

УДК 513.836

Зацепления, двулистные разветвленные накрытия и косы

О. Я. Виро (Ленинград)

§ 1. Введение

1.1. Формулировка основных результатов. Основными результатами настоящей работы являются следующие теоремы 1 и 2.

Теорема 1. *Для всякого замкнутого связного ориентируемого трехмерного pl -многообразия M рода $g(M) \leq 2$ существует такое кусочно-линейное зацепление L в S^3 , что M pl -гомеоморфно двулистному разветвленному накрывающему сферы S^3 с ветвлением вдоль L .*

Обозначим через T_g замкнутую ориентируемую поверхность рода g .

Теорема 2. *Для всякого замкнутого связного ориентируемого трехмерного pl -многообразия M , расслаивающегося над окружностью со слоем T_g рода $g \leq 2$, существует такое замкнутое одномерное pl -подмногообразие L многообразия $S^2 \times S^1$, что M pl -гомеоморфно двулистному разветвленному накрывающему многообразия $S^2 \times S^1$ с ветвлением вдоль L .*

Эти теоремы будут доказаны в § 3. Их доказательства основаны на проведенном в § 2 изучении естественных гомоморфизмов групп кос в группы гомотопий двулистных разветвленных накрывающих двумерной сферы. Эти гомоморфизмы по другому поводу были построены в работах Бергау и Меннике [2] и Бирмана [3].

З а м е ч а н и е 1. Шуберт [10] показал, что для всякого замкнутого связного ориентируемого трехмерного pl -многообразия M рода $g(M) \leq 1$ существует такое кусочно-линейное зацепление L в S^3 , что M pl -гомеоморфно двулистному разветвленному накрывающему сферы S^3 с ветвлением вдоль L . Таким образом, теорема 1 является непосредственным обобщением этого результата. Возможности других обобщений результатов Шуберта [10] будут обсуждены в п. 3.6.

З а м е ч а н и е 2. Если $\pi : M \rightarrow N$ — двулистное разветвленное накрытие, то единственный нетривиальный автоморфизм $J : M \rightarrow M$ этого накрытия (т. е. такой pl -гомеоморфизм, что $\pi \circ J = \pi$) является инволюцией с пространством орбит M/J , pl -гомеоморфным N . Отсюда видно, что ниже следующие утверждения являются следствиями основных теорем.

С л е д с т в и е теоремы 1. *На всяком замкнутом связном ориентируемом трехмерном pl -многообразии M рода $g(M) \leq 2$ существует pl -инволюция $J : M \rightarrow M$ с пространством орбит M/J , pl -гомеоморфным сфере S^3 .*

С л е д с т в и е теоремы 2. *На всяком замкнутом связном ориентируемом трехмерном pl -многообразии M , расслаивающемся над окруж-*

ностью со слоем T_g рода $g \leq 2$, существует pl -инволюция $J : M \rightarrow M$ с пространством орбит M/J , pl -гомеоморфным многообразию $S^2 \times S^1$.

1.2. Обозначения. В настоящей работе все многообразия, их подмногообразия и отображения *кусочно-линейны*. Кроме того, если не оговорено противное, под зацеплением мы будем понимать замкнутое одномерное pl -подмногообразие сферы S^3 , под накрытием зацепления — двулистное разветвленное накрытие сферы S^3 с ветвлением вдоль этого зацепления. Мы будем употреблять одинаковые обозначения для зацепления и класса гомеоморфных ему зацеплений и для многообразия и класса гомеоморфных ему многообразий.

Значок \cong будет обозначать, в зависимости от контекста, pl -гомеоморфизм или групповой изоморфизм. Множество классов гомеоморфных связных замкнутых ориентируемых трехмерных многообразий рода, не большего g , будет обозначаться через \mathfrak{M}_g ; множество классов эквивалентных регулярных n -листных накрытий пространства X — через $\text{Cov}_n(X)$; множество замкнутых одномерных pl -подмногообразий многообразия N — через $\mathfrak{L}(N)$; ориентируемая замкнутая поверхность рода g — через T_g ; трехмерное тело с g ручками — через D_g .

1.3. Двулистные разветвленные накрытия. Пусть M и N — многообразия размерности n и L — локально плоское $(n - 2)$ -мерное подмногообразие многообразия N . Отображение $\pi : M \rightarrow N$ называется двулистным разветвленным накрытием многообразия N с ветвлением вдоль L , если $\pi|_{M \setminus \pi^{-1}(L)} : M \setminus \pi^{-1}(L) \rightarrow N \setminus L$ — двулистное накрытие, а $\pi|_{\pi^{-1}(L)} : \pi^{-1}(L) \rightarrow L$ — гомеоморфизм. Двулистные разветвленные накрытия $\pi : M \rightarrow N$ и $\pi' : M' \rightarrow N$ называются эквивалентными, если существует такой гомеоморфизм $f : M \rightarrow M'$, что $\pi = \pi' \circ f$.

Множество классов эквивалентных двулистных разветвленных накрытий многообразия N с ветвлением вдоль L обозначим через $\text{Bv cov}_2(N, L)$.

Пусть $(\xi : X \rightarrow N \setminus L) \in \text{Cov}_2(N \setminus L)$. Ввиду того, что $\xi : X \rightarrow N \setminus L$ — *двулистное* накрытие, $\xi_*(\pi_1(X))$ — подгруппа индекса 2 группы $\pi_1(N \setminus L)$. Так как гомоморфизм Гуревича h совпадает с коммутированием, а при коммутировании подгруппа индекса 2 переходит в подгруппу индекса 2 и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X) & \xrightarrow{\xi_*} & \pi_1(N \setminus L) \\ h \downarrow & & \downarrow h \\ H_1(X) & \xrightarrow{\xi_{\#}} & H_1(N \setminus L) \end{array}$$

коммутативна, то $h\xi_*(\pi_1(X)) = \xi_{\#}h(\pi_1(X)) = \xi_{\#}(H_1(X))$ — подгруппа индекса 2 группы $H_1(N \setminus L)$. Определим отображение $\chi : \text{Cov}_2(N \setminus L) \rightarrow \text{Hom}(H_1(N \setminus L), \mathbf{Z}_2)$ формулой

$$\chi(\xi)(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha \in \xi_{\#}(H_1(X)), \\ 1, & \text{если } \alpha \notin \xi_{\#}(H_1(X)). \end{cases}$$

Пусть $i^* : \text{Bv cov}_2(N, L) \rightarrow \text{Cov}_2(N \setminus L)$ — естественное отображение, индуцированное включением $i : N \setminus L \hookrightarrow N$. Линк симплекса σ относительно

триангуляции τ мы будем обозначать через $\text{lk}_\tau(\sigma)$. Фиксируем триангуляцию T пары (N, L) ; Пусть T' — ее однократное барицентрическое подразделение. Из каждой компоненты связности L_i многообразия L выберем по $(n-2)$ -мерному симплексу Σ_i триангуляции T' .

Классификационная теорема. *Обращение*

$$\chi' = \chi \circ i^* : \text{Cov}_2(N, L) \rightarrow \text{Hom}(H_1(N \setminus L), \mathbf{Z}_2)$$

инъективно. Если $L \subset \text{Int}(N)$, то для того чтобы гомоморфизм $f: H_1(N \setminus L) \rightarrow \mathbf{Z}_2$ принадлежал образу отображения χ' , необходимо и достаточно, чтобы гомологические классы α_i циклов $\text{lk}_{T'}(\Sigma_i)$ не принадлежали $\text{Ker}(f)$.

Доказательство. Инъективность отображения χ' . Как уже было показано, $h\zeta_*(\pi_1(X)) = \zeta_*(H_1(X))$, поэтому $h^{-1}\zeta_*(H_1(X)) = h^{-1}h\zeta_*(\pi_1(X)) \supset \zeta_*(\pi_1(X))$. Так как $\zeta_*(H_1(X)) \neq H_1(N \setminus L)$ и h — эпиморфизм, то $h^{-1}\zeta_*(H_1(X)) \neq \pi_1(N \setminus L)$. Так как $\zeta_*(\pi_1(X))$ — подгруппа индекса 2, то $\zeta_*(\pi_1(X))$ — максимальная подгруппа, и, следовательно $h^{-1}\zeta_*(H_1(X)) = \zeta_*(\pi_1(X))$. Итак, $\zeta_*(\pi_1(X))$ полностью определяется подгруппой $\zeta_*(H_1(X)) = \text{Ker} \chi(\zeta)$. Следовательно, $\chi(\zeta)$ с точностью до изоморфизма определяет накрытие $\zeta: X \rightarrow N \setminus L$, т. е. χ инъективно. Кроме того, как показал Фокс (см. [6], § 3, теорема единственности), отображение i^* инъективно. Отсюда следует, что $\chi' = \chi \circ i^*$ инъективно.

Необходимость условия $\alpha_i \notin \text{Ker}(f)$. Пусть $f = \chi'(\pi: M \rightarrow N)$. Как легко показать (см., например, [6], § 6), на M существует такая триангуляция \tilde{T} , что $\pi: M \rightarrow N$ симплицально относительно \tilde{T} и T' и не вырождено на каждом симплексе. Так как замыкание симплексов, принадлежащих $\text{st}_{T'}(\Sigma_i)$, пересекаются с L только по Σ_i , прообраз замыкания каждого симплекса из $\text{st}_{T'}(\Sigma_i)$ состоит из двух замкнутых симплексов, пересекающихся по $\pi^{-1}(\Sigma_i)$. Отсюда следует, что $\pi^{-1}(\text{lk}_{T'}(\Sigma_i)) = \text{lk}_{\tilde{T}}(\pi^{-1}(\Sigma_i)) \cong \cong S^1$. Таким образом, $\pi|_{\pi^{-1}(\text{lk}_{T'}(\Sigma_i))}: \pi^{-1}(\text{lk}_{T'}(\Sigma_i)) \rightarrow \text{lk}_{T'}(\Sigma_i)$ — нетривиальное двулистное накрытие и класс α_i цикла $\text{lk}_{T'}(\Sigma_i)$ не принадлежит $\text{Im}(\pi|_{M \setminus \pi^{-1}(L)})_{\#} = \text{Ker}(f)$.

Сюръективность отображения χ . Пусть $f \in \text{Hom}(H_1(N \setminus L), \mathbf{Z}_2)$ и пусть $\zeta: X \rightarrow N \setminus L$ — накрытие, соответствующее подгруппе $h^{-1}(\text{Ker}(f)) \subset \subset \pi_1(N \setminus L)$ (т. е. $h^{-1}(\text{Ker}(f)) = \zeta_*(\pi_1(X))$). Тогда $\zeta_*(H_1(X)) = h\zeta_*(\pi_1(X)) = hh^{-1}(\text{Ker}(f)) = \text{Ker}(f)$, поэтому $f = \chi(\zeta)$.

Достаточность условия $\alpha_i \notin \text{Ker}(f)$. Пусть $\alpha \notin \text{Ker}(f: H_1(N \setminus L) \rightarrow \mathbf{Z}_2)$ и пусть $(\zeta: X \rightarrow N \setminus L) = \chi^{-1}(f) \in \text{Cov}_2(N \setminus L)$. Из теоремы существования разветвленных накрытий (см. [6], § 2) следует, что ζ можно продолжить до отображения $\pi: M \rightarrow N$. Кроме того, как следует из результатов § 3 и § 6 той же статьи [6], M — многообразие, $\pi: M \rightarrow N$ — двулистное разветвленное накрытие с ветвлением вдоль $L' \subset L$ и на M существует такая триангуляция \tilde{T} , что $\pi: M \rightarrow N$ симплицально относительно \tilde{T} и T' и не вырождено на каждом симплексе. Допустим, что $\pi^{-1}(\Sigma_i)$ состоит из двух симплексов, т. е. $\Sigma_i \not\subset L'$. Так как $\overline{\text{st}_{T'}(\Sigma_i)}$ односвязно и лежит в $N \setminus L'$, накрытие $\pi|_{\pi^{-1}(\overline{\text{st}_{T'}(\Sigma_i)})}: \pi^{-1}(\overline{\text{st}_{T'}(\Sigma_i)}) \rightarrow \overline{\text{st}_{T'}(\Sigma_i)}$ тривиально, и класс α_i цикла $\text{lk}_{T'}(\Sigma_i)$ принадлежит $\text{Im}(\zeta_{\#}) = \text{Ker}(f)$, что противоречит исходному предположению

Следовательно, $\Sigma_i \subset L'$, а так как классы циклов $\text{lk}_{T'}(\Sigma_i)$ не зависят от выбора Σ_i , то $L \subset L'$, т. е. $(\pi: M \rightarrow N) \in \text{Brcov}_2(N, L)$. Очевидно, $\chi'(\pi) = f$.

1.4. Накрытия зацеплений. В случае $N = S^3$ из двойственности Александера следует, что классы циклов $\text{lk}_{T'}(\Sigma_i)$ образуют базис свободной абелевой группы $H_1(S^3 \setminus L)$. Следовательно, для всякого $L \in \mathcal{L}(S^3)$ существует единственное двулистное разветвленное накрытие с ветвлением вдоль L .

Автор благодарит В. А. Рохлина за большую помощь, а также Я. М. Элиашберга, В. М. Цветкова и С. А. Попова за ряд ценных советов.

§ 2. Действие группы кос на двулистном накрывающем сферы S^2

В этом параграфе будут изложены определения и результаты теории кос, которые понадобятся в дальнейшем, и построены вышеупомянутые гомоморфизмы групп кос в группы гомотопий замкнутых поверхностей.

2.1. Группы кос. Пусть M — связное многообразие. Обозначим через $F_n M$ подпространство n -й декартовой степени многообразия M , состоящее из последовательностей $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M \times M \times \dots \times M$ с $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$. В $F_n M$ естественно действует симметрическая группа \mathfrak{S}_n . Пространство орбит этого действия обозначим через $B_n M$. Его можно интерпретировать как совокупность n -элементных подмножеств многообразия M ; естественная проекция $F_n M \rightarrow B_n M$ переводит последовательность $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F_n M$ в множество $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in B_n M$. Группа $\pi_1(B_n M)$ называется группой n -кос (кос из n нитей) многообразия M , а элементы этой группы — n -косами (косами из n нитей) многообразия M .

2.2. Геометрические косы. Геометрической n -косой многообразия M называется семейство вложений $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ отрезка I в $M \times I$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $b_k(t) \in M \times \{t\}$ для $t \in I$, $k = 1, 2, \dots, n$;
- 2) $b_k(0) = (p_k, 0)$ для $k = 1, 2, \dots, n$;
- 3) $\{b_1(1), b_2(1), \dots, b_n(1)\} = \{(p_1, 1), (p_2, 1), \dots, (p_n, 1)\}$;
- 4) если $i \neq j$, то $b_i(t) \neq b_j(t)$ для $t \in I$.

В множестве геометрических n -кос введем отношение эквивалентности: геометрические n -косы b и b' эквивалентны, если существует семейство изотопий $B_k: I \times I \rightarrow M \times I$ ($k = 1, 2, \dots, n$), для которых $B_k|I \times \{0\} = b_k$, $B_k|I \times \{1\} = b'_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$) и семейство отображений $\{B_1|I \times \{\tau\}, B_2|I \times \{\tau\}, \dots, B_n|I \times \{\tau\}\}$ является геометрической n -косой при любом фиксированном $\tau \in I$.

2.3. Связь между косами и геометрическими косами. Так как $B_n M$ есть совокупность n -элементных подмножеств многообразия M , то всякая петля a на $B_n M$ с началом $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ определяет семейство путей $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $a_k(0) = p_k$ ($k = 1, 2, \dots, n$);
- 2) $\{a_1(1), a_2(1), \dots, a_n(1)\} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$;
- 3) если $i \neq j$, то $a_i(t) \neq a_j(t)$ для $t \in I$.

Определим отображение множества петель пространства $B_n M$ с началом $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ на множество геометрических n -кос многообразия M , отнеся петле a геометрическую n -косу b , задаваемую формулой $b_k(t) = (a_k(t), t)$. Легко видеть, что это отображение биективно и две петли гомотопны тогда и только тогда, когда их образы эквивалентны. Следовательно, оно индуцирует биективное отображение группы $\pi_1(B_n M, \{p_1, p_2, \dots, p_n\})$ на множество классов эквивалентных геометрических n -кос многообразия M .

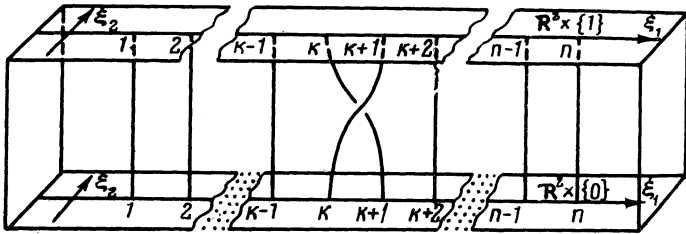


Рис. 1

2.4. Группы кос плоскости. Фокс и Нойвирт [7] доказали, что группа $\pi_1(B_n \mathbb{R}^2)$ канонически изоморфна классической группе n -кос Артина с образующими $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ и определяющими соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad (i=1, 2, \dots, n-2); \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i \quad (i, j=1, 2, \dots, n-1; |i-j| > 1) \end{aligned} *$$

Геометрическая n -коса, соответствующая образующей σ_k , показана на рис. 1.

2.5. Группы классов преобразований. Пусть $\mathfrak{B}_n M = \mathfrak{B}_n(M, p_1, p_2, \dots, p_n)$ — наделенная компактно-открытой топологией группа гомеоморфизмов $f: M \rightarrow M$, которые удовлетворяют условию $f(\{p_1, p_2, \dots, p_n\}) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$; в частности, $\mathfrak{B}_0 M$ — группа всех гомеоморфизмов многообразия M . Группу $\pi_0(\mathfrak{B}_n M)$ называют n -й группой классов преобразований многообразия M . Группу $\pi_0(\mathfrak{B}_0 M)$ называют также (см. [8]) группой гомеотопий многообразия M .

2.6. Расслоение Бирмана. Определим отображение $e: \mathfrak{B}_0 M \rightarrow B_n M$ формулой $e(f) = \{f(p_1), f(p_2), \dots, f(p_n)\}$. Бирман [4] доказал, что $e: \mathfrak{B}_0 M \rightarrow B_n M$ — расслоение в смысле Серра со слоем $\mathfrak{B}_n M$. Пусть $\hat{\mathfrak{B}}_n M$ — подгруппа группы $\mathfrak{B}_n M$, состоящая из сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов. Ясно, что $\hat{\mathfrak{B}}_0 M$ состоит из целых компонент связности группы $\mathfrak{B}_0 M$, и поэтому $\hat{e} = e|_{\hat{\mathfrak{B}}_0 M}: \hat{\mathfrak{B}}_0 M \rightarrow B_n M$ — тоже расслоение в смысле Серра.

2.7. Разветвленные накрытия шара и сферы. Пусть p_0 — северный полюс сферы S^2 , а $j: S^2 \setminus \{p_0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ — стереографическая

* Другое доказательство см. в [5].

проекция. Обозначим через p_k точки $j^{-1}((k, 0))$ для $k=1, 2, \dots$, а через I_k — такие прямолинейные отрезки в D^3 , что $\partial I_k = \{p_{2k-1}, p_{2k}\} \subset \partial D^3 = S^2$.

Определим отображение $q: \mathbf{R}^1 \times \mathbf{C}^1 \rightarrow \mathbf{R}^1 \times \mathbf{C}^1$ формулой $q((x, z)) = (x, z^2)$. Это — двулистное разветвленное накрытие пространства $\mathbf{R}^3 = \mathbf{R}^1 \times \mathbf{C}^1$ с ветвлением вдоль $\mathbf{R}^1 \times \{0\}$. Расположим тело D_g в $\mathbf{R}^1 \times \mathbf{C}^1$ так, чтобы прямая $\mathbf{R}^1 \times \{0\}$ была его осью симметрии и пересекалась с ним по $g+1$ отрезкам (см. рис. 2). Очевидно, пары $(q(D_g), q(D_g) \cap (\mathbf{R}^1 \times \{0\}))$ и $(D^3, \bigcup_{k=1}^{g+1} I_k)$ гомеоморфны. Фиксируем гомеомор-

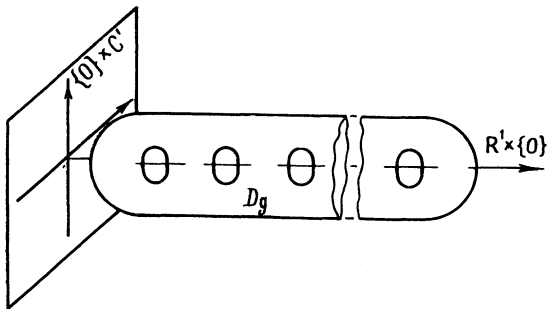


Рис. 2

физм $G_g: (q(D_g), q(D_g) \cap (\mathbf{R}^1 \times \{0\})) \rightarrow (D^3, \bigcup_{k=1}^{g+1} I_k)$. Определим отображения $\rho_g: D_g \rightarrow D^3$ и $\tau_g: T_g \rightarrow S^2$ формулами $\rho_g(x) = G_g(q(x))$ и $\tau_g(x) = \rho_g(x)$. Отображение $\rho_g: D_g \rightarrow D^3$ — двулистное разветвленное накрытие шара D^3 с ветвлением вдоль $\bigcup_{k=1}^{g+1} I_k$, а $\tau_g: T_g \rightarrow S^2$ — двулистное разветвленное накрытие сферы S^2 с ветвлением вдоль $\{p_1, p_2, \dots, p_{2g+2}\}$.

2.8. Г о м о м о р ф и з м v_g . Определим отображение

$\theta: \mathfrak{B}_{2g+2}(\mathbf{R}^2, (1, 0), (2, 0), \dots, (2g+2, 0)) \rightarrow \mathfrak{B}_{2g+3}(S^2, p_0, p_1, \dots, p_{2g+2})$ формулой

$$\theta(f)(x) = \begin{cases} x & , \text{ если } x = p_0, \\ j^{-1}fj(x) & , \text{ если } x \neq p_0. \end{cases}$$

Аutomорфизм группы $\pi_1(S^2 \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_{2g+2}\}, p_0)$, индуцированный гомеоморфизмом $\theta(f) | S^2 \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_{2g+2}\}$, переводит подгруппу накрытия $i^*(\tau_g): T_g \setminus \bigcup_{k=1}^{2g+2} \tau_g^{-1}(p_k) \rightarrow S^2 \setminus \bigcup_{k=1}^{2g+2} \{p_k\}$ в себя. Поэтому существует единственный гомеоморфизм поверхности T_g , тождественный на $\tau_g^{-1}(p_0)$, который накрывает гомеоморфизм $\theta(f)$. Определим отображение

$$v_g: \mathfrak{B}_{2g+2}(\mathbf{R}^2, (1, 0), (2, 0), \dots, (2g+2, 0)) \rightarrow \mathfrak{B}_0 T_g,$$

отнеся гомеоморфизму f тождественный на $\tau_g^{-1}(p_0)$ гомеоморфизм $v_g(f): T_g \rightarrow T_g$, накрывающий гомеоморфизм $\theta(f)$. Очевидно, v_g — гомоморфизм.

2.9. Скручивания. Пусть K — кольцо на плоскости, заданное в полярных координатах (r, θ) неравенством $1 \leq r \leq 2$. Определим гомеоморфизм $h: K \rightarrow K$ формулой $h(r, \theta) = (r, \theta - 2\pi r)$. Пусть c — простая замкнутая кривая на поверхности P и пусть $i: K \rightarrow P$ — вложение, переводящее кривую $r=1,5$ в c . Гомеоморфизм $h_c, i: P \rightarrow P$, определенный

формулой

$$h_{c,i}(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in P \setminus i(K), \\ ih_i^{-1}(x), & \text{если } x \in i(K), \end{cases}$$

называется скручиванием поверхности P вдоль кривой c . Нетрудно показать, что всякое скручивание вдоль c изотопно $h_{c,i}$ или $h_{c,i}^{-1}$.

2.10. Гомоморфизм β_g . Определим гомоморфизм

$$\beta_g : \pi_1(B_{2g+2}\mathbf{R}^2, \{(1, 0), (2, 0), \dots, (2g+2, 0)\}) \rightarrow \pi_0(\hat{\mathfrak{B}}_0 T_g)$$

как композицию гомоморфизмов

$$\begin{aligned} & \pi_1(B_{2g+2}\mathbf{R}^2, \{(1, 0), (2, 0), \dots, (2g+2, 0)\}) \xrightarrow{\partial} \\ & \xrightarrow{\partial} \pi_0(\hat{\mathfrak{B}}_{2g+2}(\mathbf{R}^2, (1, 0), (2, 0), \dots, (2g+2, 0))) \xrightarrow{\nu_{g*}} \pi_0(\hat{\mathfrak{B}}_0 T_g), \end{aligned}$$

где ∂ — граничный гомоморфизм гомотопической последовательности расслоения $\hat{e} : \hat{\mathfrak{B}}_0 \mathbf{R}^2 \rightarrow B_{2g+2}\mathbf{R}^2$.

2.11. Вычисление $\text{Im } \beta_g$. Пусть d_k — дуга на S^2 , стереографическая проекция которой является отрезком, соединяющим точки $(k, 0)$ и $(k+1, 0)$.

При $k=1, 2, \dots, 2g+1$ существует гомеоморфизм $h_k \in \beta_g(\sigma_k)$, являющийся скручиванием поверхности T_g вдоль $\tau_g^{-1}(d_k)$.

Доказательство. Согласно определению граничного гомоморфизма гомотопической последовательности расслоения, $h_k \in \partial(\sigma_k)$, если существует изотопия $H_{k,t} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, удовлетворяющая следующим условиям:

- 1) $H_{k,0} = 1, 2) H_{k,1} = h_k, 3)$ изотопия

$$H_{k,t} | \{(1, 0), (2, 0), \dots, (2g+2, 0)\} : \{(1, 0), (2, 0), \dots, (2g+2, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}^2$$

определяет петлю-представителя $(2g+2)$ -косы σ_k . Легко видеть, что изотопию $H_{k,t} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ можно выбрать так, чтобы она была тождественной вне малой окрестности V отрезка $[(k, 0), (k+1, 0)]$ и поворачивала этот отрезок внутри V на угол π против часовой стрелки.

Обозначим через l' прямую на \mathbf{R}^2 , заданную уравнением $\xi_1 = k + 0, 5$. Положим $U = j^{-1}(V)$ и $l = U \cap j^{-1}(l')$. Пусть \tilde{l} — одна из компонент связности множества $\tau_g^{-1}(l)$. При описанном выше выборе изотопии $H_{k,t} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ кривая $\theta(h_k)(l) = \theta(H_{k,1})(l)$ расположена так, как показано на рис. 3. Так как гомеоморфизм $\nu_g(h_k)$ покрывает $\theta(h_k)$, то кривая $\nu_g(h_k)(l)$ покрывает кривую $\theta(h_k)(l)$. Из рис. 3 видно, что $\nu_g(h_k)$ действует на \tilde{l} как скручивание вдоль $\tau_g^{-1}(d_k)$. Итак, $\nu_g(h_k)$ совпадает со скручиванием вдоль $\tau_g^{-1}(d_k)$ на $T_g \setminus \tau_g^{-1}(U)$ (где оба — тождественные отображения) и на \tilde{l} . Но $T_g \setminus ((T_g \setminus \tau_g^{-1}(U)) \cup \tilde{l}) = \tau_g^{-1}(U) \setminus \tilde{l} \cong \text{Int } D^2$. Отсюда, в силу теоремы Александера [1], следует, что $\nu_g(h_k)$ изотопно скручиванию вдоль $\tau_g^{-1}(d_k)$. С другой стороны, $\nu_g(h_k) \in \nu_{g*} \circ \partial(\sigma_k) = \beta_g(\sigma_k)$.

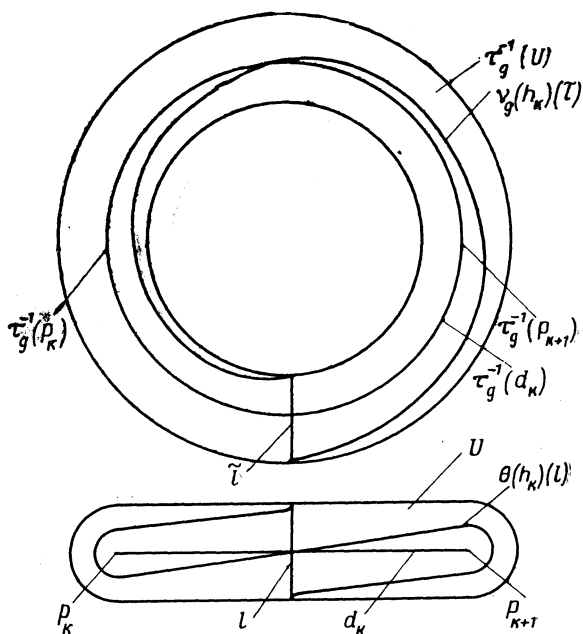
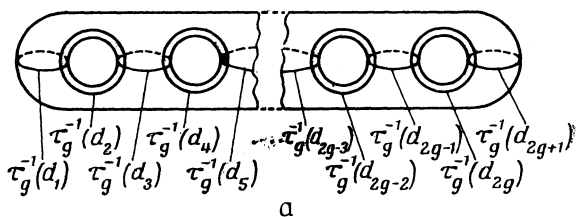


Рис. 3



а

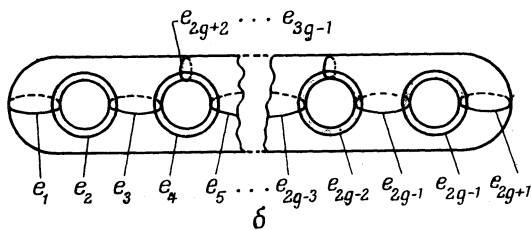


Рис. 4

Из доказанного следует, что подгруппа $\text{Im } \beta_g \subset \pi_0(\hat{\mathfrak{B}}_0 T_g)$ порождается классами скручиваний вдоль кривых $\tau_g^{-1}(d_k)$, $k = 1, 2, \dots, 2g + 1$. Эти кривые показаны на рис. 4а.

2.12. С л у ч а й $g \leq 2$. Ликориш [8] нашел систему образующих группы $\pi_0(\hat{\mathfrak{B}}_0 T_g)$. Эта система состоит из классов скручиваний вдоль кривых e_k , $k = 1, 2, \dots, 3g - 1$ (см. рис. 4б). Сравнивая рисунки 4а и 4б, мы видим, что в случае $g \leq 2$ множество кривых e_k содержится в множестве кривых $\tau_g^{-1}(d_k)$. Следовательно, гомоморфизмы $\beta_g : \pi_1(B_{2g+2} \mathbb{R}^2) \rightarrow \pi_0(\hat{\mathfrak{B}}_0 T_g)$ при $g \leq 2$ сюръективны.

§ 3. Доказательство основных теорем

3.1. Отображение λ_g . Склеим две копии шара D^3 по $\partial D^3 = S^2$ при помощи $f \in \widehat{\mathfrak{B}}_{2g+2}(S^2, p_1, p_2, \dots, p_{2g+2})$. Полученное многообразие $D^3 \cup_f D^3$ гомеоморфно сфере S^3 , а отрезки I_1, I_2, \dots, I_{g+1} (см. п. 2.7) образуют зацепление. Очевидно, класс этого зацепления зависит только от элемента группы $\pi_0(\widehat{\mathfrak{B}}_{2g+2}(S^2, p_1, p_2, \dots, p_{2g+2}))$, содержащего гомеоморфизм f . Тем самым определено отображение

$$\gamma_g : \pi_0(\widehat{\mathfrak{B}}_{2g+2}S^2) \rightarrow \mathfrak{L}(S^3).$$

Обозначим через \mathfrak{L}_g образ композиции четырех отображений:

$$\begin{aligned} \pi_1(B_{2g+2}\mathbf{R}^2, \{(1, 0), (2, 0), \dots, (2g+2, 0)\}) &\xrightarrow{\partial} \pi_0(\widehat{\mathfrak{B}}_{2g+2}(\mathbf{R}^2, (1, 0), (2, 0), \dots \\ &\dots, (2g+2, 0))) \xrightarrow{\theta_*} \pi_0(\widehat{\mathfrak{B}}_{2g+2}(S^2, p_0, p_1, \dots, p_{2g+2})) \xrightarrow{i_*} \\ &\xrightarrow{i_*} \pi_0(\widehat{\mathfrak{B}}_{2g+2}(S^2, p_1, p_2, \dots, p_{2g+2})) \xrightarrow{\gamma_g} \mathfrak{L}(S^3), \end{aligned}$$

где ∂ и θ — те же, что и в п.п. 2.10 и 2.8 соответственно, а i_* — гомоморфизм включения. Определим отображение

$$\lambda_g : \pi_1(B_{2g+2}\mathbf{R}^2, \{(1, 0), (2, 0), \dots, (2g+2, 0)\}) \rightarrow \mathfrak{L}_g$$

формулой $\lambda_g(\alpha) = \gamma_g \circ i_* \circ \theta_* \circ \partial(\alpha)$.

3.2. Накрывающие зацеплений из \mathfrak{L}_g . Если $\alpha \in \pi_1(B_{2g+2}\mathbf{R}^2)$ и $(p : M \rightarrow S^3) \in \text{Brcov}_2(S^3, \lambda_g(\alpha))$, то многообразие M может быть получено склеиванием из двух тел с g ручками при помощи гомеоморфизма $F \in \beta_g(\alpha)$,

Доказательство. Согласно определению λ_g (см. п. 3.1), $(S^3, \lambda_g(\alpha)) \cong \cong (D^3, \bigcup_{k=1}^{g+1} I_k) \cup_{\theta(f)} (D^3, \bigcup_{k=1}^{g+1} I_k)$, где $f \in \partial(\alpha)$. Пусть $\rho_g : D_g \rightarrow D^3$ — описанное в п. 2.7 накрытие. Очевидно, $(\rho_g \cup \rho_g : D_g \cup_{\nu_g(f)} D_g \rightarrow D^3 \cup_{\theta(f)} D^3) \in \in \text{Brcov}_2(S^3, \lambda_g(\alpha))$. Множество $\text{Brcov}_2(S^3, \lambda_g(\alpha))$ состоит из одного элемента (см. п. 1.4). Поэтому накрытия $\rho_g \cup \rho_g : D_g \cup_{\nu_g(f)} D_g \rightarrow D^3 \cup_{\theta(f)} D^3$ и $p : M \rightarrow S^3$ эквивалентны. Следовательно, многообразия M и $D_g \cup_{\nu_g(f)} D_g$ гомеоморфны. Кроме того, $\nu_g(f) \in \nu_{g*}\partial(\alpha) = \beta_g(\alpha)$.

3.3. Переформулировка. Из предыдущего утверждения следует, что накрывающие зацеплений, принадлежащих \mathfrak{L}_g , принадлежат \mathfrak{M}_g . Следовательно, определено отображение $\kappa_g : \mathfrak{L}_g \rightarrow \mathfrak{M}_g$, которое каждому зацеплению сопоставляет двулистное разветвленное накрывающее этого зацепления. Определим отображение $\mu_g : \pi_0(\widehat{\mathfrak{B}}_0 T_g) \rightarrow \mathfrak{M}_g$, которое каждому классу изотопных гомеоморфизмов поверхности T_g ставит в соответствие многообразие, получающееся в результате склеивания двух копий D_g при помощи одного из гомеоморфизмов этого класса.

Теперь мы можем сформулировать результат предыдущего пункта следующим образом.

Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(B_{2g+2}\mathbf{R}^2) & \xrightarrow{\beta_g} & \pi_0(\widehat{\mathfrak{B}}_0 T_g) \\ \lambda_g \downarrow & & \downarrow \mu_g \\ \mathfrak{Q}_g & \xrightarrow{\kappa_g} & \mathfrak{M}_g \end{array}$$

коммутативна.

3.4. Доказательство теоремы 1. Отображение λ_g сюръективно (см. п. 3.1), поэтому $\kappa_g(\mathfrak{Q}_g) = \kappa_g \lambda_g(\pi_1(B_{2g+2}\mathbf{R}^2)) = \mu_g \beta_g(\pi_1(B_{2g+2}\mathbf{R}^2))$.

Так как всякое многообразие M рода $g(M) \leq g$ может быть склеено из двух копий D_g , то отображения μ_g сюръективны. Кроме того, как показано в п. 2.12, при $g \leq 2$ гомоморфизмы β_g сюръективны. Следовательно, если $g \leq 2$, то

$$\kappa_g(\mathfrak{Q}_g) = \mu_g \beta_g(\pi_1(B_{2g+2}\mathbf{R}^2)) = \mathfrak{M}_g,$$

т. е. всякое замкнутое связное ориентируемое трехмерное pl -многообразие M род $g(M) \leq 2$, pl -гомеоморфно двулистному разветвленному накрывающему зацеплению из $\mathfrak{Q}_{g(M)}$.

3.5. Геометрическое описание отображения λ_g . Пусть A_1 ,

A_2 и A_3 — подмножества единичной сферы S^3 , определяемые в декартовых координатах $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ неравенствами $\xi_4 \leq -\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2} \leq \xi_4 \leq \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2} \leq \xi_4 \leq \xi_4$ соответственно. Определим гомеоморфизмы $\varphi_1: A_1 \rightarrow D^3$ и $\varphi_3: A_3 \rightarrow D^3$

формулами $\varphi_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \frac{\sqrt{3}}{2}(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ ($k = 1, 3$) и гомеоморфизм $\varphi_2: A_2 \rightarrow S^2 \times I$ формулой $\varphi_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\xi_4^2}}(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \xi_4 + \frac{1}{2} \right)$.

Пусть $b = \{b_1, b_2, \dots, b_{2g+2}\}$ — геометрическая коса плоскости \mathbf{R}^2 , соответствующая петле $a = \{a_1, a_2, \dots, a_{2g+2}\}$ косы α (см. п. п. 2.2 и 2.3). Обозначим через $L(b)$ зацепление

$$\left(\bigcup_{k=1}^{2g+2} \varphi_2^{-1} \circ (j \times 1) \circ b_k(I) \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{g+1} \varphi_1^{-1}(I_k) \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{g+1} \varphi_3^{-1}(I_k) \right)$$

(см. рис. 5).

Зацепления $L(b)$ и $\lambda_g(\alpha)$ гомеоморфны.

Доказательство. Пусть $f \in \theta_* \partial(\alpha)$, а $F: D^3 \rightarrow D^3$ — гомеоморфизм, продолжающий $f: S^2 \rightarrow S^2$. Для того чтобы получить пару $(S^3, \lambda_g(\alpha))$, нужно склеить две копии пары $(D^3, \bigcup_{k=1}^{g+1} I_k)$ при помощи гомеоморфизма f . Очевидно, это то же самое, что склеить $(D^3, \bigcup_{k=1}^{g+1} I_k)$ с $(D^3, \bigcup_{k=1}^{g+1} F(I_k))$ при помощи $1: S^2 \rightarrow S^2$.

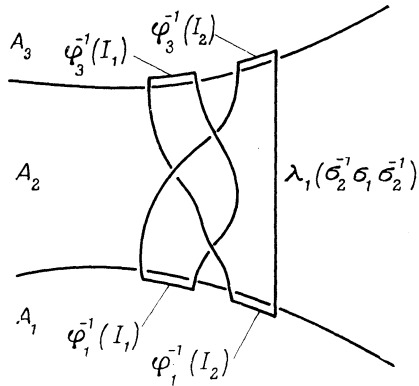


Рис 5

Согласно определению граничного гомоморфизма гомотопической последовательности расслоения, $f \in \theta_* \partial(\alpha)$, если существует изотопия $f_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, удовлетворяющая следующим условиям: 1) $f_0 = 1$, 2) $\theta(f_1) = f$, 3) изотопия $f_t | \{(1, 0), (2, 0), \dots, (2g+2, 0)\} : \{(1, 0), (2, 0), \dots, (2g+2, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ определяет петлю a .

Определим $\Phi : D^3 \rightarrow D^3$ как композицию $\Phi_1 \circ \Phi_2$, где $\Phi_1 : D^2 \rightarrow D^3$ — гомеоморфизм, определенный формулой

$$\Phi_1(x) = \begin{cases} x, & \text{если } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ |x| \theta(f_{2|x|-1}) \left(\frac{x}{|x|} \right), & \text{если } |x| \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

а $\Phi_2 : D^3 \rightarrow D^3$ — тождественный на крае гомоморфизм, переводящий каждый отрезок I_k в трехзвенную ломаную с вершинами $p_{2k-1}, \frac{1}{2} p_{2k-1}, \frac{1}{2} p_{2k}, p_{2k}$ (см. рис. 6). Если $x \in S^2$, то $\Phi(x) = \Phi_1 \Phi_2(x) = \Phi_1(x) = \theta(f_1)(x) = f(x)$. Следовательно, $\Phi : D^3 \rightarrow D^3$ продолжает $f : S^2 \rightarrow S^2$.

Определим гомеоморфизм $\varphi_4 : A_1 \cup A_2 \rightarrow D^3$ формулой

$$\varphi_4(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \Phi_1(x) & , \text{ если } x \in A_1, \\ \frac{1}{2} (1 + pr_I \Phi_2(x)) \cdot pr_{S^2} \Phi_2(x), & \text{ если } x \in A_2, \end{cases}$$

где $pr_I : S^2 \times I \rightarrow I$ и $pr_{S^2} : S^2 \times I \rightarrow S^2$ — естественные проекции. Нетрудно проверить, что $\varphi_4(L(b) \cap (A_1 \cup A_2)) = \bigcup_{k=1}^{g+1} \Phi(I_k)$ и $\varphi_3(L(b) \cap A_3) = \bigcup_{k=1}^{g+1} I_k$.

Но как показано выше, $(S^3, \lambda_g(\alpha)) \cong (D^3, \bigcup_{k=1}^{g+1} I_k) \cup_1 (D^3, \bigcup_{k=1}^{g+1} \Phi(I_k))$. Следова-

тельно, после соответствующего склеивания φ_3 и φ_4 дают гомеоморфизм, переводящий $L(b)$ в $\lambda_g(\alpha)$.

3.6. Связь с проблемами классификации. Райдемайстер (см. [9], стр. 13) описал класс зацеплений, который, как следует из предложения предыдущего пункта, совпадает с \mathfrak{L}_1 . Для обозначения зацеплений этого класса он использовал термин четырехсплетение (Viergeflecht).

Шуберт [11] доказал, что класс

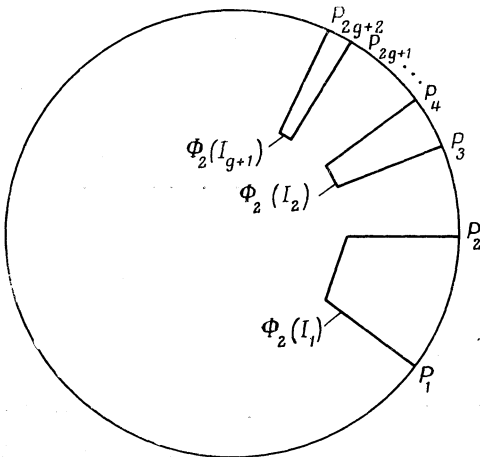


Рис. 6

четырёхсплетений совпадает с классом зацеплений, обладающих диаграммой с двумя переходами — зацеплений с двумя мостами — и дал в [10] полную классификацию этих зацеплений. Из нее, в частности, следует, что отображение $\kappa_1 : \mathfrak{L}_1 \rightarrow \mathfrak{M}_1$ биективно. Теорема 1 настоящей работы

утверждает сюръективность отображения $\kappa_2: \mathfrak{L}_2 \rightarrow \mathfrak{M}_2$. Является ли это отображение инъективным, автору неизвестно. Во всяком случае, представляется весьма вероятным, что проблемы классификации зацеплений из \mathfrak{L}_2 и многообразий из \mathfrak{M}_2 тесно связаны между собой. Отображение $\kappa_3: \mathfrak{L}_3 \rightarrow \mathfrak{M}_3$ уже, по-видимому, не является сюръективным. Автор не знает, существует ли вообще какое-либо зацепление, двулистное разветвленное накрывающее которого гомеоморфно тору $S^1 \times S^1 \times S^1$. В следующем пункте будет приведен пример, показывающий, что отображение κ_3 инъективно.

3.7. Негомеоморфные зацепления с гомеоморфными накрывающими. Накрывающее связной суммы двух зацеплений гомеоморфно связной сумме накрывающих. Действительно, накрывающее двумерной сферы с ветвлением в двух точках есть сфера. Поэтому

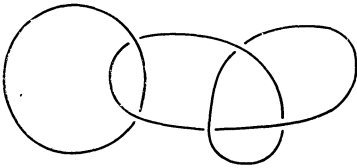


Рис. 7

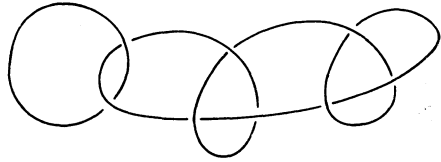
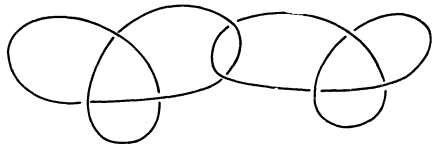


Рис. 8

сфера, разделяющая зацепления, накрывается сферой, которая разбивает накрывающее в связную сумму.

Рассмотрим зацепление, которое показано на рис. 7, и трилистник. Их связную сумму можно построить двумя способами, показанными на рис. 8. Накрывающее и в том и в другом случае гомеоморфно связной сумме $\mathbb{R}P^3 \# L(3, 1) \# L(3, 1)$.

Замечание 1. Аналогичным образом можно показать, что для каждого целого $n \geq 1$ циклические n -листные разветвленные накрывающие зацеплений, показанных на рис. 8, гомеоморфны.

Замечание 2. Зацепления на рис. 8 принадлежат \mathfrak{L}_3 . Аналогичные примеры зацеплений из \mathfrak{L}_2 или неприводимых зацеплений автору неизвестны.

3.8. Отображение η_g . Пусть $\alpha \in \pi_1(B_{2g+2}\mathbb{R}^2, \{(1, 0), (2, 0), \dots, (2g+2, 0)\})$ и $f \in \theta_* \partial(\alpha)$. В результате склеивания компонент края многообразия $S^2 \times I$ при помощи f получится многообразие, гомеоморфное $S^2 \times S^1$, при этом отрезки $\{p_1\} \times I, \{p_2\} \times I, \dots, \{p_{2g+2}\} \times I$ образуют замкнутое одномерное подмногообразие L . Очевидно, тип пары $(S^2 \times S^1, L)$ не зависит от выбора $f \in \theta_* \partial(\alpha)$. Тем самым определено отображение

$$\eta_g: \pi_1(B_{2g+2}\mathbb{R}^2, \{(1, 0), (2, 0), \dots, (2g+2, 0)\}) \rightarrow \mathfrak{L}(S^2 \times S^1).$$

3.9. Отображение ζ_g . Обозначим через \mathfrak{C}_g множество классов гомеоморфных замкнутых ориентируемых связных трехмерных pl -многообразий, расслаивающихся над окружностью со слоем T_g . Определим отображение $\zeta_g: \pi_0(\hat{\mathfrak{B}}_0 T_g) \rightarrow \mathfrak{C}_g$, отнеся классу изотопных гомеоморфизмов поверхности T_g многообразие, получающееся из $T_g \times I$ в результате склеивания компонент края при помощи одного из гомеоморфизмов этого класса.

3.10. Доказательство теоремы 2. Ясно, что многообразие $\zeta_g \beta_g(\alpha)$ гомеоморфно одному из двулистных разветвленных накрывающих многообразия $S^2 \times S^1$ с ветвлением вдоль подмногообразия $\eta_g(\alpha)$. Отображение ζ_g , как видно из его определения, при всяком g сюръективно. В п. 2.12 показано, что β_g сюръективно при $g \leq 2$. Следовательно, любое многообразие из \mathfrak{C}_g с $g \leq 2$ гомеоморфно двулистному разветвленному накрывающему многообразию $S^2 \times S^1$.

3.11. Неориентируемый случай. Обозначим через Q единственное неориентируемое многообразие, расслаивающееся над S^1 со слоем S^2 . При помощи рассуждения, аналогичного приведенному выше доказательству теоремы 2, можно показать, что *всякое замкнутое связное неориентируемое трехмерное pl -многообразие, расслаивающееся над окружностью со слоем T_1 или T_2 , pl -гомеоморфно двулистному разветвленному накрывающему многообразию Q .*

(Поступила в редакцию 24/XI 1970 г. и 11/III 1971 г.)

Литература

1. J. W. Alexander, On the deformation of an n -cell, Proc. Nat. Acad. Sci., USA, **9** (1923), 406—407.
2. F. Bergau, J. Mennicke, Über topologische Abbildungen der Brezelfläche vom Geschlecht 2, Math. Z., **74** (1960), 414—435.
3. J. S. Birman, Automorphisms of the fundamental group of a closed orientable 2-manifold, Proc. Amer. Math. Soc., **21** (1969), 351—354.
4. J. S. Birman, Mapping class groups and their relationship to braid groups, Comm. Pure Appl. Math., **22** (1969), 213—238.
5. E. Fadell, J. van Buskirk, The braid groups of E^2 and S^2 , Duke Math. J., **29** (1962), 243—258.
6. R. H. Fox, Covering spaces with singularities, Leisetz Simposium, Princeton Math. Ser., **12** (1957), 243—257.
7. R. H. Fox, L. Neuwirth, The braid groups, Math. Scand., **10** (1962), 119—126.
8. W. B. R. Lickorish, A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold, Proc. Cambridge Philos. Soc., **60** (1964), 769—778.
9. K. Reidemeister, Knotentheorie, Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgeb., **1** (1932), Berlin.
10. H. Schubert, Knoten mit zwei Brücken, Math. Z., **65** (1956), 133—170.
11. H. Schubert, Über eine numerische Knoteninvariante, Math. Z., **61** (1954), 245—288.