1} \left(\bigcup_{i=1}^2 m_i \right) = \tilde{h}^{-1} \left(\bigcup_{i=1}^2 m_i \right)$$

и пара $(\mathcal{F}_q, \bigcup_{i=1}^q \tilde{m}_i)$ является M -диаграммой тела \mathcal{D}_q , то пара $(\partial \Delta, p^{-1}(C)) = (\partial \Delta, \tilde{h}^{-1}(\bigcup_{i=1}^q m_i))$

является M -диаграммой многообразия Δ .

3.4. Диаграммы Хегора. Тройку $(\Phi, \Gamma_+, \Gamma_-)$ назовем диаграммой Хегора, если пары (Φ, Γ_+) , (Φ, Γ_-) являются M -диаграммами и многообразии Φ связно. При этом род многообразия Φ будем называть родом диаграммы Хегора

Пусть $(\Phi, \Gamma_+, \Gamma_-)$ -диаграмма Хегора и Δ_+ , Δ_- - ориентируемые компактные трехмерные многообразия с $\partial \Delta_+ = \partial \Delta_- = \Phi$ и M -диаграммами (Φ, Γ_+) и (Φ, Γ_-) , соответственно. Диаграмму Хегора $(\Phi, \Gamma_+, \Gamma_-)$ будем называть диаграммой Хегора многообразия N , если N гомеоморфно результату склеивания многообразий Δ_+ , Δ_- посредством тождественного гомеоморфизма $\Phi \rightarrow \Phi$.

Хорошо известно, что всякое ориентируемое замкнутое связное трехмерное многообразие обладает диаграммой Хегора и что всякая диаграмма Хегора является диаграммой Хегора некоторого ориентируемого замкнутого связного трехмерного многообразия, единственного с точностью до гомеоморфизма.

Диаграммы Хегора $(\Phi, \Gamma_+, \Gamma_-)$, $(\Phi, \Gamma'_+, \Gamma'_-)$ называются изотопными, если M -диаграммы (Φ, Γ_+) , (Φ, Γ'_+) и (Φ, Γ_-) , (Φ, Γ'_-) изотопны. В силу леммы пункта 3.1, многообразия, имеющие изотопные диаграммы Хегора, гомеоморфны.

Пусть N - ориентируемое замкнутое связное трехмерное многообразие. Родом $q(N)$ многообразия N называется наименьшее из чисел, являющихся родами диаграмм Хегора многообразия N .

3.5. Диаграммы зацеплений. Четверку $(\mathcal{F}, C_+, C_-, Q)$ назовем $\mathcal{D}S$ -диаграммой, если тройки (\mathcal{F}, C_+, Q) , (\mathcal{F}, C_-, Q) являются S -диаграммами и \mathcal{F} связно (и, значит, гомеоморфно S^2). Тройку (\mathcal{F}, C_+, C_-) будем называть $\mathcal{D}ES$ -диаграммой, если $\partial C_+ = \partial C_-$, пары (\mathcal{F}, C_+) , (\mathcal{F}, C_-) являются ES -диаграммами и \mathcal{F} связно. Будем говорить, что $\mathcal{D}ES$ -диаграмма $(\mathcal{F}, C'_+, C'_-)$ является расширением $\mathcal{D}S$ -диаграммы $(\mathcal{F}, C_+, C_-, Q)$, если $C'_+ \supset C_+$, $C'_- \supset C_-$ и $\partial C'_+ = Q$. При этом число компонент подмногообразия C'_+ называется числом мостов $\mathcal{D}ES$ -диаграммы $(\mathcal{F}, C'_+, C'_-)$ или числом мостов $\mathcal{D}S$ -диаграммы $(\mathcal{F}, C_+, C_-, Q)$.

Пусть (\mathcal{F}, C_+, C_-) - некоторая $\mathcal{D}ES$ -диаграмма и $(\mathcal{D}_+, \mathcal{J}_+)$, $(\mathcal{D}_-, \mathcal{J}_-)$ - какие-либо S -пары с $\partial \mathcal{D}_+ = \partial \mathcal{D}_- = \mathcal{F}$ и ES -диаграммами (\mathcal{F}, C_+) и (\mathcal{F}, C_-) , соответственно. Назовем (\mathcal{F}, C_+, C_-) $\mathcal{D}ES$ -диаграммой зацепления (S^2, L) , если пара (S^2, L)

гомеоморфна результату склеивания пар $(\mathcal{D}_+, \mathcal{Y}_+)$, $(\mathcal{D}_-, \mathcal{Y}_-)$ посредством тождественного гомеоморфизма $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$. Будем называть \mathcal{DS} -диаграмму $(\mathcal{F}, C_+, C_-, Q)$ \mathcal{DS} -диаграммой зацепления (S^3, L) , если существует расширение \mathcal{DS} -диаграммы $(\mathcal{F}, C_+, C_-, Q)$, являющееся \mathcal{DES} -диаграммой зацепления (S^3, L) .

Хорошо известно (см., например, [I2]), что всякое зацепление обладает \mathcal{DES} -диаграммой (а, значит, и \mathcal{DS} -диаграммой). Из леммы 2 пункта 3.2 следует, что всякая \mathcal{DS} -диаграмма является \mathcal{DS} -диаграммой некоторого зацепления, единственного с точностью до гомеоморфизма.

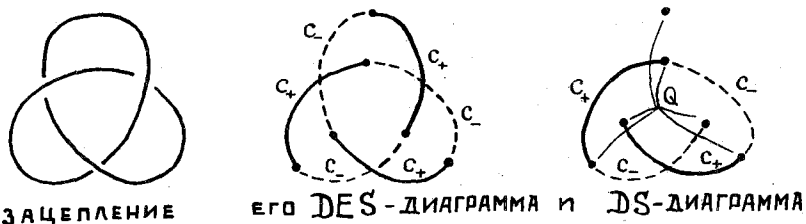


Рис.2.

\mathcal{DES} -диаграмма зацепления по-существу совпадает с тем, что обычно называется диаграммой зацепления; см. рис.2. Грубо говоря, \mathcal{DS} -диаграмма зацепления представляет собой такую часть \mathcal{DES} -диаграммы, что по ней можно определить тип зацепления, хотя, как правило, нельзя однозначно восстановить тип \mathcal{DES} -диаграммы. Иными словами, \mathcal{DS} -диаграмма зацепления содержит всю необходимую информацию и меньше лишнего.

Будем говорить, что \mathcal{DS} -диаграммы $(\mathcal{F}, C_+, C_-, Q)$, $(\mathcal{F}, C'_+, C'_-, Q)$ и зотопны, если изотопны S -диаграммы (\mathcal{F}, C_+, Q) , (\mathcal{F}, C'_+, Q) и (\mathcal{F}, C_-, Q) , (\mathcal{F}, C'_-, Q) . В силу лемм пункта 3.2, зацепления, имеющие изотопные \mathcal{DS} -диаграммы, гомеоморфны.

Зацепление (S^3, L) называется зацеплением с n мостами, или $2n$ -сплетением, если n - наименьшее из чисел, являющихся числами мостов \mathcal{DS} -диаграмм зацепления (S^3, L) .

3.6. Диаграмма Хегора двулистного разветвленного накрывающего сферы. (Ср. Шуберт [I4]). Пусть $p: N \rightarrow S^3$ - двулистное разветвленное накрытие зацепления (S^3, L) . Если $(\mathcal{F}, C_+, C_-, Q)$ - какая-нибудь \mathcal{DS} -диаграмма зацепления (S^3, L) и $p: \Phi \rightarrow \mathcal{F}$ - двулистное разветвленное накрытие с ветвлением над Q , то $(\Phi, p^{-1}(C_+), p^{-1}(C_-))$ - диаграмма Хегора многообразия N .

Действительно, разложение пары (S^3, L) в объединение S -пар

$(\mathcal{D}_+, \mathcal{J}_+)$, $(\mathcal{D}_-, \mathcal{J}_-)$ с $\partial\mathcal{D}_+ = \partial\mathcal{D}_- = \mathcal{F}$ и S -диаграммами $(\mathcal{F}, \mathcal{C}_+, \mathcal{Q})$, $(\mathcal{F}, \mathcal{C}_-, \mathcal{Q})$ индуцирует разложение покрывающего N в объединение многообразий $P^{-1}(\mathcal{D}_+)$, $P^{-1}(\mathcal{D}_-)$, которые (в силу теоремы 3.3) имеют M -диаграммы $(P^{-1}(\mathcal{F}), P^{-1}(\mathcal{C}_+))$, $(P^{-1}(\mathcal{F}), P^{-1}(\mathcal{C}_-))$. Таким образом, $(P^{-1}(\mathcal{F}), P^{-1}(\mathcal{C}_+), P^{-1}(\mathcal{C}_-))$ - диаграмма Хегора многообразия N . Из единственности двулистного разветвленного накрытия пары $(\mathcal{F}, \mathcal{Q})$ следует, что диаграмма Хегора $(P^{-1}(\mathcal{F}), P^{-1}(\mathcal{C}_+), P^{-1}(\mathcal{C}_-))$ гомеоморфна $(\Phi, p^{-1}(\mathcal{C}_+), p^{-1}(\mathcal{C}_-))$, и, значит, $(\Phi, p^{-1}(\mathcal{C}_+), p^{-1}(\mathcal{C}_-))$ - диаграмма Хегора многообразия N .

3.7. Переклейки многообразий. Пусть N - трехмерное многообразие, Δ - его трехмерное подмногообразие, обладающее M -диаграммой. Пусть Δ' - трехмерное многообразие с $\partial\Delta' = \partial\Delta$ и M -диаграммой $(\partial\Delta, \Gamma)$. Будем говорить, что многообразие N' получается из N в результате переклейки многообразия Δ по диаграмме $(\partial\Delta, \Gamma)$, если N' гомеоморфно результату склеивания $N \setminus \text{Int } \Delta$ и Δ' посредством тождественного гомеоморфизма $\partial\Delta \rightarrow \partial\Delta'$. В силу леммы пункта 3.1, всякое обладающее M -диаграммой подмногообразие Δ можно переклеить по любой M -диаграмме $(\partial\Delta, \Gamma)$ и результат переклейки определяется с точностью до гомеоморфизма многообразием $N \setminus \text{Int } \Delta$ и изотопическим классом M -диаграммы $(\partial\Delta, \Gamma)$.

Пусть Δ - регулярная окрестность замкнутого одномерного подмногообразия Σ трехмерного многообразия N и $(\partial\Delta, \Gamma)$ - некоторая M -диаграмма. Если существует такая M -диаграмма $(\partial\Delta, \Gamma_0)$ многообразия Δ , что каждая компонента кривой Γ_0 пересекается с Γ ровно в одной точке, то переклейка многообразия Δ по $(\partial\Delta, \Gamma)$ является морсовской перестройкой вдоль Σ . Наоборот, всякая морсовская перестройка трехмерного многообразия, имеющая индекс 2, является переклейкой такого вида.

3.8. Переклейки пар. Пусть L - одномерное подмногообразие трехмерного многообразия M , и пусть \mathcal{D} - такое трехмерное подмногообразие многообразия M , что $(\mathcal{D}, L \cap \mathcal{D})$ является S -парой. Пусть $(\mathcal{D}, \mathcal{J})$ - какая-нибудь S -пара с S -диаграммой $(\partial\mathcal{D}, \mathcal{C}, L \cap \partial\mathcal{D})$. Будем говорить, что пара (M, L') получается из (M, L) в результате переклейки пары $(\mathcal{D}, L \cap \mathcal{D})$ по диаграмме $(\partial\mathcal{D}, \mathcal{C}, L \cap \partial\mathcal{D})$, если $L' = (L \setminus \text{Int } \mathcal{D}) \cup \mathcal{J}$. В силу леммы пункта 3.2, всякую S -пару $(\mathcal{D}, L \cap \mathcal{D})$ можно переклеить по любой S -диаграмме $(\partial\mathcal{D}, \mathcal{C}, L \cap \partial\mathcal{D})$ и результат переклейки определяется с точностью до гомеоморфизма парой $(M \setminus \text{Int } \mathcal{D}, L \setminus \text{Int } \mathcal{D})$ и изотопическим классом S -диаграммы $(\partial\mathcal{D}, \mathcal{C}, L \cap \partial\mathcal{D})$.

Пусть L - одномерное подмногообразие трехмерного многообразия M , и пусть S - такое компактное подмногообразие многообразия M , что $\partial S = L \cap S$ и каждая компонента подмногообразия S гомеоморфна I . Далее, пусть \mathcal{D} - регулярная окрестность подмно-

гообразия S , и пусть $(\partial D, C, L \cap \partial D)$ — некоторая S -диаграмма. Ясно, что $(D, L \cap D)$ является в этом случае S -парой. Если существует такая S -диаграмма $(\partial D, C_0, L \cap \partial D)$ пары $(D, L \cap D)$, что каждая компонента кривой C_0 пересекается с C ровно в одной точке, принадлежащей L , то переклейка пары $(D, L \cap D)$ по $(\partial D, C, L \cap \partial D)$ является морсовской перестройкой подмногообразия L вдоль ∂S . Наоборот, всякая морсовская перестройка одномерного подмногообразия, имеющая индекс 1, является переклейкой такого вида.

3.9. Переклейки двулистных разветвленных накрытий.

Пусть $P: N \rightarrow M$ — двулистное разветвленное накрытие трехмерного многообразия N с ветвлением над L . Пусть D — такое трехмерное подмногообразие многообразия M , что пара $(D, L \cap D)$ является S -парой, и пусть пара (M, L') получается из (M, L) в результате переклейки пары $(D, L \cap D)$ по S -диаграмме $(\partial D, C, L \cap \partial D)$. Тогда существует единственное двулистное разветвленное накрытие $P': N' \rightarrow M$ пары (M, L') , сужение которого на $M \setminus \text{Int } D$ изоморфно сужению $P^{-1}(M \setminus \text{Int } D) \rightarrow M \setminus \text{Int } D$ накрытия $P: N \rightarrow M$, и многообразию N' можно получить из N в результате переклейки многообразия $P^{-1}(D)$ по M -диаграмме $(P^{-1}(\partial D), P^{-1}(C))$.

Если D является регулярной окрестностью некоторого подмногообразия S и переклейка пары $(D, L \cap D)$ по $(\partial D, C, L \cap \partial D)$ является морсовской перестройкой подмногообразия L вдоль ∂S , то и переклейка многообразия $P^{-1}(D)$ по $(P^{-1}(\partial D), P^{-1}(C))$ является морсовской перестройкой вдоль $P^{-1}(S)$.

Доказательство. Существование и единственность накрытия $P': N' \rightarrow M$ следуют из существования и единственности двулистного разветвленного накрытия $p: \Delta \rightarrow D$ пары $(D, L \cap D)$. В силу теоремы 3.3, многообразие Δ имеет M -диаграмму $(\partial \Delta, p^{-1}(C))$. Пара (M, L') есть результат склеивания пар $(M \setminus \text{Int } D, L \setminus \text{Int } D)$, $(D, L \cap D)$ посредством тождественного гомеоморфизма $\partial D \rightarrow \partial D$. Поэтому N' представляется в виде результата склеивания многообразия $N \setminus P^{-1}(\text{Int } D)$ и Δ посредством гомеоморфизма $h: P^{-1}(\partial D) \rightarrow \partial \Delta$, покрывающего тождественный гомеоморфизм

$\partial\mathcal{D} - \partial\mathcal{D}$. Следовательно, N' получается из N в результате переклейки многообразия $P^{-1}(\mathcal{D})$ по диаграмме

$$(P^{-1}(\partial\mathcal{D}), h^{-1}P^{-1}(C)) = (P^{-1}(\partial\mathcal{D}), P^{-1}(C)).$$

Часть теоремы 3.9, касающаяся морсовских перестроек следует непосредственно из сказанного в пп. 3.7 и 3.8.

§ 4. Симметрическая обратимость

4.1. Симметрически обратимые пары. Пусть $P: N \rightarrow M$ - двулистное разветвленное накрытие с ветвлением над L , пусть $T: N \rightarrow N'$ нетривиальный автоморфизм этого накрытия, и пусть Σ - замкнутое одномерное подмногообразие многообразия N . Пару (N, Σ) назовем симметрически обратимой* относительно P , если образ каждой компоненты кривой Σ гомеоморфен I и $\partial P(\Sigma) = L \cap P(\Sigma)$. Очевидно, пара (N, Σ) симметрически обратима относительно P тогда и только тогда, когда каждая компонента кривой Σ инвариантна относительно T и пересекается с $P^{-1}(L)$ ровно в двух точках.

Примеры. 1. Если (\mathcal{F}, C, Q) - какая-нибудь S -диаграмма и $p: \Phi \rightarrow \mathcal{F}$ - двулистное разветвленное накрытие пары (\mathcal{F}, Q) , то пара $(\Phi, p^{-1}(C))$ симметрически обратима относительно P . В частности, симметрически обратима пара $(\partial\Delta, P^{-1}(C))$ из пункта 3.3.

2. В условиях теоремы 3.9 пара $(N, P^{-1}(S))$ симметрически обратима.

4.2. Симметрически обратимые зацепления. Зацепление (S^3, Σ) будем называть симметрически обратимым, если оно гомеоморфно какому-нибудь зацеплению, симметрически обратимому относительно $P_{S^3}: S^3 \rightarrow S^3$.

Для того, чтобы зацепление (S^3, Σ) было симметрически обратимым, необходимо и достаточно, чтобы существовала сохраняющая ориентацию инволюция $T: S^3 \rightarrow S^3$, которая переводит каждую компоненту кривой Σ в себя, обращая ориентацию.

Доказательство. Необходимость. В силу определения симметрически обратимых зацеплений, существует такой гомеоморфизм $h: S^3 \rightarrow S^3$, что зацепление $(S^3, h(\Sigma))$ симметрически обратимо относительно $P_{S^3}(\Sigma)$. Симметрия $sm: S^3 \rightarrow S^3$ (см. п.2.1) переводит каждую компоненту кривой $h(\Sigma)$ в себя, обращая ориентацию. Поэтому инволюция $h^{-1} \circ sm \circ h: S^3 \rightarrow S^3$ удовлетворяет всем условиям теоремы.

Достаточность. Из того, что сужения инволюции

* По поводу мотивировки этого термина см. п.4.2.

T на компоненты кривой Σ обращают ориентацию, следует, что T имеет неподвижные точки и, в силу теоремы Вальдхаузена 2I (см. п.2.I) существует такой гомеоморфизм $h: S^3 \rightarrow S^3$, что $sm \circ h = h \circ T$. Зацепление $(S^3, h(\Sigma))$ симметрически обратимо относительно P_{S^3} , и, следовательно, зацепление (S^3, Σ) симметрически обратимо.

Следствие. Всякое симметрически обратимое зацепление обратимо.

Автору не известно, существуют ли обратимые зацепления, не являющиеся симметрически обратимыми.

Класс симметрически обратимых зацеплений характеризуется также теоремами 4.3 и 5.6 и следующим свойством, которое легко выводится из теоремы 5.2 и теоремы Вальдхаузена.

Пусть (S^3, Σ) — зацепление, N — дополнение в S^3 открытой трубчатой окрестности кривой Σ , и пусть $M = S^3 \setminus \text{Int } \mathcal{D}$, где \mathcal{D} — подмногообразие сферы S^3 , каждая компонента которого гомеоморфна \mathcal{D}^3 и число компонент равно числу компонент кривой Σ . Для того, чтобы зацепление (S^3, L) было симметрически обратимым, необходимо и достаточно, чтобы существовало двулистное разветвленное накрытие $N \rightarrow M$.

4.3. Представление двулистных разветвленных накрывающих сфер в виде результатов перестроек сферы. Алгоритм I с ниже следующей блок-схемой строит по любому зацеплению (S^3, L) такое симметрически обратимое зацепление (S^3, Σ) , что двулистное разветвленное накрывающее зацепления (S^3, L) может быть получено из S^3 посредством морсовской перестройки вдоль Σ .

Блок-схема алгоритма I.

1. На L в S^3 натягивается какая-нибудь компактная связная поверхность F . Совершается переход к блоку 2.

2. Поверхность F представляется в виде круга K с приклеенными к его краю ленточками (ручками индекса i) $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$. (Это делается, например, так: строится на F букет окружностей, являющийся деформационным ретрактом поверхности F ; затем F деформируется в регулярную окрестность этого букета; последнюю можно рассматривать, очевидно, как круг — регулярную окрестность

центральной точки букета - с приклеенными к нему ленточками - вылезавшими из этого круга частями регулярных окрестностей окружностей букета; см., например, Фокс [3, стр.262]). Совершается переход к блоку 3.

3. Строятся средние линии s_1, s_2, \dots, s_n ленточек b_1, b_2, \dots, b_n (Если ленточки строились как части регулярных окрестностей окружностей букета, то s_1, s_2, \dots, s_n - пересечения ленточек с этими окружностями). Совершается переход к блоку 4.

4. При помощи изотопии поверхность F делается такой, чтобы $\partial K = S^1$. Совершается переход к блоку 5.

5. Строится $\Sigma = P_{S^3}^{-1}(\bigcup_{i=1}^n s_i)$.

На рис.3 показаны этапы работы алгоритма I в случае, когда исходным зацеплением (S^3, L) является восьмерка (узел 4_1 по таблице Александера - Бриггса).

Доказательство теоремы 4.3. Ясно, что (S^3, L) получается из $(S^3, \partial K) = (S^3, S^1)$ в результате морсовской перестройки вдоль $\bigcup_{i=1}^n s_i$. Отсюда, в силу теоремы 3.9, следует, что N получается из S^3 в результате морсовской перестройки вдоль

$$P_{S^3}^{-1}(\bigcup_{i=1}^n s_i) = \Sigma.$$

З а м е ч а н и е . При помощи алгоритма I можно построить, используя известную связь между морсовскими перестройками и кобордизмами, ориентируемое компактное односвязное четырехмерное многообразие X , краем которого является двулистное разветвленное накрывающее зацепления (S^3, L) . Можно показать, что построенное таким образом X является двулистным разветвленным накрывающим шара D^4 с ветвлением над поверхностью, изотопной поверхности F относительно ∂F . Причем, если F ориентруема (а этого, как известно, можно добиться), то $w_2(X) = 0$; см. [17].

4.4. Симметрически обратимые M-диаграммы и продолжение двулистных разветвленных накрытий. Пусть Δ - компактное трехмерное многообразие с M-диаграммой $(\partial\Delta, \Gamma)$ и \mathcal{D} - компактное трехмерное многообразие, каждая компонента которого гомеоморфна D^3 . Пусть, далее: $\partial\Delta \rightarrow \partial\mathcal{D}$ - двулистное разветвленное накрытие и Q - множество точек ветвления. Если пара $(\partial\Delta, \Gamma)$ симметрически обра-

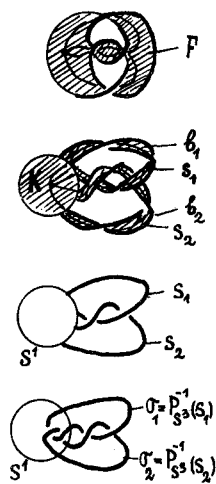


Рис.3.

тима относительно p , то тройка $(\partial\mathcal{D}, p(\Gamma), Q)$ является S -диаграммой и для любой S -пары $(\mathcal{D}, \mathcal{U})$ с S -диаграммой $(\partial\mathcal{D}, p(\Gamma), Q)$ существует продолжение накрытия $p: \partial\Delta \rightarrow \partial\mathcal{D}$ до двулистного разветвленного накрытия $P: \Delta \rightarrow \mathcal{D}$ с ветвлением над \mathcal{U} .

Доказательство. Из симметрической обратимости пары $(\partial\Delta, \Gamma)$ следует, что компоненты образа $p(\Gamma)$ гомеоморфны I и $\partial p(\Gamma) \subset Q$. Пусть Φ - произвольная компонента поверхности $\partial\Delta$ и пусть g - род поверхности Φ . Тогда $\Gamma \cap \Phi$ состоит из g компонент, а $Q \cap p(\Phi)$ состоит из $2g+2$ точек, и потому $(Q \setminus p(\Gamma)) \cap p(\Phi)$ состоит из двух точек. Таким образом, тройка $(\partial\Delta, p(\Gamma), Q)$ является S -диаграммой.

Пусть $P': \Delta' \rightarrow \mathcal{D}$ - двулистное разветвленное накрытие пары $(\mathcal{D}, \mathcal{U})$. В силу единственности двулистного разветвленного накрытия пары $(\partial\mathcal{D}, Q)$, существует гомеоморфизм $\tilde{h}_0: \partial\Delta \rightarrow \partial\Delta'$ с $P'\tilde{h}_0 = p$. В силу теоремы 3.3, многообразие Δ' имеет M -диаграмму $(\partial\Delta', P'^{-1}p(\Gamma)) = (\partial\Delta', \tilde{h}_0(\Gamma))$. Из леммы 5 пункта 3.1 следует, что гомеоморфизм \tilde{h}_0 можно продолжить до гомеоморфизма $\tilde{h}: \Delta \rightarrow \Delta'$. Положим $P = P'\tilde{h}: \Delta \rightarrow \mathcal{D}$. Это - двулистное разветвленное накрытие пары $(\mathcal{D}, \mathcal{U})$, продолжающее накрытие $p: \partial\Delta \rightarrow \partial\mathcal{D}$.

Следствия теоремы 4.4.

4.5. Пусть N - ориентируемое замкнутое связное трехмерное многообразие с диаграммой Хегора $(\Phi, \Gamma_+, \Gamma_-)$. Если существует такое двулистное разветвленное накрытие $p: \Phi \rightarrow S^2$ с ветвлением над некоторым множеством Q , что пары (Φ, Γ_+) , (Φ, Γ_-) симметрически обратимы относительно p , то существует двулистное разветвленное накрытие $N \rightarrow S^2$ зацепления с ∂S -диаграммой $(S^2, p(\Gamma_+), p(\Gamma_-), Q)$.

4.6. Пусть $P: N \rightarrow M$ - двулистное разветвленное накрытие трехмерного многообразия M с ветвлением над L , и пусть Δ - такое обладающее M -диаграммой подмногообразие многообразия N , что $P^{-1}P(\Delta) = \Delta$ и пара $(P(\Delta), L \cap P(\Delta))$ является S -парой. Пусть, далее, многообразие N' получается из N в результате пере-

клейки многообразия Δ по M -диаграмме $(\partial\Delta, \Gamma)$. Если пара $(\partial\Delta, \Gamma)$ симметрически обратима относительно сужения $\partial\Delta \rightarrow P(\partial\Delta)$ накрытия $P: N \rightarrow M$, то существует двулистное разветвленное накрытие $P': N' \rightarrow M$ пары (M, L') , которая получается из (M, L) в результате переклейки пары $(P(\Delta), L \cap P(\Delta))$ по \S -диаграмме $(P(\partial\Delta), P(\Gamma), L \cap P(\partial\Delta))$.

§ 5. Формулировки главных результатов

5.1. Регулярные M -диаграммы и P -диаграммы.

Пусть Φ -ориентируемая замкнутая поверхность и $p: \Phi \rightarrow \mathcal{F}$ -двулистное разветвленное накрытие с ветвлением над Q . Будем называть M -диаграмму (Φ, Γ) регулярной относительно p , если сужение $p/\Gamma: \Gamma \rightarrow \mathcal{F}$ имеет только устойчивые двойные точки (т.е. во всех двойных точках пересечения образов трансверсальны), не имеет тройных точек и $p(\Gamma) \cap Q = \emptyset$. Всякую M -диаграмму можно сделать регулярной относительно p посредством сколь угодно малой изотопии.

Тройку (\mathcal{F}, V, Q) , состоящую из замкнутой поверхности \mathcal{F} , ее подпространства V и конечного подмножества Q , будем называть P -диаграммой, если $V \cap Q = \emptyset$, каждая компонента поверхности \mathcal{F} гомеоморфна S^2 и каждая компонента подпространства V является либо простой замкнутой кривой, либо графом, в каждой вершине которого сходятся ровно четыре ребра. Вершины и ребра компонент второго типа будем называть вершинами и ребрами P -диаграммы.

Ясно, что если (Φ, Γ) является M -диаграммой, регулярной относительно двулистного разветвленного накрытия $p: \Phi \rightarrow \mathcal{F}$ пары (\mathcal{F}, Q) , то тройка $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$ является P -диаграммой.

Пусть (\mathcal{F}, V, Q) -некоторая P -диаграмма. Простую замкнутую кривую $a \subset V$ назовем n -угольником P -диаграммы (\mathcal{F}, V, Q) , если в a содержится ровно n таких вершин P -диаграммы (\mathcal{F}, V, Q) , что в a содержатся пары смежных (а не противоположных) ребер P -диаграммы (\mathcal{F}, V, Q) , примыкающих к каждой из этих вершин. Эти n вершин будем называть вершинами n -угольника a . На рис.4 изображена часть P -диаграммы с треугольником, имеющим вершины A_1, A_2, A_3 .

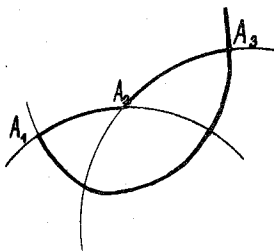


Рис.4.

Назовем n -угольником a P -диаграммы (\mathcal{F}, V, Q) элементарным, если $n \leq 2$ и существует такая компонента U дополнения $\mathcal{F} \setminus V$, что $\partial U = a$ и множество $Q \cap U$

состоит из $(2-n)$ точек; при этом множество U называется внутренностью n -угольника a .

5.2. Построение симметрически обратимых M -диаграмм.

Пусть \mathcal{F} - замкнутая поверхность, каждая компонента которой гооморфна S^2 , и Φ - замкнутая поверхность, каждая компонента которой имеет род 1 или 2. Пусть, далее, $p: \Phi \rightarrow \mathcal{F}$ - двулистное разветвленное накрытие с ветвлением над Q и пусть (Φ, Γ) - некоторая M -диаграмма.

Алгоритм 2 со следующей блок-схемой строит по перечисленным данным такое подмногообразие C многообразия \mathcal{F} , что тройка (\mathcal{F}, C, Q) является S -диаграммой и M -диаграмма $(\Phi, p^{-1}(C))$ изотопна (Φ, Γ) .

(Ясно, что M -диаграмма $(\Phi, p^{-1}(C))$ симметрически обратима относительно p).

Блок-схема алгоритма 2

1. Посредством малой изотопии M -диаграмма (Φ, Γ) делается регулярной относительно p . Совершается переход к блоку 2.

2. Вводятся множества B и C , которые будут перестраиваться последующими блоками; B полагается равным $p(\Gamma)$, C полагается равным \emptyset . Совершается переход к блоку 3.

3. Ищется элементарный двуугольник P -диаграммы (\mathcal{F}, B, Q) . Если такой двуугольник найден, совершается переход к блоку 4; если таких двуугольников нет, совершается переход к блоку 5.

4. Способом, показанным на рис.5, P -диаграмма (\mathcal{F}, B, Q) перестраивается в окрестности вершин двуугольника, найденного блоком 3. Совершается переход к блоку 3.

5. Ищется элементарный одноугольник P -диаграммы (\mathcal{F}, B, Q) . Если такой одноугольник найден, совершается переход к блоку 6; если таких одноугольников нет, совершается переход к блоку 7.

6. Способом, показанным на рис.6, P -диаграмма (\mathcal{F}, B, Q) перестраивается в окрестности вершины одноугольника, найденного блоком 5.

Совершается переход к блоку 2.

7. Ищется элементарный нульугольник P -диаграммы (\mathcal{F}, B, Q) .

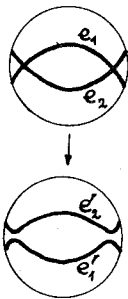


Рис.5.

Если такой нульугольник найден, совершается переход к блоку 8; если таких нульугольников нет, алгоритм работу закончил.

8. Строится простая дуга c , содержащаяся во внутренности найденного блоком 7 нульугольника a и соединяющая лежащие там точки множества Q ; см. рис.7. Множество C заменяется на $C \cup c$, множество B заменяется на $B \setminus a$. Совершается переход к блоку 7.

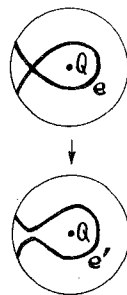


Рис.6.

5.3. Следствие теорем 5.2 и 4.4. Пусть

Δ - компактное многообразие, каждая компонента которого гомеоморфна D_1 или D_2 , и пусть D - компактное многообразие, каждая компонента которого гомеоморфна D^3 . Пусть, далее, $p: \partial\Delta \rightarrow \partial D$ двулистное

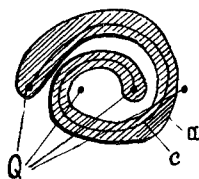


Рис.7.

разветвленное накрытие и Q - множество точек ветвления. Если

C - подмногообразие многообразия ∂D , построенное алгоритмом 2 по $p: \partial\Delta \rightarrow \partial D$ и любой M -диаграмме $(\partial\Delta, \Gamma)$ многообразия Δ , то для любой S -пары (D, \mathcal{U}) с S -диаграммой $(\partial D, C, Q)$ существует продолжение накрытия $p: \partial\Delta \rightarrow \partial D$ до двулистного разветвленного накрытия $\Delta \rightarrow D$ с ветвлением над \mathcal{U} .

5.4. Следствие теорем 5.2 и 4.5. Алгоритм 3 следующей блок-схемой по всякой диаграмме Хегора $(\Phi, \Gamma_+, \Gamma_-)$ рода ≤ 2 строит DS -диаграмму (S^2, C_+, C_-, Q) зацепления, двулистное разветвленное накрывающее которого имеет диаграмму Хегора $(\Phi, \Gamma_+, \Gamma_-)$.

Блок-схема алгоритма 3

1. Строится произвольное двулистное разветвленное накрытие $p: \Phi \rightarrow S^2$; множество его точек ветвления обозначается через Q . Совершается переход к блоку 2.

2. К накрытию $p: \Phi \rightarrow S^2$ и M -диаграмме (Φ, Γ_+) применяется алгоритм 2. Построенное им подмногообразие сферы S^2 обозначается через C_+ . Совершается переход к блоку 3.

3. К накрытию $p: \Phi \rightarrow S^2$ и M -диаграмме (Φ, Γ_-) применяется алгоритм 2. Построенное им подмногообразие сферы S^2 обозначается через C_- .

З а м е ч а н и е . Число мостов $\mathcal{D}S$ -диаграммы, которая строится алгоритмом 3 по диаграмме Хегора $(\Phi, \Gamma_+, \Gamma_-)$, на единицу больше рода этой диаграммы Хегора.

5.5. Следствие теорем 5.2 и 4.6. Пусть $p: N \rightarrow M$ -двухлистное разветвленное накрытие трехмерного многообразия M с ветвлением над L , и пусть Δ -такое компактное подмногообразие многообразия N , что $P^{-1}P(\Delta) = \Delta$, пара $(P(\Delta), L \cap P(\Delta))$ является S -парой и каждая компонента подмногообразия Δ гомеоморфна \mathcal{D}_1 или \mathcal{D}_2 . (Условия, наложенные на Δ , выполняются, в частности, если Δ -регулярная окрестность такого подмногообразия Σ , что пара (N, Σ) симметрически обратима относительно P и $P^{-1}P(\Delta) = \Delta$.) Пусть, далее, многообразие N' получается из N в результате переклейки многообразия Δ по M -диаграмме $(\partial\Delta, \Gamma)$. Тогда существует двухлистное разветвленное накрытие $P': N' \rightarrow M$ пары (M, L') , которая получается из (M, L) в результате переклейки пары $(P(\Delta), L \cap P(\Delta))$ по S -диаграмме $(P(\partial\Delta), c, L \cap P(\partial\Delta))$, где c -результат применения алгоритма 2 к сужению $\partial\Delta \rightarrow P(\partial\Delta)$ накрытия $P: N \rightarrow M$ и M -диаграмме $(\partial\Delta, \Gamma)$.

5.6. Следствие теоремы 5.5. Пусть Δ -такое компактное подмногообразие сферы S^3 , что $sm(\Delta) = \Delta$, каждая компонента многообразия Δ гомеоморфна \mathcal{D}_1 или \mathcal{D}_2 и пара $(P_{S^3}(\Delta), S^1 \cap P_{S^3}(\Delta))$ является S -парой. (Условия, наложенные на Δ , выполняются, в частности, если Δ -регулярная окрестность такого подмногообразия Σ , что зацепление (S^3, Σ) симметрически обратимо относительно P_{S^3} и $sm(\Delta) = \Delta$.) Пусть, далее, $(\partial\Delta, \Gamma)$ -некоторая M -диаграмма.

Алгоритм 4 со следующей блок-схемой строит по перечисленным данным зацепление (S^3, L) , двулистное разветвленное накрывающее которого получается из S^3 в результате переклейки многообразия Δ по M -диаграмме $(\partial\Delta, \Gamma)$.

Блок-схема алгоритма 4

1. Строится поверхность $P_{S^3}(\partial\Delta)$. Совершается переход к блоку 2.
2. К сужению $\partial\Delta \rightarrow P_{S^3}(\partial\Delta)$ накрытия $P_{S^3}: S^3 \rightarrow S^3$ и M -диаграмме $(\partial\Delta, \Gamma)$ применяется алгоритм 2. Построенное им подмногообразие многообразия $P_{S^3}(\partial\Delta)$ обозначается через C . Совершается переход к блоку 3.
3. По S -диаграмме $(P_{S^3}(\partial\Delta), C, S' \cap P_{S^3}(\partial\Delta))$ строится такое подмногообразие \mathcal{U} многообразия $P_{S^3}(\Delta)$, что $(P_{S^3}(\Delta), \mathcal{U})$ является S -парой с S -диаграммой $(P_{S^3}(\partial\Delta), C, S' \cap P_{S^3}(\partial\Delta))$. Совершается переход к блоку 4.
4. Строится зацепление (S^3, L) с $L = (S^1 \setminus \text{Int } P_{S^3}(\Delta)) \cup \mathcal{U}$.

З а м е ч а н и е . Из теоремы 5.6 следует, в частности, что результат любой морсовской перестройки (или даже переклейки) сферы S^3 вдоль симметрически обратимого зацепления двулистно разветвленно накрывает сферу.

§ 6. Доказательство теоремы 5.2.

6.1. Предварительные определения. Пусть α - некоторый n -угольник P -диаграммы (\mathcal{F}, B, Q) с $n > 0$, и пусть \mathcal{F}' - компонента поверхности \mathcal{F} , содержащая α . Внутреннюю часть n -угольника α будем называть компоненту U множества $\mathcal{F}' \setminus \alpha$, которая не содержит ребер P -диаграммы (\mathcal{F}, B, Q) , примыкающих к вершинам n -угольника α . Разумеется, если $n > 1$, то n -угольник может и не обладать внутренностью (см. рис.4). Любой одноугольник обладает внутренностью. Для элементарных n -угольников с $n > 0$ определения внутренности, данные в этом пункте и в пункте 5.1, совпадают.

Назовем n -угольник α P -диаграммы (\mathcal{F}, B, Q) почти элементарным, если $n = 1$ или 2 , α имеет внутренность и эта внутренность содержит ровно $(2-n)$ точек множества Q . Ясно, что элементарные n -угольники с $n > 0$ почти элементарны.

6.2. Формулировки лемм. Теорема 5.2 будет выведена в п.6.3 из нижеследующих лемм (их доказательства см. в п.6.4).

Во всех этих леммах \mathcal{F} - замкнутая поверхность, каждая компонента которой гомеоморфна сфере; $p: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{F}$ - двулистное разветв-

ленное накрытие с ветвлением над Q ; пара (Φ, Γ) является M -диаграммой. Во всех леммах кроме последней (леммы 9) M -диаграмма (Φ, Γ) предполагается регулярной относительно p .

Лемма 1. Пусть a - элементарный двугольник P -диаграммы $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$. Тогда существует такой изотопный тождественному гомеоморфизм $h: \Phi \rightarrow \Phi$, что M -диаграмма $(\Phi, h(\Gamma))$ регулярна относительно p и P -диаграмма $(\mathcal{F}, ph(\Gamma), Q)$ получается из $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$ в результате показанной на рис. 5 перестройки окрестности вершин двугольника a .

Лемма 2. Пусть a - элементарный одноугольник P -диаграммы $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$. Тогда существует такой изотопный тождественному гомеоморфизм $h: \Phi \rightarrow \Phi$, что M -диаграмма $(\Phi, h(\Gamma))$ регулярна относительно p и P -диаграмма $(\mathcal{F}, ph(\Gamma), Q)$ получается из $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$ в результате показанной на рис. 6 перестройки окрестности вершины одноугольника a .

Лемма 3. Пусть a - некоторый n -угольник P -диаграммы $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$, и пусть U - одна из двух компонент множества $\mathcal{F} \setminus a$ с $\partial U = a$. Тогда число точек множества $Q \cap U$ сравнимо с n по модулю 2.

Лемма 4. Пусть $U \subset \mathcal{F}$ - открытое подмножество с $\partial U \subset p(\Gamma)$, имеющее только односвязные компоненты и не содержащее внутренней части какого-либо одноугольника P -диаграммы $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$. Тогда сужение проекции p на каждую компоненту множества $\Gamma \cap p^{-1}(U)$ является вложением. В частности, (при $U = \mathcal{F}$), если $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$ не имеет одноугольников, то сужение проекции p на каждую компоненту кривой Γ является вложением.

Лемма 5. Если $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$ не имеет элементарных двугольников, то $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$ не имеет и почти элементарных двугольников.

Лемма 6. Если $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$ не имеет почти элементарных двугольников и элементарных одноугольников, то $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$ не имеет и почти элементарных одноугольников.

Лемма 7. Если каждая компонента поверхности Φ имеет род 1 или 2 и $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$ не имеет почти элементарных двугольников и почти элементарных одноугольников, то $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$ не имеет одноугольников с внутреннейностью, содержащей 3 или 5 точек множества Q .

Лемма 8. Если каждая компонента поверхности Φ имеет род 1 или 2, сужения проекции p на компоненты кривой Γ суть вложения и P -диаграмма $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$ не имеет почти элементарных двугольников, то p/Γ - вложение и кривая $p(\Gamma)$ состоит из элементарных нульугольников P -диаграммы $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$ с непересекающимися внутренностями.

Лемма 9. (Здесь M -диаграмма (Φ, Γ) не предполагается регулярной относительно p). Пусть γ - такая компонента кривой Γ , что p/γ - вложение, $p(\gamma) \cap p(\Gamma - \gamma) = \emptyset$ и кривая p/γ ограничивает область $U \subset \mathcal{F}$, содержащую ровно две точки множества Q и не пересекающуюся с $p(\Gamma)$; и пусть $c \subset U$ - простая дуга, соединяющая лежащие в U точки множества Q . Тогда существует такой изотопный тождественному гомеоморфизм $h: \Phi \rightarrow \Phi$, что $h|_{\Gamma - \gamma} = 1$ и $h(\gamma) = p'(c)$.

6.3. Вывод теоремы 5.2 из лемм. Поскольку блоки 4 и 6 уменьшают число вершин P -диаграммы (\mathcal{F}, B, Q) , после конечного числа применений этих блоков P -диаграмма (\mathcal{F}, B, Q) окажется не имеющей элементарных одноугольников и двугольников. Обозначим построенное к этому моменту множество B через B' .

В силу лемм 1 и 2, существует такой изотопный тождественному гомеоморфизм $h: \Phi \rightarrow \Phi$, что M -диаграмма $(\Phi, h(\Gamma))$ регулярна относительно p и $ph(\Gamma) = B'$. В силу лемм 5, 6 и 7, P -диаграмма (\mathcal{F}, B', Q) не имеет почти элементарных двугольников и одно-

угольников с внутренностью, содержащей нечетное число точек множества Q . Далее, из лемм 3, 4 и 8 следует, что $P/h(\Gamma)$ - вложение и B' состоит из элементарных нульугольников с непересекающимися внутренностями.

Как показывает лемма 9, в результате конечного числа последующих применений блока 8 будет построено такое состоящее из простых дуг множество C , что существует изотопный тождественному гомеоморфизм $h: \Phi \rightarrow \Phi$ с $h\rho^{-1}(B) = \rho^{-1}(C)$.

Гомеоморфизм $h: \Phi \rightarrow \Phi$ изотопен тождественному и переводит кривую Γ в $\rho^{-1}(C)$. Таким образом, $(\Phi, \rho^{-1}(C))$ есть M -диаграмма, изотопная (Φ, Γ) . Очевидно, M -диаграмма $(\Phi, \rho^{-1}(C))$ симметрически обратима, и потому (в силу теоремы 4.4) тройка (\mathcal{F}, C, Q) является S -диаграммой.

6.4. Доказательства лемм. Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы I. Очевидно, существует такое вложение $i: \mathcal{D}^2 \rightarrow \mathcal{F}$, что 1) $i(\mathcal{D}^2)$ содержит внутренность двуугольника α , 2) $i(\mathcal{D}^2) \cap Q = \emptyset$ и 3) $i^{-1}(\Gamma)$ есть объединение показанных на рис.5 дуг e_1 и e_2 . Обозначим для $k = 1, 2$ через \tilde{e}_k компоненту множества $\rho^{-1}(e_k) \cap \Gamma$, гомеоморфную отрезку (такая компонента единственна в силу регулярности M -диаграммы (Φ, Γ)). Обозначим через U_k компоненту множества $\rho^{-1}(\mathcal{D}^2)$, содержащую \tilde{e}_k . Пусть $i_k: \mathcal{D}^2 \rightarrow U_k$ - гомеоморфизм, накрывающий вложение $i: \mathcal{D}^2 \rightarrow \mathcal{F}$, и пусть $\varphi_k: \mathcal{D}^2 \rightarrow \mathcal{D}^2$ - тождественный на $\partial \mathcal{D}^2$ гомеоморфизм, переводящий e_k в показанную на рис.5 дугу e'_k . Определим отображение $h: \Phi \rightarrow \Phi$ формулой

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in \Phi \setminus \rho^{-1}(\mathcal{D}^2) \\ i_k \varphi_k i_k^{-1}(x), & \text{если } x \in U_k. \end{cases}$$

Из построения видно, что h удовлетворяет условиям леммы I.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 2. Очевидно, существует такое вложение $i: \mathcal{D}^2 \rightarrow \mathcal{F}$, что 1) $i(\mathcal{D}^2)$ содержит внутренность одноугольника α , 2) $i(\mathcal{D}^2) \cap Q = i(\alpha)$ и 3) $i^{-1}(\Gamma)$ является показанной на рис.6 дугой e . Вложение i индуцирует два таких вложения $\tilde{i}: \mathcal{D}^2 \rightarrow \Phi$, что $\rho \circ \tilde{i} = i \circ P_{\mathcal{D}^2}$, где $P_{\mathcal{D}^2}: \mathcal{D}^2 \rightarrow \mathcal{D}^2$ - стандартное двулистное разветвленное накрытие, определяемое формулой $P_{\mathcal{D}^2}(z) = z^2$. Для того, чтобы фиксировать одно из \tilde{i} , потребуем, чтобы изображенная на рис.8 дуга \tilde{e} совпадала с $\tilde{i}^{-1}(\Gamma)$.

Пусть $\varphi: \mathcal{D}^2 \rightarrow \mathcal{D}^2$ - тождественный на $\partial \mathcal{D}^2$ гомеоморфизм, переводящий \tilde{e} в изображенную на рис.8 дугу \tilde{e}' . Определим отображение $h: \Phi \rightarrow \Phi$ формулой

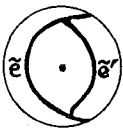


Рис.8

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in \Phi \setminus \rho^{-1}(\mathcal{D}^2) \\ \tilde{i} \varphi \tilde{i}^{-1}(x), & \text{если } x \in \rho^{-1}(\mathcal{D}^2) \end{cases}$$

Из построения видно, что h удовлетворяет условиям леммы 2.

Доказательство леммы 3. Очевидно, сужение $p^{-1}(a) \rightarrow a$ накрытия $p: \Phi \rightarrow \mathcal{F}$ тривиально тогда и только тогда, когда в U содержится четное число точек множества Q .

Пусть $n=0$. Тогда a — гомеоморфный образ одной из компонент кривой Γ при проекции p , и потому сужение $p^{-1}(a) \rightarrow a$ накрытия $p: \Phi \rightarrow \mathcal{F}$ тривиально.

Рассмотрим теперь случай $n > 0$. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n — дуги, на которые a разбивается своими вершинами, и пусть нумерация этих дуг выбрана так, что $a_i \cap a_{i+1} \neq \emptyset$ при $i=1, \dots, n-1$. Обозначим через \tilde{a}_i компоненту множества $p^{-1}(a_i) \cap \Gamma$, гомеоморфную отрезку (такая компонента единственна в силу регулярности диаграммы (Φ, Γ)). Пусть $t: \Phi \rightarrow \Phi$ — нетривиальный автоморфизм накрытия $p: \Phi \rightarrow \mathcal{F}$. Так как $\tilde{a}_i \cap \tilde{a}_j = \emptyset$ при $i \neq j$, $p(\tilde{a}_i) \cap p(\tilde{a}_{i+1}) = a_i \cap a_{i+1} = \emptyset$ и $p(\tilde{a}_1) \cap p(a_n) = a_1 \cap a_n \neq \emptyset$, то $\tilde{a}_i \cap t\tilde{a}_{i+1} \neq \emptyset$ и $t\tilde{a}_1 \cap \tilde{a}_n \neq \emptyset$. Поэтому пространство $\tilde{a} = \bigcup_{i=1}^n t^i \tilde{a}_i$ при нечетном n гомеоморфно отрезку, а при четном n — окружности. Кривая \tilde{a} накрывает a , и потому сужение $p^{-1}(a) \rightarrow a$ накрытия $p: \Phi \rightarrow \mathcal{F}$ не тривиально при нечетном n и тривиально при четном n .

Доказательство леммы 4. Допустим, существует такая компонента α множества $\Gamma \cap p^{-1}(U)$, что $p|_{\alpha}$ не есть вложение. Тогда найдутся такие точки $x_1, x_2 \in \alpha$, что $p(x_1) = p(x_2)$ и сужение проекции p на часть β дуги α , ограниченную точками x_1, x_2 , является вложением. Образ $p(\beta)$ дуги β является одноугольником P — диаграммы $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$. В силу односвязности компонент множества U , одноугольник $p(\beta)$ ограничивает область $U_1 \subset U$, гомеоморфную кругу. По условию, U_1 не является внутренностью одноугольника $p(\beta)$, и потому $p^{-1}(U_1) \cap \alpha \neq \emptyset$ (см. рис. 9).

Допустим, что сужения проекции p на компоненты множества $p^{-1}(U_1) \cap \alpha$ являются вложениями. Тогда либо существует одна компонента множества $p^{-1}(U_1) \cap \alpha$, образ которой примыкает к вершине одноугольника $p(\beta)$, и тогда образ этой компоненты является одноугольником, содержащимся в $U_1 \subset U$ вместе со своей внутренностью (см. рис. 9а), либо существуют две компоненты множества $p^{-1}(U_1) \cap \alpha$, образы которых примыкают к вершине одноугольника $p(\beta)$, и тогда образ любой из этих компонент вместе с частью одноугольника $p(\beta)$ составляет одноугольник, содержащийся в U вместе со своей внутренностью (см. рис. 9 б). Оба случая противоречат условию. Следо-

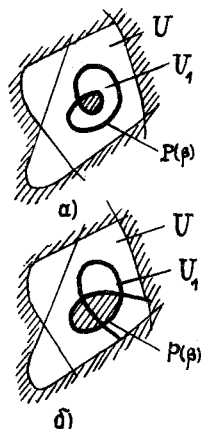


Рис. 9.

вательно, допущение не верно, и существует такая компонента α , множества $p^{-1}(U) \cap \Gamma$, что P/α не есть вложение.

Таким образом, мы построили множество U_1 , строго меньшее множества U , и компоненту α_1 множества $p^{-1}(U_1) \cap \Gamma$, которые удовлетворяют тем же условиям, что и U и α . Действуя так и дальше, можно построить строго убывающую бесконечную последовательность $U \supset U_1 \supset U_2 \supset \dots$ с $\partial U_i \subset p(\Gamma)$, что противоречит регулярности M -диаграммы (\mathcal{F}, Γ) .

Доказательство леммы 5. Допустим, $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$ имеет почти элементарный двуугольник a с внутренностью U . Будем считать двуугольник a выбранным так, что в U не содержится внутренности какого-либо другого почти элементарного двуугольника p -диаграммы $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$. Поскольку a не элементарен, $p^{-1}(U) \cap \Gamma \neq \emptyset$. Пусть β - компонента множества $p^{-1}(U) \cap \Gamma$. В силу леммы 3, \bar{U} не содержит одноугольников и треугольников P -диаграммы $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$, и потому P/β - вложение и концы дуги $\overline{p(\beta)}$ лежат на одной стороне двуугольника a . Часть этой стороны, вместе с $p(\beta)$ образует почти элементарный двуугольник. Внутренность этого двуугольника содержится в U , что противоречит нашему предположению.

Доказательство леммы 6. Допустим, $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$ имеет почти элементарный одноугольник a с внутренностью U . Будем считать одноугольник a выбранным так, что в U не содержится внутренности какого-либо другого почти элементарного одноугольника P -диаграммы $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$. В силу леммы 3, внутренность любого одноугольника содержит нечетное число точек множества Q , и потому в U вообще не содержится внутренности какого-либо другого одноугольника. Поскольку a не элементарен, $p^{-1}(U) \cap \Gamma \neq \emptyset$. Пусть β - компонента множества $p^{-1}(U) \cap \Gamma$. В силу леммы 4, P/β - вложение. Дуга $p(\beta)$ вместе с частью одноугольника a , заключенной между концами дуги $\overline{p(\beta)}$, образует двуугольник. Он ограничивает область $U' \subset U$, которая не содержит ребер p -диаграммы $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$, примыкающих к его вершинам и (в силу леммы 3) не пересекается с Q . Таким образом, построен почти элементарный двуугольник P -диаграммы $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$, что противоречит условию.

Доказательство леммы 7. Допустим, $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$ имеет одноугольник a с внутренностью U , содержащей n точек множества Q , $n = 3$ или 5 . Обозначим через \mathcal{F}' компоненту поверхности \mathcal{F} , содержащую a , и положим $V = \mathcal{F}' \setminus \bar{U}$, $Q_v = Q \cap V$. Обозначим через A вершину одноугольника a . Обозначим через α_1 и α_2 компоненты множества $\Gamma \cap p^{-1}(V)$, образы которых, $p(\alpha_1)$ и $p(\alpha_2)$, содержат ребра P -диаграммы $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$, примыкающие к A и не содержащиеся в a (Возможно, $\alpha_1 = \alpha_2$).

Пусть $p^{-1}(\mathcal{F}')$ имеет род g . Тогда $Q \cap \mathcal{F}'$ состоит из $2g+2$ точек, и потому Q_v состоит из $2g+2-n$ точек. Так как $g = 1$ или 2 и $n = 3$ или 5 , то $2g+2-n = 1$ или 3 . Рассмотрим сначала случай $2g+2-n = 1$.

Пусть $\alpha_1 \neq \alpha_2$ и P/α_1 - вложение. Тогда $\overline{p(\alpha_1)}$ - простая дуга с концами на a . Она вместе с заключенной между ее концами частью одноугольника a образует двуугольник b с внутренностью $U' \subset V$. В силу леммы 3, $Q \cap U'$ состоит из четного числа точек, но $Q \cap U' \subset Q_v$, и потому $Q \cap U' = \emptyset$. Следовательно, b - почти элементарный двуугольник, что противоречит условию.

Пусть $\alpha_1 = \alpha_2$ и P/α_1 - вложение. Тогда $\overline{p(\alpha_1)}$ - одноугольник P -диаграммы $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$. Его внутренность содержится в V и потому содержит единственную точку множества Q_v . Следовательно, $\overline{p(\alpha_1)}$ - почти элементарный одноугольник, что также противоречит условию.

Таким образом, при $2g+2-n = 1$ сужение P/α_1 не может быть вложением. Если же $2g+2-n = 1$ и P/α_1 не является вложением, то, в силу леммы 4, существует одноугольник, содержащийся вместе со своей внутренностью в V и потому содержащий единственную точку множества Q_v . Следовательно, это - почти элементарный одноугольник, что противоречит условию. Таким образом, случай $2g+2-n = 1$ не возможен.

Рассмотрим случай $2g+2-n = 3$. Пусть $\alpha_1 \neq \alpha_2$ и P/α_1 - вложение. Тогда, как и выше, из $\overline{p(\alpha_1)}$ и части одноугольника a строится двуугольник b с внутренностью $U' \subset V$. В силу леммы 3, множество $Q \cap U'$ может быть пустым или состоять из двух точек. В первом случае b - почти элементарный двуугольник (см. рис. 10а), во втором случае множество $V \setminus \overline{U'}$

является внутренностью почти элементарного одноугольника (см. рис. 10б). И то и другое противоречит условию.

Пусть $\alpha_1 = \alpha_2$ и P/α_1 - вложение. Тогда $\overline{p(\alpha_1)}$ - одноугольник P -диаграммы $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$. Его

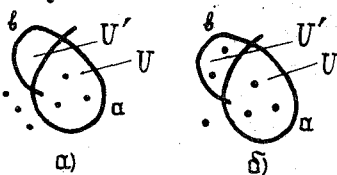


Рис. 10.

внутренность содержится в V , и потому содержит 1 или 3 точки множества Q . В первом случае $\overline{p(\alpha_1)}$ - почти элементарный одноугольник, что противоречит условию. Рассмотрим второй случай.

Объединение дуги α_1 и компоненты множества $p^{-1}(a) \cap \Gamma$, гомеоморфной отрезку, является компонентой кривой Γ . Обозначим это объединение через γ . Кривые a и $\overline{p(\alpha_1)}$ гомотопны в $\mathcal{F} \setminus Q$, и потому кривая γ гомотопна $p^{-1}(a)$ в $\mathcal{F} \setminus p^{-1}(Q)$ (а, значит, и в \mathcal{F}). Кривая $p^{-1}(a)$ ограничивает в \mathcal{F} область $p^{-1}(U)$. Следова-

тельно, γ гомологична нулю в Φ , и пара (Φ, Γ) не может быть M -диаграммой, что противоречит условию.

Таким образом, при $2q+2-n=3$ сужение P/α_1 не может быть вложением. Выберем какую-нибудь параметризацию $h: I \rightarrow \bar{\alpha}_1$. Пусть $x \in I$ - наименьшее число, для которого существует такое $y < x$, что $ph(x) = ph(y)$. Тогда $ph[y, x]$ - одноугольник, содержащийся в V вместе со своей внутренностью U' . В силу леммы 3 и условия, U' содержит три точки множества Q . Пусть

z - наименьшее число из $(x, 1]$, для которого $ph(z) \in ph[0, x] \cup \alpha$. Сужение $ph[x, z]$ является вложением, так как в противном случае область $\vee (ph[0, x] \cup U')$, не пересекающаяся с Q , содержала бы одноугольник нашей P -диаграммы, что противоречило бы лемме 3.

Возможны всего два способа взаимного расположения α и $ph[0, x]$, показанные на рис. II. Все возможные расположения концов дуги $ph[x, z]$ (а эти концы определяют тип пары $(\mathcal{F}, \alpha \cup ph[0, z])$) показаны на рис. I2, I3. В случаях, изображенных на рис. I2 а, б, в, д и I3 а, д, присутствуют почти элементарные двуугольники, а случаи, изображенные на рис. I2 г и I3 б, в, г, не возможны в силу леммы 3.

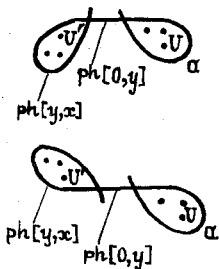


Рис. II.

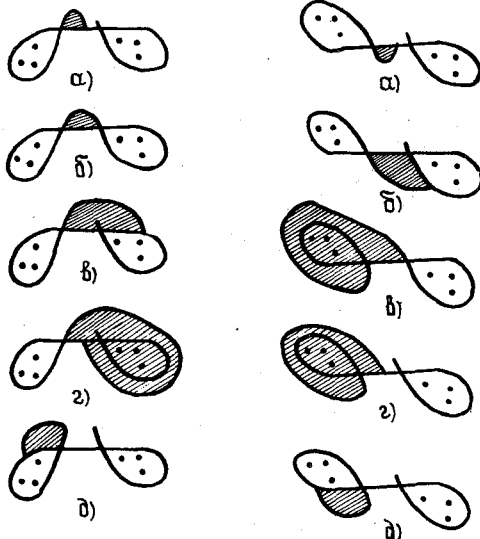


Рис. I2.

Рис. I3.

Доказательство леммы 8. Пусть γ - компонента кривой Γ . Ее образ $p(\gamma)$ - нульугольник P -диаграммы $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$. Он разрезает содержащую его компонен-

ту поверхности \mathcal{F} на две области. Каждая из них содержит четное число точек множества Q , а так как γ не гомотопна нулю, то это число не равно нулю. Компонента поверхности \mathcal{F} , в которой содержится $p(\gamma)$, содержит 4 или 6 точек множества Q . Поэтому в одной из упомянутых областей содержится 2 точки множества Q , а в другой — 2 или 4 точки множества Q . Для каждой компоненты γ кривой Γ выберем по компоненте U_j дополнения $\mathcal{F} \setminus p(\gamma)$ с $\partial U_j = p(\gamma)$, содержащей 2 точки множества Q .

Для доказательства того, что p/Γ — вложение, достаточно доказать, что для любых компонент γ, γ' кривой Γ пересечение $p(\gamma) \cap p(\gamma')$ не пусто. Допустим существуют такие γ, γ' , что $p(\gamma) \cap p(\gamma') \neq \emptyset$. Тогда $\gamma' \cap p^{-1}(U_j) \neq \emptyset$. Пусть β — компонента множества $\gamma' \cap p^{-1}(U_j)$. Дуга $p(\beta)$ разрезает область U_j на две области, являющиеся внутренностями двуугольников P -диаграммы $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$. В силу леммы 3, одна из них содержит 2 точки множества Q , а другая не пересекается с Q . Граница последней является почти элементарным двуугольником P -диаграммы $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$, что противоречит условию. Следовательно p/Γ — вложение.

Если $U_j \supset U_{j'}$, то кривые γ, γ' гомотопны, что невозможно, поскольку (\mathcal{F}, Γ) является M -диаграммой. Следовательно, области U_j не пересекаются друг с другом и кривые $p(\gamma)$ являются элементарными нульугольниками P -диаграммы $(\mathcal{F}, p(\Gamma), Q)$, имеющими внутренности U_j .

Доказательство леммы 9. Очевидная гомотопия $h_t: p(\gamma) \rightarrow \mathcal{F}$, стягивающая $p(\gamma)$ на c , индуцирует изотопию $\tilde{h}_t: \gamma \rightarrow \mathcal{F}$, переводящую γ в $p^{-1}(c)$. Изотопия \tilde{h}_t продолжается до изотопии $\tilde{H}_t: \Phi \rightarrow \Phi$, тождественной вне регулярной окрестности множества $p^{-1}(\bar{U})$. Гомеоморфизм $h = \tilde{H}_t: \Phi \rightarrow \Phi$ удовлетворяет условиям леммы 9.

Добавление I. Препятствия к существованию накрытий

I. Недавно Фокс [4] доказал, что тор $S^1 \times S^1 \times S^1$ нельзя представить в виде двулистного разветвленного накрывающего сферы, после чего Монтесинос [II] доказал то же для произведений $S^1 \times \mathcal{F}_g$ с $g \geq 1$. Доказательства этих фактов опираются на следующую лемму.

Лемма Фокса [4, Теорема I]. Если ориентированное связное замкнутое n -мерное многообразие N является d -листным циклическим разветвленным накрывающим какой-либо гомологической сферы, то существует такой гомеоморфизм $T: N \rightarrow N$,

что при $k=1, 2, \dots, n-1$ индуцированный автоморфизм

$$T_*: H_k(N) \longrightarrow H_k(N)$$

удовлетворяет уравнению

$$1 + T_* + T_*^2 + \dots + T_*^{d-1} = 0.$$

(В частности, при $d=2$, $T_* = -1$).

Теоремы Фокса и Монтесиноса были выведены из этой леммы следующим образом. Были рассмотрены все гомотопические классы отображений $T: N \longrightarrow N$ ($c N = S^1 \times \mathcal{F}_g$), которые действуют в $H_1(N)$ как умножение на -1 . Далее, было показано, что среди них нет ни одного, действующего таким же образом в $H_2(N)$. Из этого и следует, что N не является двулистным разветвленным накрытием какой-либо гомологической сферы.

2. Следующая лемма вместе с леммой Фокса позволяет обобщить результаты Фокса и Монтесиноса.

Лемма. Если существует отображение T ориентированного замкнутого n -мерного многообразия N в себя, действующее в $H_i(N)$, $H_j(N)$ и $H_{n-i-j}(N)$ как умножение на -1 , то образ спаривания

$$\circ: H_i(N) \times H_j(N) \longrightarrow H_{n-i-j}(N),$$

определяемого операцией пересечения, состоит из элементов порядка ≤ 2 .

Действительно, пусть $x \in H_i(N)$, $y \in H_j(N)$. Тогда $T_*(x \circ y) = T_*(x) \circ T_*(y) = (-x) \circ (-y) = x \circ y$. С другой стороны,

$T_*(x \circ y) = -x \circ y$. Следовательно, $2(x \circ y) = 0$.

3. Теорема. Если ориентированное замкнутое связное n -мерное многообразие N является двулистным разветвленным накрытием какой-либо гомологической сферы, то для любых $i, j > 0$ с $i+j < n$ образ спаривания

$$\circ: H_i(N) \times H_j(N) \longrightarrow H_{n-i-j}(N)$$

состоит из элементов порядка ≤ 2 .

Следствие. Если N — такое ориентированное замкнутое связное трехмерное многообразие, что образ спаривания

$$\circ: H_2(N) \times H_2(N) \longrightarrow H_1(N)$$

содержит элемент порядка > 2 , то N нельзя представить в виде двудлистного разветвленного накрывающего сферы.

4. Результаты предыдущего пункта указывают на необходимые условия симметрической обратимости зацепления:

Если зацепление (S^3, Σ) симметрически обратимо, и N — результат любой перестройки вдоль (S^3, Σ) , то образ спаривания $\circ: H_2(N) \times H_2(N) \rightarrow H_1(N)$ состоит из элементов порядка ≤ 2 .

Это следует из теоремы 5.5 и результатов предыдущего пункта.

5. В п.4.2 отмечалось, что из симметрической обратимости зацепления следует его обратимость. Поэтому естественно возникает вопрос: обратимы ли зацепления, которые в силу результатов предыдущего пункта не являются симметрически обратимыми, т.е. являются ли препятствия к симметрической обратимости, указанные в предыдущем пункте, препятствиями к обратимости. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Если зацепление (S^3, Σ) обратимо и N — результат какой-нибудь перестройки вдоль (S^3, Σ) , то образ спаривания $\circ: H_2(N) \times H_2(N) \rightarrow H_1(N)$ состоит из элементов порядка ≤ 2 .

Доказательство. В силу обратимости, существует гомеоморфизм $h: (S^3, \Sigma) \rightarrow (S^3, \Sigma)$, который обращает ориентацию Σ и сохраняет ориентацию S^3 . Гомеоморфизм h индуцирует гомеоморфизм $\bar{h}: N \rightarrow N$. Гомоморфизмы точных последовательностей

$$H_1(S^3 \setminus \Sigma) \longrightarrow H_1(N) \longrightarrow 0$$

и

$$0 \longrightarrow H_2(N) \longrightarrow H_2(S^3, \Sigma)$$

перестановочны с действием гомеоморфизмов h и \bar{h} . Из этого следует, что действие \bar{h} в $H_1(N)$ и $H_2(N)$ определяется действием h в $H_1(S^3 \setminus \Sigma)$ и $H_2(S^3, \Sigma)$, совпадающим, очевидно, с умножением на -1 . Поэтому \bar{h} действует в $H_1(N)$ и $H_2(N)$ как умножение на -1 , и (в силу леммы п.2) образ спаривания $\circ: H_2(N) \times H_2(N) \longrightarrow H_1(N)$ состоит из элементов порядка ≤ 2 .

6. Пример. В результате перестройки вдоль колец Барромео

(см. рис. I4) можно получить тор $S^1 \times S^1 \times S^1$, и потому кольца Барромео - необратимое зацепление.

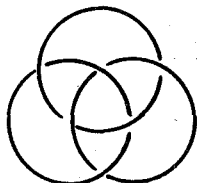


Рис. I4.

7. Если зацепления (S^3, Σ) , $(S^3, \Sigma)'$ гомотопны (в смысле Милнора [8]), то для каждой перестройки вдоль (S^3, Σ) существует такая перестройка вдоль $(S^3, \Sigma)'$, что результаты N, N' этих перестроек имеют изоморфные когомологические кольца $H^*(N)$, $H^*(N')$ (в частности, образы спариваний $\circ: H_2(N) \times H_2(N) \rightarrow H_1(N)$ и $\circ: H_2(N') \times H_2(N') \rightarrow H_1(N')$ изоморфны).

Опираясь на это легко устанавливаемое свойство перестроек, можно по известным зацеплениям, являющимся необратимыми в силу результата п.5, строить другие необратимые зацепления. Попутно получатся и трехмерные многообразия (результаты перестроек вдоль этих зацеплений), которые нельзя представить в виде двулистных разветвленных накрывающих сферы.

8. Любопытно, что необратимость колец Барромео можно доказать также при помощи инварианта Милнора $\mu(1,2,3)$; см [8]. В этом случае $\mu(1,2,3)$ является инвариантом класса гомотопных зацеплений. По-видимому, это указывает на некоторую связь между гомотопическими инвариантами зацепления, введенными Милнором в [8] и [9], и когомологическими кольцами многообразий, получающихся в результате перестроек вдоль этого зацепления.

Добавление 2. Неприводимость двулистных разветвленных накрытий сферы

Для того, чтобы зацепление было неприводимым, необходимо и достаточно, чтобы его двулистное разветвленное накрывающее было неприводимым.

Достаточность вытекает из следующего очевидного свойства двулистных разветвленных накрытий: двулистное разветвленное накрывающее связной суммы двух зацеплений гомеоморфно связно сумме двулистных разветвленных накрывающих этих зацеплений (ср. [19, п.3.7]).

Доказательство необходимости гораздо сложнее, оно напоминает доказательство теоремы 5.2. Автор предполагает изложить его в другой статье.

Литература

1. J.W.Alexander, Note on Riemann spaces, Bull.Amer.Math.Soc. 26 (1919), 370-372.
2. J.S.Birman, H.M.Hilden, The homeomorphism problem for S^3 ,
будет напечатано Bull.Amer.Math.Soc.
3. Р.Н.Фокс, Краткий экскурс в теорию узлов, Приложение I к книге Р.Кроуэлла и Р.Фокса Введение в теорию узлов, М., Мир, 1967.
4. R.H.Fox, A note on branched cyclic coverings of spheres, Revista Math.Hisp.-Amer. 32:4-5 (1972), 158-166.
5. C.H.Giffen, The generalized Smith conjecture, Amer.J.Math. 88:1 (1966), 187-198.
6. W.Haken, Theorie der Normalflächen, Acta Math. 105 (1961), 245-375.
7. W.B.R.Lickorish, A finite set of generators for the homotopy group of a 2-manifold, Proc.Cambridge Philos. Soc. 60:4 (1964), 769-778.
8. J.W.Milnor, Link groups, Ann.Math. 59 (1954), 171-195.
9. J.W.Milnor, Isotopy of links, Algebraic geometry and topology, Symp. in honor of S.Lefschetz, Princeton Univ. Press N.J. 1957, 280-306.
10. J.M.Montesinos, Reduction de la conjetura de Poincare a otras conjeturas geometricas, Revista Math.Hisp.-Amer. 32:1-2 (1972), 33-51.
11. J.M.Montesinos, Una familia infinita de nudos representados no separables, будет напечатано в Revista Math. Hisp.-Amer.
12. K.Reidemeister, Knotentheorie, Ergebnisse der Math. und ih-
13. H.Schubert, Bestimmung der Primfaktorzerlegung von Verkettungen, Math.Z 76 (1961), 116-148.
14. H.Schubert, Knoten mit zwei Brucken, Math.Z. 65 (1956), 133-170.
15. А.М.Виноградов, М.С.Кушельман, Обобщенная гипотеза Смита в размерности четыре, Сиб. мат. ж. 13:1 (1972), 52-62.
16. О.Я.Виро, Зацепления, двулистные разветвленные накрытия и косы, Матем. сб, 87(129), № 2 (1972), 216-228.
17. О.Я.Виро, Разветвленные накрытия многообразий с краем и инварианты зацеплений. I, будет напечатано в Изв. АН СССР, Сер. матем.
18. F.Waldhausen, Über Involuntionen der 3-Sphäre, Topology 8:1 (1969), 81-92.
19. E.C.Zeeman, Twisting spun knots, Trans.Amer.Math.Soc. 115 (1965), 471-495.