Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Aleksander Doan
Nr albumu: 290720

Rozwłóknienie Milnora i twierdzenie Picarda-Lefschetza

Praca licencjacka
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
dra hab. Marcina Bobieńskiego
Instytut Matematyki UW

Wrzesień 2012

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data | Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data | Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

Praca zawiera systematyczne omówienie dwóch fundamentalnych konceptów teorii osobliwości odwzorowań holomorficznych: rozwłóknienia Milnora oraz zjawiska monodromii. Pierwsza część poświęcona jest równoważnym definicjom rozwłóknienia Milnora oraz topologii włókna, wraz z podstawowymi własnościami liczby Milnora, opisem zaburzenia morse'owskiego, twierdzeniem Milnora-Brieskorna o cyklach znikających i jego demonstracją na przykładzie hipereliptycznym. Następnie przedstawiony zostaje pełny dowód twierdzenia Picarda-Lefschetza oraz jego konsekwencje.

Słowa kluczowe

cykle znikające, monodromia, rozwłóknienie Milnora, twierdzenie Picarda-Lefschetza

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

2010 Mathematics Subject Classification
14D05 – Structure of families (Picard-Lefschetz, monodromy, etc.)
32S30 – Deformations of singularities; vanishing cycles
58K05 – Critical points of functions and mappings
58K10 – Monodromy

Tytuł pracy w języku angielskim

The Milnor fibration and the Picard-Lefschetz theorem

Spis treści

Wprowadzenie

Niniejsza praca poświęcona jest systematycznemu omówieniu podstawowych pojęć i rezultatów teorii osobliwości odwzorowań holomorficznych. Centralnym przedmiotem badań tej teorii są punkty krytyczne funkcji analitycznych wielu zmiennych zespolonych $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, a dokładniej – opis funkcji oraz jej poziomic $f^{-1}(c)$ w otoczeniu takich punktów. Zagadnienia tego typu okazują się niezwykle ciekawe i powiązane z wieloma innymi problemami matematyki, pochodzącymi z geometrii algebraicznej, topologii czy teorii równań różniczkowych.

W pracy omówimy wprowadzone przez J. Milnora w klasycznej pracy [M] niezmienniki stowarzyszone z osobliwością, w tym nazwane później jego imieniem rozwłóknienie. Następnie opiszemy zjawisko monodromii oraz ważne twierdzenie Picarda-Lefschetza, które pozwala powiązać je z innym istotnym niezmiennikiem topologicznym – formą przecięcia.

Zaznaczmy, że będziemy zajmować się wyłącznie izolowanymi punktami osobliwymi. Ponadto, ponieważ interesuje nas zachowanie się funkcji jedynie w pewnym otoczeniu punktu krytycznego, problem można zlokalizować i obiektem naszych badań będą w gruncie rzeczy kiełki funkcji holomorficznych $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to \mathbb{C}$. Wreszcie, wśród wszystkich funkcji analitycznych ograniczymy się do funkcji wielomianowych. Twierdzenie Tougerona (patrz [Ż]) gwarantuje, że w istocie ograniczenie to jest pozorne i w żaden sposób nie zmniejsza ogólności otrzymanych rezultatów.

Należy podkreślić, że wszystkie omówione w niniejszej pracy rezultaty należą obecnie do klasyki dziedziny. Praca Milnora została opublikowana w 1968 r., natomiast wzory Picarda-Lefschetza zostały w dzisiejszej ogólności podane przez Lefschetza już w 1924 r. Tym bardziej interesującym jest fakt, że idee te wciąż są żywe i znajdują zastosowanie w problemach współczesnej matematyki. W 1973 r. P. Deligne i N. Katz zaadaptowali je na potrzeby geometrii nad ciałami charakterystyki dodatniej, a następnie wykorzystali w dowodzie hipotez Weila. Z drugiej strony, pod koniec XX wieku S. K. Donaldson wykorzystał teorię Picarda-Lefschetza oraz tzw. pęki Lefschetza w geometrii symplektycznej. Badania w tej dziedzinie są wciąż prowadzone, lecz omówienie tych rezultatów przekraczałoby zarówno ramy niniejszej pracy, jak i kompetencje autora.

Układ pracy jest następujący: w rozdziale pierwszym przedstawiamy różne definicje rozwłóknienia Milnora i omawiamy związki między nimi. Następnie wprowadzamy pojęcie liczby Milnora punktu krytycznego i dowodzimy najważniejszych jej własności. Dalsza część rozdziału poświęcona jest opisowi grup homologii włókna rozwłóknienia Milnora w terminach cykli znikających. W rozdziale drugim przedstawiony został wraz ze wszystkimi szczegółami dowód twierdzenia Picarda-Lefschetza, poprzedzony niezbędnymi definicjami operatora monodromii oraz innych odwzorowań określonych na grupach homologii włókna Milnora. Rozdział trzeci zawiera podstawowe definicje i twierdzenia z zakresu geometrii algebraicznej i topologii, które zostały istotnie wykorzystane w poprzednich częściach pracy.

Autor pragnie serdecznie podziękować dr. hab. Marcinowi Bobieńskiemu za zainteresowanie, cenne uwagi oraz wszelką okazaną pomoc.

Rozdział 1

Rozwłóknienie Milnora

1.1. Konstrukcje rozwłóknienia Milnora

Niech $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ będzie wielomianem n zmiennych zespolonych. Przedmiotem naszych rozważań będzie hiperpowierzchnia $V = f^{-1}(0)$. Podstawowe fakty dotyczące zbiorów algebraicznych, z których będziemy korzystać, można znaleźć w uzupełnieniu 3.1. Przypomnijmy tylko, że przez df oznaczamy zespoloną 1-formę

$$df = \frac{\partial f}{\partial z_1} dz_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial z_n} dz_n,$$

a $z \in V$ nazywamy *punktem osobliwym* hiperpowierzchni V, gdy $df(z) = 0$, czyli, innymi słowy, $\partial f / \partial z_1(z) = \ldots \partial f / \partial z_n(z) = 0$. Zbiór punktów osobliwych V oznaczamy przez $\Sigma(V)$. Wówczas $V \backslash \Sigma(V)$ jest rozmaitością zespoloną wymiaru $n-1$ (patrz uzupełnienie 3.1).

Interesuje nas topologia V w otoczeniu izolowanego punktu osobliwego $x_0 \in V$. Bez straty ogólności będziemy dalej zakładać, że $x_0 = 0$.

Zgodnie z ideą przedstawioną we wprowadzeniu będziemy rozważać zbiór

$$K = S_\epsilon \cap V,$$

gdzie $S_\epsilon = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \|x\| = \epsilon\}$ jest $(2n-1)$-wymiarową sferą w $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ o dostatecznie małym promieniu ϵ. Poniższy lemat precyzyjnie określa, co przez to rozumiemy.

Lemat 1.1. *Istnieje stała $\rho > 0$ o tej własności, że dla każdego $0 < \epsilon \leqslant \rho$ sfera S_ϵ przecina V transwersalnie wzdłuż gładkiej $(2n-3)$-wymiarowej rozmaitości K.*

Dowód. Niech $f = f_1 + i f_2$. Wówczas V jest rzeczywistym zbiorem algebraicznym w $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ zadanym równaniami $f_1 = f_2 = 0$. Rozważmy funkcję

$$r(x) = \|x\|^2.$$

Obcięcie funkcji wielomianowej r do gładkiej rozmaitości $V \backslash \Sigma(V)$ ma skończenie wiele wartości krytycznych (patrz wniosek 3.2, uzupełnienie 3.1), więc każda liczba $\epsilon^2 > 0$ mniejsza od najmniejszej dodatniej wartości krytycznych $r_{|\ V \backslash \Sigma(V)}$ będzie wartością regularną, a jej przeciwobraz

$$r^{-1}(\epsilon^2) \cap (V \backslash \Sigma(V)) = S_\epsilon \cap (V \backslash \Sigma(V))$$

będzie gładką rozmaitością. Ponieważ $x \in V \backslash \Sigma(V)$ jest punktem regularnym $r_{|\ V \backslash \Sigma(V)}$ dokładnie wtedy, gdy różniczki $dr(x), df_1(x), df_2(x)$ są liniowo niezależne (patrz stwierdzenie 3.1, uzupełnienie 3.1), przecięcie to będzie transwersalne. Co więcej, dla dostatecznie małych ϵ zachodzi $S_\epsilon \cap (V \backslash \Sigma(V)) = S_\epsilon \cap V = K$, bo 0 jest izolowanym punktem osobliwym V.

□

Wniosek 1.1. *Istnieje $\delta > 0$ taka, że dla każdego $z \in \mathbb{C}$, $|z| < \delta$ oraz $\epsilon \leqslant \rho$ przecięcie $f^{-1}(z) \cap S_\epsilon$ jest transwersalne.*

Dowód. Z dowodu lematu 1.1 wiemy, że dla każdego $x \in V \cap S_\epsilon$ formy $dr(x), df_1(x), df_2(x)$ są liniowo niezależne. Liniowa niezależność oznacza niezerowanie się pewnych minorów, jest więc warunkiem otwartym i dla każdego $x \in V \cap S_\epsilon$ istnieje otoczenie U_x w S_ϵ, na którym formy dr, df_1, df_2 są liniowo niezależne. Zbiór $V \cap S_\epsilon$ jest zwarty, możemy więc dobrać jego pokrycie składające się ze skończenie wielu takich otoczeń. Oznaczmy przez U ich przecięcie. U jest otwartym otoczeniem $V \cap S_\epsilon = f^{-1}(0) \cap S_\epsilon$ w S_ϵ.

Pokażemy, że dla dostatecznie małych $|z|$ zachodzi $f^{-1}(z) \cap S_\epsilon \subset U$. Istotnie, gdyby istniał ciąg $x_1, x_2, x_3, \ldots$ w $S_\epsilon \backslash U$ taki, że $f(x_m) \to 0$, to przechodząc do podciągu zbieżnego do $x_0 \in S_\epsilon \backslash U$ otrzymalibyśmy sprzeczność, bo $f(x_0) = 0$, $x_0 \notin f^{-1}(0)$.

Istnieje wobec tego $\delta > 0$ taka, że dla $|z| < \delta$ zachodzi $f^{-1}(z) \cap S_\epsilon \subset U$, co oznacza, że dla każdego $x \in f^{-1}(z) \cap S_\epsilon$ formy $dr(x), df_1(x), df_2(x)$ są liniowo niezależne, a więc przecięcie jest transwersalne. □

Niech $K = S_\epsilon \cap V$. Rozwazmy odwzorowanie $\phi : S_\epsilon \backslash K \to S^1$ określone następująco:

$$\phi(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}. \tag{1.1}$$

Twierdzenie Milnora o rozwłóknieniu. *Dla każdego dostatecznie małego ϵ odwzorowanie $\phi : S_\epsilon \backslash K \to S^1$ jest lokalnie trywialnym, gładkim rozwłóknieniem. Domknięcie $\overline{F_\theta}$ każdego z włókien $F_\theta = \phi^{-1}(e^{i\theta})$ jest gładką $(2n-2)$-wymiarową rozmaitością z brzegiem, której wnętrzem jest F_θ, a brzegiem K.*

Rozwłóknienie ϕ było rozważane przez Milnora w pracy [M], w której można znaleźć szczegółowy dowód powyższego twierdzenia. Dla naszych celów ważniejsza będzie jednak inna, podobna konstrukcja, w której sfera zostaje zastąpiona kulą, a okrąg – dyskiem. Niech $\rho > 0$ i $\delta > 0$ będą liczbami dobranymi zgodnie z lematem 1.1 i wnioskiem 1.1. Wprowadźmy oznaczenia

$$D_\delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \delta\}, \quad B_\rho = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \|x\| \leqslant \rho\},$$
$$U = D_\delta \backslash \{0\}, \quad E = f^{-1}(U) \cap B_\rho.$$

Rozważmy przekształcenie f obcięte do E

$$f : E \to U. \tag{1.2}$$

Twierdzenie 1.1. *Odwzorowanie $f : (E, \partial E) \to U$ jest lokalnie trywialnym, gładkim rozwłóknieniem pary.*

Definicje lokalnie trywialnego rozwłóknienia i lokalnie trywialnego rozwłóknienia pary są przypomniane w uzupełnieniu 3.2.

Definicja. Zarówno $\phi : S_\epsilon \backslash K \to S^1$, jak i $f : (E, \partial E) \to U$ określa się mianem *rozwłóknienia Milnora*. Będziemy używali przede wszystkim drugiego z nich.

Dowód twierdzenia 1.1. Wykorzystamy twierdzenie Ehresmanna (patrz uzupełnienie 3.2).

Dla dowolnego zbioru zwartego $K \subset U$ przeciwobraz $f_{|E}^{-1}(K) = f^{-1}(K) \cap B_\rho$ jest zwarty jako domknięty podzbiór kuli B_ρ, co oznacza, że $f_{|E}$ jest odwzorowaniem właściwym.

Pozostaje sprawdzić, że $f_{|E}$ oraz $f_{|\partial E}$ są submersjami. Wnętrze Int E jest otwartym podzbiorem $\mathbb{C}^n$. Jeśli $x \in \text{Int } E$, to x jest punktem regularnym f, tzn. $df(x) \neq 0$, a więc f jest submersją w punkcie x (por. lemat 3.1 w uzupełnieniu 3.1).

Zauważmy, że brzeg $\partial E = f^{-1}(U) \cap S_\rho$ jest otwartym podzbiorem sfery S_ρ i wobec doboru ρ dla każdego $x \in \partial E$ sfera S_ρ przecina się z rozmaitością $f^{-1}(f(x))$ transwersalnie, co oznacza, że x jest punktem regularnym $f_{|S_\rho}$, a $f_{|\partial E}$ jest submersją w x. □

Na koniec paragrafu porównajmy oba rozwłóknienia Milnora. Okazuje się, że są one w pewnym sensie izomorficzne. Zauważmy jednak, że włóknem klasycznego rozwłóknienia Milnora $\phi : S_\epsilon \backslash K \to S^1$ jest rozmaitość otwarta F_θ, podczas gdy włóknem rozwłóknienia $f : E \to U$ jest zwarta rozmaitość z brzegiem. By porównać oba rozwłóknienia, musimy przeprowadzić następującą konstrukcję. Niech $T = \{|f| < \alpha\} \cap S_\epsilon$ będzie małym otoczeniem tubularnym K w S_ϵ. Rozważmy obcięcie

$$\phi : S_\epsilon \backslash T \to S^1. \tag{1.3}$$

Twierdzenie 1.2. *Odwzorowanie $\phi : S_\epsilon \backslash T \to S^1$ oraz obcięcie $f : E \to C$ do małego okręgu $C \subset U$ o środku w zerze zadają izomorficzne wiązki nad S^1.*

Dowód można znaleźć w [M]. Skoncentrujmy się tymczasem na badaniu wiązki $f : E \to U$.

1.2. Liczba Milnora

Milnor opisał topologię włókna wiązki $f : E \to U$, dowodząc, że z dokładnością do homotopijnej równoważności wyznacza ją jedna liczba określająca stopień zdegenerowania punktu krytycznego. W niniejszym paragrafie przedstawimy definicję oraz omówimy podstawowe własności tego niezmiennika osobliwości. Rozważmy dla przykladu przypadek jednowymiarowy.

Przykład. Niech $P \in \mathbb{C}[z]$ będzie wielomianem, a $a \in \mathbb{C}$ jego punktem krytycznym. Możemy wówczas określić *krotność* punktu krytycznego a jako liczbę k taką, że $P'(a) = P''(a) = \ldots = P^{(k)}(a) = 0$ oraz $P^{(k+1)}(a) \neq 0$. Wówczas istnieje wielomian $Q \in \mathbb{C}[z]$ taki, że $P'(z) = (z-a)^k Q(z)$ oraz $Q(a) \neq 0$.

Zauważmy, że krotność ma następującą interpretację topologiczną. Niech C będzie małym okręgiem wokół a. Wówczas stopień przekształcenia

$$C \ni z \mapsto \frac{P'(z)}{|P'(z)|} \in S^1$$

jest równy dokładnie k. Nietrudno to zauważyć, ponieważ Q nie zeruje się w otoczeniu a, więc $P'/|P'|$ na C jest homotopijne z $(z/|z|)^k$.

Powyższy przykład pozwala w naturalny sposób uogólnić pojęcie krotności punktu krytycznego na przypadek wyżej wymiarowy.

Definicja. Niech $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ będzie odwzorowaniem holomorficznym. Załóżmy, że punkt $a \in \mathbb{C}^n$ będzie izolowanym zerem g. *Krotnością zera a* nazywamy indeks g traktowanego jako pole wektorowe $g : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ w punkcie a. Innymi słowy, jest to stopień odwzorowania $z \mapsto g(z)/\|g(z)\|$ z dostatecznie małej sfery $S^{2n-1}(a,\epsilon) = \{z \in \mathbb{C}^n \mid \|z-a\| = \epsilon\}$ w sferę jednostkową S^{2n-1}.

Dla nas interesujący będzie następujący przypadek. Niech $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ będzie wielomianem, a $a \in \mathbb{C}^n$ jego izolowanym punktem krytycznym. *Krotnością* lub *liczbą Milnora punktu krytycznego a* nazywamy krotność a jako zera odwzorowania holomorficznego $Df : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ określonego wzorem

$$Df = \left[\frac{\partial f}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial z_n}\right].$$

Zauważmy, że *a priori* indeks pola wektorowego w punkcie może być dowolną liczbą całkowitą, na przykład zerem lub liczbą ujemną. Okazuje się jednak, że tak określona krotność zera zachowuje własności dobrze znane z teorii funkcji analitycznych jednej zmiennej, w szczególności jest zawsze liczbą dodatnią. Dalszą część paragrafu poświęcimy dowodowi tego oraz innych twierdzeń dotyczących krotności, z których będziemy dalej korzystać.

Zasada argumentu. *Niech $D \subset \mathbb{C}^n$ będzie zwartym obszarem z gładkim brzegiem ∂D. Załóżmy, że przekształcenie holomorficzne $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ nie zeruje się na ∂D i ma skończenie wiele zer we wnętrzu D. Wówczas liczba zer g w D, liczonych z krotnościami, jest równa stopniowi odwzorowania $z \mapsto g(z)/\|g(z)\|$ z brzegu ∂D w sferę jednostkową.*

Dowód. Otoczmy zera g wewnątrz D małymi, rozłącznymi kulami $D_1, D_2, \ldots, D_m$. Niech F oznacza D z wyciętymi wnętrzami kul D_i. F jest zwartą rozmaitością z brzegiem

$$\partial F = \partial D \sqcup (-\partial D_1) \sqcup \ldots \sqcup (-\partial D_m),$$

gdzie znak minusa oznacza przeciwną orientację (na wnętrzach F, D oraz D_i rozpatrujemy orientację odziedziczoną z $\mathbb{C}^n$, która wyznacza również jednoznacznie orientację brzegów). Na F mamy dobrze określone odwzorowanie

$$\psi = g/\|g\| : F \to S^{2n-1}.$$

Oznaczmy przez ω formę objętości na S^{2n-1}.Wobec $\mathrm{d}\omega = 0$ i twierdzenia Stokesa

$$0 = \int_F \psi^* (\mathrm{d}\omega) = \int_F \mathrm{d} (\psi^* \omega) = \int_{\partial F} \psi^* \omega = \int_{\partial D} \psi^* \omega - \sum_{i=1}^{m} \int_{\partial D_i} \psi^* \omega.$$

Wykorzystując charakteryzację stopnia odwzorowania jako całkę z cofnięcia formy objętości (patrz np. [Mo]), otrzymujemy

$$\deg \left(\psi_{|\partial D} \right) = \sum_{i=1}^{m} \deg \left(\psi_{|\partial D_i} \right).$$

(Przedstawiliśmy w gruncie rzeczy dowód faktu, że *przekształcenie obcięte do dwóch homologicznych cykli ma ten sam stopień*). Stopień przekształcenia $\psi_{|\partial D_i}$ jest z definicji równy krotności zera g zawartego wewnątrz D_i. □

Twierdzenie Rouchégo. *Niech $g, r : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ będą odwzorowaniami holomorficznymi, a $M \subset \mathbb{C}^n$ zamkniętą, $(2n-1)$-wymiarową podrozmaitością gładką. Jeśli g nie zeruje się na M oraz $\|r\| < \|g\|$ na M, to odwzorowania $(g + r)/\|g + r\|$ oraz $g/\|g\|$ z M w sferę jednostkową mają ten sam stopień.*

W szczególności, jeśli $M = \partial D$ ogranicza zwarty obszar D i oba odwzorowania mają skończenie wiele zer wewnątrz D, to liczby ich zer w D liczonych z krotnościami są równe.

Uwaga. Założenia w drugiej części twierdzenia można osłabić. W istocie z twierdzenia 1.3, które udowodnimy dalej, wynika, że odwzorowanie holomorficzne nie zerujące się na ∂D ma w D najwyżej skończenie wiele zer.

Dowód. Rozważmy odwzorowanie $H : M \times [0, 1] \to S^{2n-1}$ określone wzorem

$$H(x, u) = \frac{g(x) + ur(x)}{\|g(x) + ur(x)\|}.$$

Ponieważ $\|r\| < \|g\|$ na S_ϵ, mianownik nie zeruje się w żadnym punkcie S_ϵ i H określa homotopię między odwzorowaniami $(g+r)/\|g+r\|$ a $g/\|g\|$ z M w S^{2n-1}. Teza wynika więc z homotopijnej niezmienniczości stopnia.

W szczególności gdy $M = \partial D$ i zarówno g, jak i $g+r$ mają skończenie wiele zer wewnątrz D, zasada argumentu dowodzi drugiej części twierdzenia. □

Stwierdzenie 1.1. *Jeśli a jest zerem przekształcenia g i macierz pochodnych $(\partial g_j/\partial z_k)(a)$ jest nieosobliwa, to a jest zerem krotności 1. W szczególności, gdy $g = \nabla f$ i a jest punktem krytycznym odwzorowania $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, otrzymujemy, że liczba Milnora niezdegenerowanego punktu krytycznego jest równa 1.*

Przypomnijmy, że punkt krytyczny a nazywamy *niezdegenerowanym*, gdy macierz drugich pochodnych w a jest niezdegenerowana.

Dowód. Ponownie wykorzystamy homotopijną niezmienniczość stopnia.

Niech L oznacza pochodną odwzorowania g w punkcie a. L jest nieosobliwym przekształceniem liniowym, które przybliża g w otoczeniu a. Dokładniej, rozważmy rozwinięcie Taylora funkcji g w punkcie a:

$$g(z) = L(z-a) + r(z),$$

gdzie r jest resztą taką, że

$$\lim_{z \to a} \frac{r(z)}{\|z-a\|} = 0.$$

Dobierzmy $\epsilon > 0$ tak małe, by na sferze $S_\epsilon = \{\|z-a\| = \epsilon\}$ zachodziło

$$\|r(z)\| < \frac{\|z-a\|}{\|L^{-1}\|},$$

gdzie $\|L^{-1}\|$ oznacza normę operatora odwrotnego L^{-1} . Wtedy dla $z \in S_\epsilon$ mamy

$$\|r(z)\| < \frac{\|z-a\|}{\|L^{-1}\|} = \frac{\|L^{-1}L(z-a)\|}{\|L^{-1}\|} \leqslant \|L(z-a)\|,$$

zatem z twierdzenia Rouchégo wynika, że odwzorowania $g(z)/\|g(z)\|$ oraz $L(z-a)/\|L(z-a)\|$ mają ten sam stopień. Z łukowej spójności grupy macierzy odwracalnych $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ wynika istnienie drogi między L a przekształceniem identycznościowym. Droga ta zadaje w oczywisty sposób homotopię między $L(z-a)/\|L(z-a)\|$ a odwzorowaniem $(z-a)/\|z-a\|$, które ma stopień 1. □

Twierdzenie 1.3 (Lefschetz). *Krotność izolowanego zera przekształcenia holomorficznego $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ jest zawsze liczbą dodatnią.*

Dowód. Niech μ oznacza krotność izolowanego zera a odwzorowania g, a D będzie małą kulą domkniętą wokół a, nie zawierającą innych zer. Skonstruujemy zaburzenie $\tilde{g}$ przekształcenia g o tej własności, że wszystkie jego zera są niezdegenerowane, przy czym co najmniej jedno z nich leży wewnątrz D. Jeśli zaburzenie dobierzemy dostatecznie małe, to z twierdzenia Rouchégo i stwierdzenia 1.1 wyniknie, że $\tilde{g}$ ma w D dokładnie μ zer, zatem $\mu \geqslant 1$.

Przejdźmy do konstrukcji $\tilde{g}$. Rozważmy najpierw zaburzenie postaci

$$h(z) = g(z) - \delta(z-a),$$

gdzie δ jest małą liczbą zespoloną różną od wszystkich wartości własnych macierzy pochodnych $(\partial g_i/\partial z_j)$ w punkcie a. Wówczas $h(a) = 0$ oraz macierz $(\partial h_i/\partial z_j)$ jest nieosobliwa w a, zatem z twierdzenia o funkcji odwrotnej h przekształca dyfeomorficznie pewne otoczenie a na otoczenie zera B_ϵ.

Określmy dla $w \in \mathbb{C}^n$ odwzorowanie

$$g_w(z) = h(z) - w.$$

Jeśli w jest wartością regularną h, to wszystkie zera g_w są niezdegenerowane. Zauważmy, że w takim przypadku zera g_w są izolowane (bo Jakobian nie zeruje się w nich i lokalnie g_w jest dyfeomorfizmem), więc g_w ma ich w D co najwyżej skończenie wiele. Co więcej, jeśli dobierzemy, wykorzystując twierdzenie Sarda, wartość regularną $w \in B_\epsilon$, to g_w będzie posiadało w D co najmniej jedno zero, ponieważ h przyjmuje w D każdą wartość z B_ϵ.

Wobec tego $\tilde{g} = g_w$ spełnia wymagane warunki. Wystarczy dodać, że δ i ϵ można dobrać na tyle małe, by tak skonstruowane $\tilde{g}$ spełniało założenia twierdzenia Rouchégo. □

Uwaga. Liczbę Milnora można zdefiniować również w inny, algebraiczny sposób. Oznaczmy przez $\mathcal{O}$ pierścień lokalny kiełków funkcji holomorficznych $(\mathbb{C}^n, 0) \to \mathbb{C}$. Dla kiełka $f \in \mathcal{O}$ *ideałem gradientowym* I_f nazywamy ideał w $\mathcal{O}$ generowany przez pochodne cząstkowe $(\partial f/\partial z_1, \ldots, \partial f/\partial z_n)$, natomiast *algebrą lokalną* określamy $\mathbb{C}$-algebrę ilorazową $\mathcal{A}_f = \mathcal{O}\backslash I_f$. Dowodzi się (patrz [Ż]), że jeśli f ma izolowany punkt krytyczny w zerze, to $\mathcal{A}_f$ jest skończenie wymiarowa, a jej wymiar nad $\mathbb{C}$ jest równy liczbie Milnora odwzorowania f w zerze.

1.3. Zaburzenie morse'owskie

Powróćmy do badania punktów krytycznych wielomianu $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. Jak widzieliśmy w dowodzie twierdzenia 1.3, zero odwzorowania holomorficznego $g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ krotności μ po małym zaburzeniu rozpada się na μ pojedynczych zer. Analogicznie przy małym zaburzeniu funkcji f izolowany punkt krytyczny rozpada się na niezdegenerowane punkty krytyczne. Okazuje się, że badanie funkcji zaburzonej pozwala zrozumieć osobliwość pierwotnej funkcji f. Przypadek niezdegenerowanych punktów krytycznych posiada bowiem wyjątkowo prosty opis, a rozwłóknienia Milnora funkcji zaburzonej i funkcji pierwotnej są izomorficzne.

Dla wektorów $x = [x_1, \ldots, x_n], y = [y_1, \ldots, y_n]$ w $\mathbb{C}^n$ określamy

$$x \cdot y = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Ustalmy ponadto, że funkcję zespoloną nazywamy *funkcją Morse'a*, gdy wszystkie jej punkty krytyczne są niezdegenerowane oraz w różnych punktach krytycznych przyjmuje ona różne wartości (przeważnie zakłada się tylko pierwszy warunek, dla nas jednak oba będą istotne).

Stwierdzenie 1.2. *Dla $w \in \mathbb{C}^n$ określmy funkcję $f_w : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ wzorem*

$$f_w(z) = f(z) + w \cdot z.$$

Wówczas dla prawie wszystkich $w \in \mathbb{C}^n$ odwzorowanie f_w jest funkcją Morse'a.

Dowód. Dla prawie wszystkich $w \in \mathbb{C}^n$ odwzorowanie f_w ma niezdegenerowane punkty krytyczne. Dowód przy użyciu twierdzenia Sarda jest identyczny jak w przypadku twierdzenie 1.3. Wystarczy tylko zauważyć, że $Df_w = Df + w$.

Udowodnimy więc, że dla prawie wszystkich $w \in \mathbb{C}^n$ odwzorowanie f_w rozdziela punkty krytyczne. Zakończy to dowód stwierdzenia, gdyż suma zbiorów zerowej miary również ma miarę zero. Rozważmy rodzinę odwzorowań F_w zależną gładko od parametru $w \in \mathbb{C}^n$:

$$F_w : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n,$$

$$F_w(x,y) = (f_w(x), f_w(y), Df_w(x), Df_w(y)).$$

Niech $Z \subset \mathbb{C}^{2n+2}$ będzie podrozmaitością kowymiaru zespolonego $2n+1$ zadaną równaniami

$$(z_1, z_2, w_1, w_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n,$$

$$\begin{cases} z_1 = z_2, \\ w_1 = w_2 = 0. \end{cases}$$

Funkcja f_w rozdziela punkty krytyczne wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobraz $F_w^{-1}(Z)$ jest zbiorem pustym. Z twierdzenia Thoma o transwersalności (patrz np. [B]) wynika, że dla prawie wszystkich $w \in \mathbb{C}^n$ odwzorowanie F_w jest transwersalne do podrozmaitości Z. Ponieważ

$$2n + 1 = \operatorname{codim} Z > \dim \mathbb{C}^{2n} = 2n,$$

w tym przypadku transwersalność oznacza, że $F_w^{-1}(Z) = \emptyset$, co kończy dowód twierdzenia. $\square$

Funkcję f_w nazywamy *zaburzeniem morse'owskim* funkcji f. Interesują nas zaburzenia zmieniające f w niewielkim stopniu, co można wyrazić warunkiem $|w| < \epsilon$ dla pewnej niedużej liczby ϵ. Stwierdzenie 1.2 gwarantuje, że dla każdego $\epsilon > 0$ takie zaburzenie istnieje.

Poniższe stwierdzenie wynika wprost z twierdzenia Rouchégo.

Stwierdzenie 1.3. *Niech a będzie izolowanym punktem krytycznym krotności μ, a D dyskiem o środku w a nie zawierającym innych punktów krytycznych f. Wówczas każde dostatecznie małe zaburzenie morse'owskie posiada w D dokładnie μ punktów krytycznych krotności* 1.

Uwaga. Oczywiście funkcję można zaburzać również za pomocą członów wyższego rzędu. Zaburzenie liniowe jest jednak wystarczające dla naszych celów.

Pokażemy teraz, że rozwłóknienia Milnora zaburzenia f_w i funkcji f są izomorficzne. Załóżmy dalej, bez straty ogólności, że zero jest izolowanym punktem krytycznym wielomianu $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ o liczbie Milnora μ, z wartością krytyczną $f(0) = 0$. Przypomnijmy, że $S_\epsilon \subset \mathbb{C}^n$ oznacza $2n-1$-wymiarową sferę o promieniu ϵ i środku w zerze.

Lemat 1.2. *Istnieją liczby dodatnie δ, ρ oraz η takie, że jeśli tylko $\epsilon \leqslant \rho$, $|w| < \eta$, a $z \in \mathbb{C}, |z| < \delta$ jest wartością regularną f_w, to przecięcie $f_w^{-1}(z) \cap S_\epsilon$ jest transwersalne.*

Dowód. Niech $f_w = u_w + iv_w$ będzie rozkładem na część rzeczywistą i urojoną funkcji f_w. Przypomnijmy (lemat 1.1), że transwersalność przecięcia jest równoważna liniowej niezależności form $dr(x), du_w(x), dv_w(x)$ w każdym punkcie części wspólnej. Jest to warunek otwarty i zachodzący dla $w = 0$, a formy zależą w sposób ciągły zarówno od x, jak i od parametru w. Dalej dowód przebiega identycznie jak dowód lematu 1.1. $\square$

Z powyższego lematu wynika więc, że możemy przeprowadzić konstrukcję rozwłóknienia Milnora opisaną wzorem 1.2 wspólną dla wszystkich dostatecznie małych zaburzeń f_w. Mówiąc precyzyjniej, dobierzmy dostatecznie małe $\rho, \delta > 0$ i oznaczmy, jak poprzednio,

$$D_\delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \delta\} \subset, \quad B_\rho = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \|x\| \leqslant \rho\}.$$

Niech Crit $f_w \subset D_\delta$ oznacza zbiór punktów krytycznych f_w w D_δ. Określmy nadto

$$U_w = D_\delta \backslash \text{Crit } f_w, \quad E_w = f_w^{-1}(U_w) \cap B_\rho.$$

Z powyższego lematu wynika następujące

Twierdzenie 1.4. *Dla dostatecznie małych $w \in \mathbb{C}^n$ odwzorowanie $f_w : (E_w, \partial E_w) \to U_w$ jest lokalnie trywialnym, gładkim rozwłóknieniem pary.*

Dowód jest identyczny jak w przypadku twierdzenia 1.1.

Zauważmy, że dobraliśmy wspólne ρ i δ dla wszystkich małych zaburzeń f_w, lecz dla każdego w musimy wyjąć z dysku D_δ inne wartości krytyczne. O ile zaburzenie jest dostatecznie małe, to z gładkiej zależności od parametru w wynika, że wartości krytyczne każdej z funkcji f_w będą znajdować się w pewnym mniejszym dysku, dajmy na to $D_{\delta/2}$. Pozwala to porównać rozwłóknienia f i jej zaburzeń obciętych do pierścienia

$$P = \{z \in \mathbb{C} \mid \delta/2 < |z| < \delta\} \subset D_\delta.$$

Twierdzenie 1.5. *Dla dostatecznie małych $w \in \mathbb{C}^n$ rozwłóknienia Milnora odwzorowań f oraz f_w obcięte do pierścienia P są równoważne, tzn. istnieje diagram przemienny*

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(P) \cap B_\rho \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "f"] & f_w^{-1}(P) \cap B_\rho \arrow[d, "f_w"] \\ P \arrow[r, "\mathrm{id}"] & P \end{tikzcd}$$

gdzie Ψ jest dyfeomorfizmem.

Dowód. Dowód oparty jest o idee z pracy [J].

Z poczynionej przed chwilą uwagi wynika, że istnieje liczba $\eta > 0$ taka, że dla wszystkich $\|w\| \leqslant \eta$ w pierścieniu P nie będzie żadnej wartości krytycznej f_w i będzie on zawarty w przestrzeni bazowej U_w rozwłóknienia Milnora $f_w : E_w \to U_w$.

Rozważmy odwzorowanie $F : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$ zadane wzorem

$$F(x, w) = (f_w(x), w).$$

Wykorzystując twierdzenie Ehresmanna, wykażemy, że F obcięte do pewnego podzbioru jest lokalnie trywialnym rozwłóknieniem. Macierz różniczki odwzorowania F ma postać

$$dF(x, w) = \begin{bmatrix} df_w(x), & \partial f_w(x)/\partial w \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Jeśli więc $\|w\| \leqslant \eta$ oraz $x \in B_\rho$ jest punktem regularnym odwzorowania f_w, to wobec twierdzenia 1.5 różniczka $df_w(x)$ jest epimorfizmem, skąd wynika, że również $dF(x, w)$ jest epimorfizmem. Dobierzmy zatem zbiór

$$Q = \left(\bigcup_{|w| \leqslant \eta} f_w^{-1}(P) \right) \cap B_\rho \subset \mathbb{C}^n$$

i rozważmy obcięcie

$$F : Q \times K_\eta \to P \times K_\eta,$$

gdzie $K_\eta = \{w \in \mathbb{C}^n \mid \|w\| < \eta\}$. Z twierdzenia Ehresmanna wynika więc, że jest ono lokalnie trywialnym rozwłóknieniem (warunek na brzegu sprawdza się tak samo, wykorzystując fakt, że f_w obcięte do brzegu ∂E_w jest submersją).

Ustalmy $w \in K_\eta$ i niech $\theta : K_\eta \to K_\eta$ będzie dowolnym dyfeomorfizmem izotopijnym z identycznością i przekształcającym zero na w. Izotopia między odwzorowaniem $\mathrm{id} \times \theta : P \times K_\eta \to P \times K_\eta$ a identycznością indukuje poprzez własność podnoszenia homotopii (patrz uzupełnienie 3.2) automorfizm $\Psi : Q \times K_\eta \to Q \times K_\eta$ czyniący diagram

$$\begin{tikzcd} Q \times K_\eta \arrow[r, "\Psi"] \arrow[d, "F"] & Q \times K_\eta \arrow[d, "F"] \\ P \times K_\eta \arrow[r, "\mathrm{id}\times\theta"] & P \times K_\eta \end{tikzcd}$$

przemiennym. Wobec tego Ψ przeprowadza dyfeomorficznie zbiór

$$F^{-1}(P \times \{0\}) = \{(x, 0) \mid x \in B_\rho,\ f(x) \in P\} \simeq f^{-1}(P) \cap B_\rho$$

na zbiór

$$F^{-1}(P \times \{w\}) \simeq f_w^{-1}(P) \cap B_\rho$$

w taki sposób, że diagram z tezy twierdzenia jest przemienny. □

1.4. Cykle znikające

W poprzednim paragrafie wykazaliśmy, że badanie rozwłóknienia Milnora można sprowadzić do przypadku funkcji morse'owskich. Jest to o tyle wygodne, że w otoczeniu niezdegenerowanego punktu krytycznego funkcja posiada następujący łatwy opis lokalny.

Lemat Morse'a. *Niech $a \in \mathbb{C}^n$ będzie niezdegenerowanym punktem krytycznym funkcji holomorficznej $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$. Na otoczeniu z_0 istnieje wówczas holomorficzny układ współrzędnych $(z_1, \ldots, z_n)$ o początku w a, w którym f ma postać*

$$f(z) = f(0) + z_1^2 + \ldots + z_n^2.$$

Zbadajmy więc topologię włókna rozwłóknienia Milnora funkcji

$$f(z) = z_1^2 + \ldots + z_n^2.$$

Wprowadźmy współrzędne rzeczywiste x_k, y_k takie, że $z_k = x_k + iy_k$. Załóżmy, że r jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Włókno $f^{-1}(r)$ nad r opisane jest równaniami

$$\begin{cases} x_1^2 + \ldots + x_n^2 = r + y_1^2 + \ldots + y_n^2, \\ x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = 0, \end{cases}$$

co można równoważnie zapisać w postaci

$$f^{-1}(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 = r + \|y\|^2,\ x \cdot y = 0\}.$$

Zbiór ten jest gładką podrozmaitością $\mathbb{R}^{2n}$, a przekształcenie $(x, y) \mapsto (x/\|x\|, y)$ zadaje jej dyfeomorfizm z wiązką styczną do sfery $(n-1)$-wymiarowej

$$TS^{n-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1,\ x \cdot y = 0\}$$

Jeśli, jak w konstrukcji rozwłóknienia Milnora, rozważymy przecięcie włókna z kulą B_{r+2} o promieniu $r + 2$, zawartej w dziedzinie $\mathbb{C}^n$, otrzymamy warunek $\|x\|^2 + \|y\|^2 \leqslant r + 2$, skąd po podstawieniu $\|x\|^2 = r + \|y\|^2$ dostaniemy $\|y\| \leqslant 1$. Wobec tego włókno $V_r = f^{-1}(r) \cap B_{r+2}$ nad r rozwłóknienia Milnora jest dyfeomorficzne z wiązką kul jednostkowych nad sferą S^{n-1}:

$$V_r \simeq BS^{n-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1,\ x \cdot y = 0,\ \|y\| \leqslant 1\},$$

której brzegiem jest wiązka wektorów jednostkowych

$$\partial V_r \simeq TUS^{n-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1,\ x \cdot y = 0,\ \|y\| = 1\}.$$

Rozważaliśmy włókno nad dodatnią liczbą rzeczywistą, lecz dowolne włókno V_λ nad liczbą zespoloną $\lambda = |\lambda| e^{-i\phi}$ jest dyfeomorficzne z $V_{|\lambda|}$ poprzez przekształcenie $z \mapsto e^{i\phi/2} z$.

Zbadajmy teraz grupy homologii włókna V_λ. Załózmy dla uproszczenia, że λ jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Ponieważ włóknem wiązki BS^{n-1} jest ściągalny dysk, przekrój zerowy $S^{n-1} \hookrightarrow BS^{n-1}$ zadany wzorem $x \mapsto (x, 0)$ jest homotopijną równoważnością, a klasa podstawowa $[S^{n-1}]$ jest generatorem homologii $H_{n-1}(BS^{n-1})$. W V_λ jest to klasa homologii cyklu $\Delta = \{\|x\|^2 = \lambda,\ y = 0\} \subset V_\lambda$, który nazywamy *cyklem znikającym*, ponieważ wraz z λ dążącym do zera degeneruje się on do punktu osobliwego we włóknie nad wartością krytyczną. Innymi słowy, włókno osobliwe V_0 można uzyskać z włókna regularnego V_λ poprzez zaklejenie Δ dyskiem $D^n \simeq \{\|x\| \leqslant \lambda\}$.

Z dualności Poincarégo wynika, że również homologie relatywne $H_{n-1}(V_\lambda, \partial V_\lambda)$ są izomorficzne z $\mathbb{Z}$. Możemy z łatwością wskazać ich generator w postaci klasy cyklu relatywnego

$$\nabla = \left\{x_2 = \ldots = x_n = 0,\ y_1 = 0,\ x_1 = \sqrt{\lambda + y_2^2 + \ldots + y_n^2}\right\} \subset V_\lambda.$$

Podsumujmy uzyskany topologiczny opis włókna Milnora w przypadku morse'owskim.

Stwierdzenie 1.4. 1. *Włókno regularne V_λ rozwłóknienia Milnora funkcji*

$$f(z) = z_1^2 + \ldots + z_n^2$$

jest dyfeomorficzne z wiązką kul BS^{n-1} nad sferą S^{n-1}.

2. *Homologie włókna $H_{n-1}(V_\lambda) \cong \mathbb{Z}$ są generowane przez cykl Δ, a homologie relatywne $H_{n-1}(V_\lambda, \partial V_\lambda) \cong \mathbb{Z}$ przez cykl relatywny ∇. Pozostałe grupy homologii są trywialne.*

3. *Jeśli γ jest odcinkiem między wartością krytyczną 0 a wartością regularną λ, to włókno nad γ można zdeformować relatywnie V_λ do $D^n \cup V_\lambda$, gdzie dysk D^n jest wklejony brzegiem w $\Delta \subset V_\lambda$.*

Załóżmy teraz, że $g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ jest wielomianem posiadającym w zerze izolowany punkt krytyczny o liczbie Milnora μ. Niech $f = g_w$ będzie małym zaburzeniem morse'owskim g, a $f : E \to U$ opisanym w poprzednim paragrafie rozwłóknieniem Milnora zaburzenia. Przypomnijmy, że

$$U = D_\delta \backslash \{z_1, \ldots, z_\mu\}, \quad E = f^{-1}(U) \cap B_\rho,$$

przy czym $z_k = f(x_k)$, gdzie $x_1, \ldots, x_\mu$ są jednokrotnymi punktami krytycznymi f w kuli B_ρ.

Ustalmy $\lambda \in U$. Naszym celem jest opisanie topologii włókna V_λ rozwłóknienia $f : E \to U$ nad punktem λ. Z lematu Morse'a wynika, że na pewnym otoczeniu każdego z punktów krytycznych x_k istnieją współrzędne, w których f ma postać

$$f(y) = z_k + \sum_{j=1}^{n} y_j^2.$$

Dobierzmy punkt regularny $q_k \in U$ bliski z_k. Ze stwierdzenia 1.4 wiemy, że dla małej liczby $\epsilon > 0$ grupa homologii $H_{n-1}(f^{-1}(q_i) \cap B_\epsilon)$ jest generowane przez pewien cykl znikający Λ_k. Oznaczmy tym samym symbolem element homologii $H_{n-1}(V_{q_k})$ powstający z Λ_k przy włożeniu $f^{-1}(q_i) \cap B_\epsilon \subset f^{-1}(q_i) \cap B_\rho = V_{q_k}$ (zauważmy, że $\epsilon < \rho$, ponieważ kula B_ϵ nie może zawierać innych punktów krytycznych f niż x_k, podczas gdy B_ρ zawiera wszystkie).

Dobierzmy μ nieprzecinających się dróg $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$ w U, które łączą punkty $q_1, \ldots, q_\mu$ z λ. Poprzez własność podnoszenia homotopii, droga α_k indukuje rodzinę dyfeomorfizmów

$$\phi_k : V_{q_k} \times [0,1] \to E,$$

$$\phi_k(\cdot, t) : V_{q_k} \to V_{\alpha(t)}.$$

W szczególności dyfeomorfizm $\phi_k(\cdot, 1) : V_{q_k} \to V_\lambda$ indukuje izomorfizm na grupach homologii. Oznaczmy przez $\Delta_k \in H_{n-1}(V_\lambda)$ obraz cyklu Λ_k przy tym przekształceniu.

Tak powstały ciąg $(\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu)$ nazywamy *wyróżnionym układem cykli znikających.*

Twierdzenie 1.6 (Brieskorn–Milnor)**.** *Włókno V_λ ma następujące grupy homologii:*

$$H_i(V_\lambda) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{gdy } i = 0 \\ \mathbb{Z}^\mu & \text{gdy } i = n-1 \\ 0 & \text{w pozostałych przypadkach} \end{cases}$$

Wyróżniony układ cykli znikających stanowi bazę $H_{n-1}(V_\lambda)$.

Uwaga. Przypomnijmy, że rozważamy przypadek wielowymiarowy $n \geqslant 2$. Nietrudno zauważyć, że w przypadku $n = 1$ twierdzenie również jest prawdziwe, o ile zastąpimy homologie absolutne homologiami zredukowanymi $\tilde{H}_*$.

Uwaga. O topologii włókna można powiedzieć więcej. Wykorzystując teorię Morse'a oraz twierdzenie Whiteheada, Milnor [M] wykazał, że V_λ jest homotopijne równoważne z bukietem μ sfer $S^{n-1} \vee \ldots \vee S^{n-1}$.

Przedstawimy dowód twierdzenia 1.6 w oparciu o [Ż]. Potrzebne nam będą jednak dwa lematy opisującę topologię $f^{-1}(D_\delta) \cap B_\rho$, a więc E z doklejonymi włóknami osobliwymi V_{z_k}. Przypomnijmy, że g było pierwotną funkcję z izolowanym punktem osobliwym w zerze, a $f = g_w$ jej morse'owskim zaburzeniem.

Lemat 1.3. *Przestrzenie $X = f^{-1}(D_\delta) \cap B_\rho$ i $Y = g^{-1}(D_\delta) \cap B_\rho$ są dyfeomorficznymi rozmaitościami z brzegiem.*

Dowód. Jak w dowodzie twierdzenia 1.5 rozpatrzmy odwzorowanie $G : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$:

$$G(x, w) = (g_w(x), w)$$

oraz podrozmaitość z brzegiem $W \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$:

$$W = (B_\rho \times \mathbb{C}^n) \cap G^{-1}(D_\delta \times \mathbb{C}^n)$$

Niech $p : W \to \mathbb{C}^n$ będzie obcięciem do W rzutowania na drugi czynnik $B_\rho \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Rzutowanie to jest oczywiście lokalnie trywialnym rozwłóknieniem. W jest otwartym podzbiorem $B_\rho \times \mathbb{C}^n$, więć także $p : W \to \mathbb{C}^n$ jest lokalnie trywialnym rozwłóknieniem, co oznacza, że jego włókna $p^{-1}(w) = X$ oraz $p^{-1}(0) = Y$ są dyfeomorficznymi podrozmaitościami W. $\square$

Lemat 1.4. *Przestrzeń $Y = g^{-1}(D_\delta) \cap B_\rho$ jest ściągalna.*

Dowód. Rozpocznijmy od spostrzeżenia, że włókno osobliwe $Y_0 = g^{-1}(0) \cap B_\rho$ jest ściągalne. Można wykazać nawet więcej: para (B_ρ, Y_0) jest homeomorficzna parze $(C(S_\rho), C(\partial Y_0))$, gdzie $C(X)$ oznacza stożek nad przestrzenią X oraz $S_\rho = \partial B_\rho$ jest sferą. W szczególności wynika stąd, że Y_0 jest ściągalne jako stożek nad pewną przestrzenią. Dowód tego faktu, zwanego niekiedy *twierdzeniem o strukturze stożkowej*, opiera się na następującym pomyśle: transwersalność przecięcia sfer S_ϵ z hiperpowierzchnią Y_0 (patrz lemat 1.1) pozwala łatwo skonstruować na $B_\rho \backslash \{0\}$ pole wektorowe, wskazujące w każdym punkcie w kierunku początku układu współrzędnych i styczne do rozmaitości $Y_0 \backslash \{0\}$ w jej punktach. Potok tego pola zadaje poszukiwany homeomorfizm. Szczegóły nietrudnego dowodu można znaleźć w [M].

Oczywiście dysk $D_\delta \subset \mathbb{C}$ można zdeformować do punktu 0. Gdyby udało się podnieść tę deformację do deformacji $Y \to Y_0$, dowód wobec powyższej uwagi byłby zakończony. Odwzorowanie $g : Y \to D_\delta$ nie jest jednak lokalnie trywialnym rozwłóknieniem (ze względu na wartość krytyczną w zerze). Wystarczy jednak wykazać, że jest rozwłóknieniem w sensie teorii homotopii (rozwłóknieniem Hurewicza), a własność podnoszenia homotopii zagwarantuje istnienie szukanego podniesienia.

Przypomnijmy, że warunkiem równoważnym, by $p : E \to X$ było rozwłóknieniem Hurewicza jest istnienie *funkcji podnoszącej drogi* $s : P(p) \to P(E)$, gdzie $P(p), P(E)$ oznaczają kocylindry odwzorowania p i przestrzeni E (patrz uzupełnienie 3.2). Odwzorowanie $g : Y \backslash Y_0 \to D_\delta \backslash \{0\}$ jest rozwłóknieniem Hurewicza (jako lokalnie trywialne rozwłóknienie), zatem istnieje funkcja podnosząca drogi w $D_\delta \backslash \{0\}$. Rozważmy punkt $z \in Y$ oraz drogę $\omega : I \to D_\delta$ zaczynającą się w $x = g(z) \in D_\delta$. Jeśli ω omija punkt 0, to możemy ją podnieść. Załóżmy więc, bez straty ogólności, że $\omega(1) = 0$ i $\omega([0,1)) \subset Y \backslash Y_0$. Podnosząc kolejno drogi ω_n będące obcięciem ω do odcinka $[0, 1 - \frac{1}{n}]$, otrzymamy jednostajnie zbieżną rodzinę odwzorowań w $Y \backslash Y_0$. Jej granica będzie otrzymanym podniesieniem drogi ω. Nietrudno sprawdzić, że tak skonstruowana funkcja podnosząca drogi jest ciągła, a więc istotnie odwzorowanie $p : E \to X$ jest rozwłóknieniem Hurewicza. □

Dowód twierdzenia 1.6. Niech $z_1, \dots, z_\mu$ będą wartościami krytycznymi, a $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$ ścieżkami łączącymi je z wartością regularną λ. Oznaczmy przez $A = \bigcup_i \alpha_i$ teoriomnogościową sumę wszystkich ścieżek, a przez $Z = g^{-1}(A) \cap B_\rho$ włókno nad A. Ponieważ A jest retraktem deformacyjnym D_δ, a $g : Y \to D_\delta$ jest, jak wykazaliśmy w poprzednim lemacie, rozwłóknieniem Hurewicza, przestrzeń Z jest retraktem deformacyjnym Y, a więc jest ściągalna.

Oznaczmy $A' = A \backslash \{z_1, \dots, z_\mu\}$ oraz $Z' = Z \backslash \bigcup_i V_{z_i}$. Ponieważ $Z' \to A'$ jest lokalnie trywialnym rozwłóknieniem nad ściągalną przestrzenią, jest rozwłóknieniem trywialnym. W szczególności $Z' \simeq V_\lambda \times A'$ i Z' jest homotopijnie równoważne włóknu V_λ.

Niech q_k będzie wartością regularną na ścieżce α_k bliską wartości krytycznej $z_k = g(x_k)$. Zgodnie ze stwierdzeniem 1.4 część Z w otoczeniu otoczeniu punktu krytycznego x_k można zdeformować do $V_{q_k} \cup D^n$, jednocześnie nie ruszając pozostałej części Z. Innymi słowy, przestrzeń Z jest homotopijnie równoważna przestrzeni Z' z dyskami $K_1, \dots, K_\mu$ doklejonymi w miejsce cykli znikających we włóknach $V_{q_1}, \dots, V_{q_\mu}$. Przy homotopijnej równoważności $Z' \sim V_\lambda$ odpowiada to zaklejeniu dyskami cykli $\Delta_1, \dots, \Delta_\mu$ w V_λ.

Rozważmy długi ciąg dokładny grup homologii dla pary (Z, Z'):

$$\ldots \to H_{k+1}(Z) \to H_{k+1}(Z, Z') \to H_k(Z') \to H_K(Z) \to \ldots$$

Ponieważ Z jest ściągalne, mamy $H_k(V_\lambda) \cong H_k(Z') \cong H_{k+1}(Z, Z')$. Jednak wobec homotopijnej równoważności $Z \sim Z' \cup \bigsqcup_i K_i$ para (Z, Z') jest homotopijnie równoważna rozłącznej sumie par $(K_i, \partial K_i) \simeq (D^n, \partial D^n)$, której grupy homologii rzecz jasna znamy – składają się one z jednej grupy $\mathbb{Z}$ dokładnie w wymiarze $i = n - 1$. Ponadto ich generatorem jest cykl relatywny $(K_i, \partial K_i)$, któremu w (Z, Z') odpowiada (K_i, Δ_i), natomiast we włóknie V_λ – cykl znikający Δ_i. $\square$

Przykład. W najprostszym przypadku funkcji morse'owskiej

$$f(z) = z_1^2 + \ldots + z_n^2$$

włókno regularne jest dyfeomorficzne z wiązką kul BS^{n-1} (patrz stwierdzenie 1.4), a wobec tego homotopijnie równoważne sferze S^{n-1}.

Przykład. Rozważmy przypadek hipereliptyczny

$$f(x, y) = y^2 + P(x),$$

gdzie $P(x)$ jest wielomianem o współczynnikach zespolonych stopnia $n > 2$. Załóżmy, że P jest generyczny w tym sensie, że pochodna $P'(x)$ nie ma pierwiastków wielokrotnych. Ponieważ gradient f ma postać

$$\nabla f(x, y) = [P'(x), 2y],$$

odwzorowanie f posiada dokładnie $n - 1$ punktów krytycznych $(x_1, 0), \ldots (x_{n-1}, 0)$, gdzie $x_1, \ldots x_{n-1}$ są różnymi pierwiastkami $P'(x)$. Zastępując ewentualnie P małym zaburzeniem, możemy założyć, że wartości krytyczne $P(x_1), \ldots, P(x_{n-1})$ są parami różne.

Niech $\lambda \in \mathbb{C}$ będzie wartością regularną f. Oznacza to, że wielomian $\lambda - P(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n)$ nie ma pierwiastków wielokrotnych, a włókno $f^{-1}(\lambda)$ jest powierzchnią Riemanna funkcji $\sqrt{\lambda - P(x)}$. Jeśli $n = 2g + 1$ lub $2g + 2$, jej genus jest równy g (patrz [F]). W przypadku parzystym punkt w nieskończoności jest regularny i posiada dwa punkty w przeciwobrazie, podczas gdy w przypadku nieparzystym jest on punktem rozgałęzienia z jednopunktowym przeciwobrazem. Wobec tego włókno regularne jest powierzchnią genusu g bez punktu w przypadku $n = 2g + 1$ oraz bez dwóch punktów w przypadku $n = 2g + 2$. Wobec tego w obu przypadkach włókno jest homotopijnie równoważne bukietowi $2g = n - 1$ okręgów.

Z drugiej strony możemy łatwo znaleźć liczbę Milnora, wykorzystując algebraiczną definicję. Istotnie, ideał gradientowy generowany jest przez wielomiany y oraz $P'(x)$, wobec tego algebra lokalna w dowolnym z punktów osobliwych $(0, x_0)$ posiada bazę postaci

$$1, (x - x_0), \ldots, (x - x_0)^{n-2},$$

a w związku z tym jej wymiar jest równy $\mu = n - 1$ i zgodnie z twierdzeniem Milnora krotność osobliwości zgadza się z liczbą okręgów w bukiecie.

W tym przypadku możemy łatwo opisać cykle znikające. Niech $z_1, \ldots, z_{n-1}$ będą wartościami krytycznymi f. Włókno regularne $f^{-1}(\lambda)$ jest podwójnym nakryciem płaszczyzny zespolonej $\mathbb{C}$ z wyjętymi n różnymi pierwiastkami wielomianu $\lambda - P(x)$, które są punktami rozgałęzienia. Oznaczmy je $a_1, \ldots, a_n$. Gdy zmieniamy λ, zbliżając się do jednej z wartości krytycznych z_i, dwa z pierwiastków, dajmy na to a_1 i a_2 schodzą się w jeden pierwiastek podwójny wielomianu $z_i - P(x)$. Rozważmy pętlę okrążającą jednokrotnie a_1 i a_2, lecz nie zawierającą pozostałych pierwiastków $\lambda - P(x)$. Ponieważ obiega ona dwa punkty rozgałęzienia, podnosi się do zamkniętej, nieściągalnej pętli w powierzchni Riemanna $f^{-1}(\lambda)$, która wraz ze zbliżaniem się λ do z_i degeneruje się do punktu we włóknie osobliwym $f^{-1}(z_i)$. W ten sposób, numerując odpowiednio pierwiastki a_i, otrzymamy $n - 1$ par $(a_1, a_2), (a_2, a_3), \ldots, (a_{n-1}, a_n)$, każdą odpowiadająca pewnej wartości krytycznej f oraz zamkniętej nieściągalnej pętli we włóknie regularnym. Pętle te są cyklami znikającymi.

Rozdział 2

Twierdzenie Picarda-Lefschetza

2.1. Operator monodromii

Rozważamy sytuację z poprzedniego paragrafu. Niech więc $g : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ będzie wielomianem z izolowanym punktem osobliwym w zerze, a f jego małym zaburzeniem morse'owskim. Niech

$$U = D_\delta \backslash \{z_1, \dots, z_\mu\}, \quad E = f^{-1}(U) \cap B_\rho,$$

przy czym $z_k = f(x_k)$, gdzie $x_1, \dots, x_\mu$ są jednokrotnymi punktami krytycznymi f w kuli B_ρ. Rozważamy rozwłóknienie Milnora $f : E \to U$.

Ustalmy punkt regularny $\lambda \in U$ wraz z układem nieprzecinających się ścieżek $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$ w D_δ łączących λ z wartościami krytycznymi $z_1, \dots, z_\mu$. Zgodnie z twierdzeniem 1.6 indukuje on bazę cyklów znikających $(\Delta_1, \dots, \Delta_\mu)$ generujących $(n-1)$. grupę homologii włókna regularnego $V_\lambda = f^{-1}(\lambda) \cap B_\rho$.

Rozważmy odwzorowanie $f : E \to U$ obcięte do brzegu $\partial E = E \cap S_\rho$, gdzie $S_\rho = \partial B_\rho$ jest małą sferą w $\mathbb{C}^n$. Przedłuża się ono do lokalnie trywialnego rozwłóknienia nad całym dyskiem D_δ, ponieważ S_ρ nie zawiera punktów krytycznych f. Włóknem tego rozwłóknienia nad λ jest ∂V_λ, a bazą – ściągalny dysk, zatem jest ono równoważne rozwłóknieniu trywialnemu $\partial V_\lambda \times D_\delta \to D_\delta$.

Definicja. Niech γ będzie pętlą w U o początku w punkcie λ. Zgodnie z zasadą podnoszenia homotopii istnieje 1-parametrowa rodzina dyfeomorfizmów

$$\Gamma : V_\lambda \times [0, 1] \to E$$

oznaczaną $\Gamma_t = \Gamma(\cdot, t)$, spełniająca następujące warunki:

1. $\Gamma_0 = \mathrm{id}$,
2. $\Gamma_t(V_\lambda) = V_{\gamma(t)}$,
3. Γ_t obcięte do brzegu ∂V_λ jest zgodne ze strukturą kartezjańską $\partial E \simeq \partial V_\lambda \times D_\delta$, to znaczy $\Gamma_t(\lambda, x) = (\gamma(t), x)$.

Dyfeomorfizm Γ_1 włókna regularnego V_λ w siebie nazywamy *przekształceniem monodromii*. Jest on wyznaczony z dokładnością do izotopii przez klasę homotopii pętli γ i na ogół nietrywialny, o ile γ jest nietrywialnym elementem $\pi_1(U, \lambda)$.

Definicja. *Operatorem monodromii* stowarzyszonym z pętlą γ nazywamy automorfizm

$$h_\gamma : H_{n-1}(V_\lambda) \to H_{n-1}(V_\lambda),$$

indukowany przez przekształcenie monodromii Γ_1. *Grupą monodromii* nazywamy obraz grupy podstawowej $\pi_1(U, \lambda)$ w $\mathrm{Aut}\,(H_{n-1}(V_\lambda))$ przy homomorfizmie $[\gamma] \to h_\gamma$.

Przypomnijmy, że rozważana funkcja f była zaburzeniem morse'owskim funkcji g z izolowaną osobliwością w zerze. Niech $W_\lambda = g^{-1}(\lambda) \cap B_\rho$ będzie włóknem regularnym rozwłóknienia Milnora dla g. Wówczas, sprzęgając operatory monodromii przez naturalny dyfeomorfizm między V_λ a W_λ, możemy traktować grupę monodromii jako podgrupę $\mathrm{Aut}\,(H_{n-1}(W_\lambda))$. W szczególności, jeśli γ jest pętlą w U obiegającą jednokrotnie wszystkie wartości krytyczne $z_1, \ldots, z_\mu$, to operator monodromii h_γ odpowiada w $\mathrm{Aut}\,(H_{n-1}(W_\lambda))$ operatorowi monodromii związanemu z pętlą obiegającą jednokrotnie izolowaną wartość krytyczną g (porównaj twierdzenie 1.5).

Wprowadza się również dwa inne, użyteczne operatory liniowe działające na homologiach.

Definicja. *Operator relatywnej monodromii* zdefiniowany jest jako automorfizm homologii relatywnych indukowany przez Γ_1 (zauważmy, że zgodnie z warunkiem (3) odwzorowanie Γ_1 działa identycznościowo na brzegu ∂V_λ)

$$h^r_\gamma : H_{n-1}(V_\lambda, \partial V_\lambda) \to H_{n-1}(V_\lambda, \partial V_\lambda).$$

Operator wariacji $\mathrm{var}_\gamma : H_{n-1}(V_\lambda, \partial V_\lambda) \to H_{n-1}(V_\lambda)$ określony jest wzorem

$$\mathrm{var}_\gamma = h^r_\gamma - \mathrm{id}.$$

Możemy wreszcie przejść do sformułowania głównego wyniku tego rozdziału, który wiąże określone powyższej operatory z ważnym niezmiennikiem topologicznym włókna V_λ – formą przecięcia. Niech $\tau_1, \ldots, \tau_\mu$ będzie ustalonym układem nieprzecinających się pętli o początku w λ takich, że τ_k okrąża raz z_k, nie okrążając pozostałych wartości krytycznych. Przypomnijmy, że $\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu$ są cyklami znikającymi stanowiącymi bazę homologii.

Przez (a, b) oznaczamy indeks przecięcia cykli a, b w $(n-1)$ homologiach relatywnych rozmaitości V_λ (która, przypomnijmy, ma wymiar $2n-2$). Definicję oraz podstawowe własności indeksu przecięcia można znaleźć w [B]. Niech ponadto $i_* : H_{n-1}(V_\lambda) \to H_{n-1}(V_\lambda, \partial V_\lambda)$ oznacza naturalne włożenie.

Twierdzenie Picarda-Lefschetza. *Dla każdego cyklu relatywnego* $a \in H_{n-1}(V_\lambda, \partial V_\lambda)$

$$\mathrm{var}_{\tau_i} a = (-1)^{n(n+1)/2} (a, \Delta_i) \Delta_i,$$

$$h^r_{\tau_i} a = a + (-1)^{n(n+1)/2} (a, \Delta_i) i_* \Delta_i,$$

natomiast dla każdego cyklu $b \in H_{n-1}(V_\lambda)$ *zachodzi*

$$h_{\tau_i} b = b + (-1)^{n(n+1)/2} (b, \Delta_i) \Delta_i.$$

Przedstawimy dalej dowód twierdzenia Picarda-Lefschetza w oparciu o [Ż]. Zauważmy najpierw, że dla najprostszego przypadku $\mu = 1$ funkcja g posiada tylko jeden punkt krytyczny, a jednowymiarowe homologie oraz homologie zredukowane włókna generowane są przez cykle Δ i ∇, odpowiednio (patrz stwierdzenie 1.4). Wówczas treść twierdzenia sprowadza się do następującego prostego wzoru, zwanego *formułą Picarda-Lefschetza*

$$\mathrm{var}_\tau \nabla = (-1)^{n(n+1)/2)} \Delta,$$

gdzie τ jest pętlą okrążającą jednokrotnie jedyną wartość krytyczną g.

Lemat 2.1. *Z formuły Picarda-Lefschetza wynika ogólne twierdzenie Picarda-Lefschetza.*

Dowód. Niech $W_i \simeq BS^{n-1}$ oznacza włókno morse'owskie nad punktem regularnym q_i w pobliżu wartości krytycznej z_i. Na mocy stwierdzenia 1.4, jego homologie oraz homologie relatywne w wymiarze $n-1$ generowane są odpowiednio przez cykl znikający Δ_i oraz dualny cykl relatywny ∇_i. Ponadto twierdzenie 1.6 daje izomorfizm

$$H_{n-1}(V_\lambda) \cong \bigoplus_i H_{n-1}(W_i),$$

a po wzięciu grup dualnych oraz skorzystaniu z dualności Poincarégo

$$H_{n-1}(V_\lambda, \partial V_\lambda) \cong \bigoplus_i H_{n-1}(W_i, \partial W_i).$$

Oznaczmy przez $\Theta_1, \ldots, \Theta_\mu$ cykle relatywne w V_λ odpowiadające przy tym izomorfizmie cyklom $\nabla_1, \ldots, \nabla_\mu$. Na mocy powyższej równości, stanowią one bazę homologii relatywnych. Ponieważ Θ_i jest cyklem dualnym do Δ_i, to $(\Theta_i, \Delta_j) = \delta_{ij}$. Jednocześnie przy monodromii wokół pętli τ_j dla $j \neq i$ cykle Δ_i oraz Θ_i pozostają nienaruszone, natomiast przy monodromii wokół τ_i cykl Θ_i pełni rolę ∇_i we włóknie morse'owskim. Jeśli więc spełniona jest formuła Picarda-Lefschetza w przypadku morse'owskim, to tożsamości z tezy twierdzenia Picarda-Lefschetza zachodzą dla $\Theta_1, \ldots, \Theta_\mu$, a więc i dla dowolnego cyklu relatywnego. □

W dowodzie twierdzenia Picarda-Lefschetza posłużymy się inną formą rozwłóknienia Milnora, zadaną wzorem 1.3. Niech $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}, 0)$ oznacza pierwotną (niezaburzoną) funkcję z izolowanym punktem krytycznym w zerze. Rozważmy małą sferę S_ϵ i $K = S_\epsilon \cap f^{-1}(0)$. Niech ponadto $T = S_\epsilon \cap \{|f| < \alpha\}$ będzie małym otoczeniem K w S_ϵ. Rozważamy lokalnie trywialne rozwłóknienie $\phi : S_\epsilon \backslash T \to S^1$ zadane wzorem

$$\phi(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}.$$

Przypomnijmy, że na mocy twierdzenia 1.5 wiązka $\phi : S_\epsilon \backslash T \to S^1$ jest równoważna wiązce $f : E \to U$ obciętej do małego okręgu $C \subset U$ o środku w zerze. Oznacza to w szczególności, że włókna $\phi^{-1}(1)$ oraz V_λ są dyfeomorficzne, a grupa monodromii działa na homologiach włókna $\phi^{-1}(1)$.

Twierdzenie Picarda-Lefschetza wiąże operator monodromii z formą przecięcia. W jego dowodzie wykorzystamy również inną formę dwuliniową określoną na grupach homologii.

Definicja. *Formą Seiferta* nazywamy formę dwuliniową L na $H_{n-1}(\phi^{-1}(1))$ zadaną wzorem

$$L(a, b) = l(a, (\Gamma_{1/2})_* b),$$

gdzie $l(x, y)$ oznacza współczynnik zaczepienia cykli x i y w sferze S_ϵ (definicję współczynnika zaczepienia można znaleźć w [B]), a dyfeomorfizm Γ_t dla $t \in [0, 1]$ określony został wcześniej.

Na mocy dualności Alexandera (patrz np. [B]) forma L jest niezdegenerowana.

Lemat 2.2. *Pomiędzy operatorem monodromii, formą Seiferta i formą przecięcia zachodzą następujące związki:*

1. $L(\mathrm{var}_\tau a, b) = (a, b)$,
2. $(a, b) = -L(a, b) + (-1)^n L(b, a)$,
3. $h_\tau = (-1)^n \mathrm{var}_\tau \left(\mathrm{var}_\tau^{-1}\right)^t$,
4. $h_\tau^r = (-1)^n \left(\mathrm{var}_\tau^{-1}\right)^t \mathrm{var}_\tau$,

przy czym utożsamiamy odpowiednie operatory z macierzami w pewnej ustalonej bazie homologii $H_{n-1}(\phi^{-1}(1))$, natomiast $(\cdot)^t$ oznacza operację transpozycji.

Dowód. Niech a będzie $(n-1)$-wymiarowym cyklem relatywnym w $\phi^{-1}(1)$, tzn. brzeg ∂a jest cyklem absolutnym w $\partial\phi^{-1}(1)$. Rozważmy n-wymiarowy cykl w sferze S_ϵ zadany przez odwzorowanie $A : [0, 1] \times a \to S_\epsilon$:

$$A(t, x) = \Gamma_t(x).$$

Brzeg cyklu A

$$\partial A = \Gamma_1(a) - a + A([0, 1] \times \partial a)$$

składa się z $\Gamma_1(a) - a = \mathrm{var}_\tau a$ oraz części zawartej w brzegu otoczenia tubularnego ∂T (zgodnie z warunkiem (3) z definicji dyfeomorfizmu Γ_t). Zatem w homologiach relatywnych $H_{n-1}(S_\epsilon \backslash T, \partial T)$ zachodzi równość $\partial A = \mathrm{var}_\tau a$. Przypomnijmy, że na mocy definicji współczynnika zaczepienia $l(\partial A, x) = (A, x)$ dla każdego $(n-1)$-cyklu x w S_ϵ.

Jeśli więc b jest cyklem absolutnym w $\phi^{-1}(1)$, to przecięcie A z $\Gamma_{1/2}(b)$ jest tym samym, co przecięcie $\Gamma_{1/2}(a) \cap \Gamma_{1/2}(b)$ i leży we włóknie $\phi^{-1}(-1)$. Mamy więc

$$L(\mathrm{var}_\tau a, b) = l(\mathrm{var}_\tau a, (\Gamma_{1/2})_* b) = (A, (\Gamma_{1/2})_* b) = ((\Gamma_{1/2})_* a, (\Gamma_{1/2})_* b),$$

gdzie ostatni indeks przecięcia liczony jest nie w sferze S_ϵ, lecz we włóknie $\phi^{-1}(-1)$. Oczywiście ponieważ $\Gamma_{1/2}$ jest dyfeomorfizmem zachowującym orientację,

$$\Big((\Gamma_{1/2})_* a, (\Gamma_{1/2})_* b\Big) = (a, b),$$

co kończy dowód punktu (1).

Ponieważ zarówno indeks przecięcia, jak i współczynnik zaczepienia wyznaczają niezdegenerowane formy dwuliniowe, z punktu (1) wynika, że operator wariacji jest odwracalny. Niech a oraz b będą cyklami absolutnymi w $H_{n-1}(\phi^{-1}(1))$. Istnieją cykle relatywne a' i b' takie, że $a = \mathrm{var}_\tau a'$ oraz $b = \mathrm{var}_\tau b'$.

Za pomocą łatwego rachunku sprawdzamy, że dla cykli relatywnych x i y zachodzi następująca relacja:

$$(\mathrm{var}_\tau x, \mathrm{var}_\tau y) + (x, \mathrm{var}_\tau y) + (\mathrm{var}_\tau x, y) = 0.$$

Wstawiając $x = a'$, $y = b'$ i wykorzystując punkt (1), otrzymujemy

$$(a, b) + L(a, b) + (-1)^{n-1} L(b, a) = 0,$$

co kończy dowód punktu (2).

Wobec $(x, y) = (i_* x, y)$ oraz punktów (1) i (2) mamy

$$i_* = -\mathrm{var}_\tau^{-1} + (-1)^n (\mathrm{var}_\tau^{-1})^t,$$

skąd

$$h_\tau = \mathrm{id} + \mathrm{var}_\tau i_* = \mathrm{id} - \mathrm{id} + (-1)^n \mathrm{var}_\tau (\mathrm{var}_\tau^{-1})^t.$$

Punkt (4) dowodzi się tak samo. □

2.2. Dowód twierdzenia

Rozważamy następującą sytuację: funkcja $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ wyraża się wzorem

$$f(z) = z_1^2 + \ldots + z_n^2,$$

a $\phi : S_\epsilon \backslash T \to S^1$ oznacza rozwłóknienie Milnora. Homologie włókna $\phi^{-1}(1)$ są generowane przez cykl absolutny Δ oraz cykl relatywny ∇ (patrz stwierdzenie 1.4). Orientujemy je w ten sposób, by $(\nabla, \Delta) = 1$. Oznaczmy przez $\tau(t) = e^{2\pi i t}$ pętlę okrążającą jednokrotnie wartość krytyczną 0. Naszym celem jest udowodnienie formuły Picarda-Lefschetza:

$$\mathrm{var}_\tau \nabla = (-1)^{n(n+1)/2} \Delta.$$

Lemat 2.3.

$$(\Delta, \Delta) = (-1)^{(n-1)(n-2)/2} \chi(S^{n-1}),$$

gdzie $\chi(S^{n-1})$ oznacza charakterystykę Eulera sfery S^{n-1}.

Dowód. Przypomnijmy, że włókno Milnora (bez brzegu) w przypadku morse'owskim jest dyfeomorficzne z wiązką styczną TS^{n-1} do sfery S^{n-1}. Jeśli przedstawimy TS^{n-1} w postaci

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1,\ x \cdot y = 0\},$$

to naturalna orientacja włókna, wyznaczona przez orientację $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, zadana jest przez porządek $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ i różni się od naturalnej orientacji TS^{n-1}, zadanej przez porządek $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$, o czynnik $(-1)^{(n-1)(n-2)/2}$ (ponieważ potrzebujemy dokładnie $1+2+\ldots+(n-1)$ transpozycji).

Cykl znikający Δ jest określony jako przekrój zerowy S^{n-1}. Wobec tego indeks samoprzecięcia (Δ, Δ) we włóknie jest równy z dokładnością do czynnika $(-1)^{(n-1)(n-2)/2}$ indeksowi samoprzecięcia S^{n-1} w wiązce stycznej TS^{n-1}, ten zaś, na mocy twierdzenia Poincarégo-Hopfa (patrz [M]), równy jest charakterystyce Eulera sfery $\chi(S^{n-1}) = 2$. □

Dowód w przypadku n nieparzystego. Rozważmy rodzinę dyfeomorfizmów

$$\Omega_t : \phi^{-1}(1) \to \phi^{-1}(e^{2\pi i t}),$$

$$\Omega_t(z) = e^{\pi i t} z.$$

Rodzina Ω_t nie spełnia warunku (3) z definicji 2.1, jednak odwzorowanie indukowane na homologiach $(\Omega_t)_*$ działa na cyklach absolutnych tak samo jak $(\Gamma_t)_*$, ponieważ oba odwzorowania Ω_t i Γ_t są homotopijne jako podniesienia pętli $\tau(t) = e^{2\pi i t}$ (jednocześnie odwzorowania indukowane na homologiach relatywnych będą różne, ponieważ Ω_t i Γ_t nie są homotopijne relatywnie $\partial\phi^{-1}(1)$).

Ponieważ $\Omega_1(z) = -z$, mamy

$$h_\tau \Delta = (\Omega_1)_* \Delta = (-1)^n \Delta,$$

stąd na mocy lematu 2.1 otrzymujemy

$$(-1)^n \Delta = h_\tau \Delta = \Delta + \mathrm{var}_\tau i_* \Delta.$$

Niech $m \in \mathbb{Z}$ będzie takie, że $i_* \Delta = m \nabla$. Wówczas

$$m = m(\nabla, \Delta) = (m\nabla, \Delta) = (i_* \Delta, \Delta) = (\Delta, \Delta) = 2(-1)^{(n-1)/2},$$

przy czym w ostatniej równości wykorzystaliśmy lemat 2.3 (w przypadku n parzystego otrzymalibyśmy $(\Delta, \Delta) = 0$). W połączeniu z poprzednim wzorem otrzymujemy zatem

$$-\Delta = \Delta + 2(-1)^{(n-1)/2} \mathrm{var}_\tau \nabla,$$

a więc ostatecznie $\mathrm{var}_\tau \nabla = (-1)^{(n+1)/2} \Delta$. □

Dowód w przypadku n parzystego. Na mocy lematu 2.2

$$(\mathrm{var}_\tau^{-1} \Delta, \Delta) = L(\Delta, \Delta) = l(\Delta, (\Gamma_{1/2})_* \Delta).$$

Zauważmy, że ponieważ Δ jest cyklem absolutnym, możemy ponownie posłużyć się odwzorowaniem $\Omega_{1/2}$ zamiast odwzorowania $\Gamma_{1/2}$. Mówiąc dokładniej, cykle $(\Gamma_{1/2})_* \Delta$ oraz $(\Omega_{1/2})_* \Delta$ wyznaczają tę samą klasę w grupie homologii $H_{n-1}(\phi^{-1}(-1))$ z przyczyny opisanej w poprzednim dowodzie. Wobec tego z definicji indeksu zaczepienia otrzymujemy

$$l(\Delta, (\Gamma_{1/2})_* \Delta) = l(\Delta, (\Omega_{1/2})_* \Delta) = (-1)^n (A, B),$$

gdzie A i B są cyklami w dysku D^{2n} o brzegach Δ oraz $(\Omega_{1/2})_* \Delta$ odpowiednio.

Przypomnijmy, że $\Omega_{1/2}$ jest mnożeniem przez i, a cykl Δ jest zdefiniowany jako klasa homologii podrozmaitości

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \|x\| = 1,\ y = 0\}$$

we włóknie regularnym

$$BS^{n-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \|x\| = 1,\ x \cdot y = 0,\ \|y\| \leqslant 1\}.$$

Za cykle A i B możemy więc wziąć, odpowiednio, klasy podrozmaitości zadanych wzorami

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \|x\| \leqslant 1,\ y = 0\},$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \mid x = 0,\ \|y\| \leqslant 1\}$$

w kuli $\{\|x\|^2 + \|y\|^2 \leqslant 1\}$, z orientacjami zadanymi przez $(x_1, \ldots, x_n)$ oraz $(y_1, \ldots, y_n)$ (zauważmy, że mnożenie przez i we współrzędnych rzeczywistych (x, y) oznacza przekształcenie $(x, y) \mapsto (-y, x)$, które zachowuje orientację). Mamy zatem $(A, B) = (-1)^{n(n-1)/2}$, ponieważ standardowa orientacja $\mathbb{R}^{2n}$ wyznaczona jest przez $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$, a w konsekwencji

$$(\mathrm{var}_\tau^{-1} \Delta, \Delta) = (-1)^{n(n+1)/2},$$

$$\mathrm{var}_\tau^{-1} \Delta = (-1)^{n(n+1)/2} \nabla,$$

co dowodzi wzoru Picarda-Lefschetza. □

2.3. Komentarze

Monodromia a indeks przecięcia

Twierdzenie 2.1. *W bazie cykli znikających macierz operatora klasycznej monodromii jest jednoznacznie wyznaczona przez macierz formy przecięcia i odwrotnie.*

Dowód. Dowód podamy za [Ż]. Niech τ oznacza pętlę okrążającą jednokrotnie wszystkie wartości krytyczne. Wówczas τ z dokładnością do homotopii można przedstawić jako złożenie $\tau_\mu \cdots \tau_1$ wszystkich pętli okrążających jednokrotnie po jednej wartości krytycznej, a operator klasycznej monodromii h_τ jako złożenie odpowiednich operatorów

$$h_\tau = h_{\tau_\mu} \cdot \ldots \cdot h_{\tau_1}.$$

Przypomnijmy nadto, że dla dowolnej pętli γ

$$h_\gamma = \mathrm{id} + \mathrm{var}_\gamma i_*.$$

Wobec tego formuła Picarda-Lefschetza dowodzi pierwszej części twierdzenia. Wykażemy teraz implikację odwrotną; pokażemy mianowicie, że w bazie cykli znikających macierz formy przecięcia jest jednoznacznie wyznaczona przez macierz operatora klasycznej monodromii.

Wyrażając operatory monodromii przez operatory wariacji, otrzymujemy

$$\mathrm{var}_\tau = \sum_{i_1 < \ldots < i_r, r \leqslant \mu} \mathrm{var}_{\tau_{i_1}} \cdot i_* \cdots i_* \cdot \mathrm{var}_{\tau_{i_r}}.$$

Niech $(\nabla_1, \ldots, \nabla_\mu)$ będzie bazą w homologiach relatywnych $H_{n-1}(V_\lambda, \partial V_\lambda)$ dualną w sensie Poincaré do bazy cykli znikających $(\Delta_1, \ldots, \Delta_\mu)$. Na mocy twierdzenia Picarda-Lefschetza spełniona jest tożsamość

$$\mathrm{var}_{\tau_i} \nabla_j = (-1)^{n(n+1)/2} \delta_{ij} \Delta_i.$$

Nietrudno zauważyć, że wstawiając ją do wzoru na var_τ, uzyskujemy wyrażenie następującej postaci

$$\mathrm{var}_\tau \nabla_i = (-1)^{n(n+1)/2} \Delta_i + \sum_{j<i} c_{ij} \Delta_j,$$

co oznacza, że macierz V operatora wariacji jest górnotrójkątna z samymi jedynkami (z dokładnością do znaku) na przekątnej. Na mocy lematu 2.2, macierz L formy Seiferta można wyrazić przez macierz V wzorem $L = V^{-1}$, a macierz monodromii $H = (-1)^n L^{-1} L^t$ jest iloczynem macierzy dolnotrójkątnej i górnotrójkątnej z jedynkami na diagonali. Stąd wynika już, że macierz H klasycznej monodromii jednoznacznie wyznacza L. Istotnie, zignorujmy dla ustalenia uwagi znak i załóżmy, że $H = AB^t$ dla innych macierzy górnotrójkątnych A i B z jedynkami na diagonali. Wówczas $AB^t = L^{-1}L^t$, skąd $LA = L^t(B^t)^{-1}$, co daje równość między macierzami górno- i dolnotrójkątnymi z jedynkami na diagonali, a wobec tego $A = L^{-1}$ oraz $B = L$.

By zakończyć dowód pozostaje zauważyć, że na mocy punktu (2) lematu 2.2 możemy wyrazić macierz formy przecięcia za pomocą macierz Seiferta L. $\square$

Topologia zbioru K

W klasycznej konstrukcji rozwłóknienia Milnora rozważaliśmy przecięcie $K = f^{-1}(0) \cap S_\epsilon$ hiperpowierzchni osobliwej z małą sferą o środku w punkcie osobliwym. Zgodnie z lematem 1.1 K jest $(2n-3)$-wymiarową gładką rozmaitością zanurzoną w $(2n-1)$-wymiarowej sferze. W szczególności dla $n = 2$ mamy do czynienia z sumą węzłów w sferze S^3 i okazuje się, że niezmienniki osobliwości są w istotny sposób powiązane z topologicznym aspektem zagadnienia, stanowiącym przedmiot badań teorii węzłów. Ponadto, na mocy twierdzenia o strukturze stożkowej, wspomnianego w dowodzie lematu 1.4 topologia i sposób zanurzenia K w S_ϵ wyznaczają całowicie topologię hiperpowierzchni $f^{-1}(0)$ w otoczeniu punktu osobliwego oraz jej położenie w $\mathbb{C}^n$. Obydwa ze wspomnianych faktów czynią topologię zbioru K interesującym tematem badań. Podstawowe rezultaty w tej dziedzinie zostały uzyskane przez Brieskorna i Phama, którzy rozważali wielomiany postaci $z_1^{a_1} + \ldots + z_n^{a_n}$, a następnie Milnora w przełomowej pracy [M].

Okazuje się, że operator klasycznej monodromii dostarcza wielu informacji na temat topologii K. Niech $\Delta(t)$ będzie wielomianem charakterystycznym operatora klasycznej monodromii. Dowodzi się, że ma on całkowite współczynniki. Oto niektóre z zaskakujących rezultatów, wiążących monodromię z topologią K.

Twierdzenie 2.2 (Milnor)**.** *Jeśli $n = 2$ i zbiór K jest spójny, to $\Delta(t)$ pokrywa się ze znanym z teorii węzłów wielomianem Alexandera węzła K.*

Twierdzenie 2.3 (Milnor)**.** *Dla $n \neq 3$ rozmaitość K jest topologiczną sferą wtedy i tylko wtedy, gdy $\Delta(1)$ jest równe 1 bądź -1.*

Twierdzenie 2.4 (Levine)**.** *W przypadku gdy n jest parzyste i K jest topologiczną sferą, liczba $\Delta(-1)$ w pełni wyznacza strukturę różniczkową K.*

Przykładowo, rozważając przecięcie małej sfery w $\mathbb{C}^5$ z hiperpowierzchnią

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^3 + z_5^{6k-1} = 0$$

dla $k = 1, 2, \ldots, 28$, można otrzymać wszystkie 28 struktur egzotycznych na sferze S^7.

Więcej na ten temat oraz dowody niektórych z powyższych twierdzeń można znaleźć we wspomnianej pracy [M].

Rozdział 3

Uzupełnienia

3.1. Zbiory algebraiczne

Zbierzmy wszystkie podstawowe definicje i fakty związane z rzeczywistymi i zespolonymi zbiorami algebraicznymi, z których będziemy korzystać. Wykorzystamy głównie źródło [M].

Przez $\mathbb{K}$ będziemy dalej oznaczać ciało liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ lub zespolonych $\mathbb{C}$. Niech $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ oznacza pierścień wielomianów n zmiennych o współczynnikach w $\mathbb{K}$.

Definicja. *Zbiorem algebraicznym* nazywamy podzbiór $V \subset \mathbb{K}^n$ określony jako zbiór wspólnych zer pewnej rodziny wielomianów z $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$. V nazywamy *hiperpowierzchnią*, jeśli jest zadane jako zbiór miejsc zerowych jednego wielomianu.

Niech V będzie zbiorem algebraicznym. Oznaczmy przez $I(V)$ ideał w $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ składający się ze wszystkich wielomianów zerujących się na V. Z twierdzenia Hilberta o bazie wynika, że $I(V)$ jest skończenie generowany jako $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$-moduł.

Niech $f_1, f_2, \ldots, f_k$ będa wielomianami generującymi $I(V)$. Oznaczmy przez ρ maksymalny rząd, jaki macierz $k \times n$ pochodnych cząstkowych $(\partial f_i/\partial x_j)$ osiąga na V.

Definicja. Punkt $x \in V$ nazywamy *regularnym*, jeśli macierz $(\partial f_i/\partial x_j)$ ma rząd ρ w x. W przeciwnym wypadku x nazywamy *punktem osobliwym*. Nietrudno zauważyć, że zarówno ρ, jak i własność bycia punktem regularnym nie zależy od doboru generatorów $f_1, \ldots, f_k$.

Zbiór punktów osobliwych V oznaczamy przez $\Sigma(V)$. Jest on właściwym pozdbiorem algebraicznym V.

Twierdzenie 3.1 (Whitney)**.** *Zbiór punktów regularnych $M = V \backslash \Sigma(V)$ jest gładką, a nawet $\mathbb{K}$-analityczną rozmaitością wymiaru $n - \rho$.*

Twierdzenie 3.2 (Whitney)**.** *Dla dowolnej pary zbiorów algebraicznych $W \subset V$ różnica $V \backslash W$ ma skończenie wiele składowych spójności. Co więcej, można ją przedstawić w postaci skończonej sumy rozłącznej*

$$V \backslash W = M_1 \sqcup M_2 \sqcup \ldots \sqcup M_p,$$

gdzie każde M_i jest gładką, spójną rozmaitością.

Dowody można znaleźć w [Wh]. Uproszczony dowód twierdzenia 3.2 znajduje się w [M].

Przypomnijmy, że punkt $x \in M$ nazywamy *punktem krytycznym* odwzorowania gładkiego $f : M \to N$ między rozmaitościami, jeśli różniczka $df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ nie jest epimorfizmem. Jeśli $\dim N = 1$, oznacza to po prostu $df_x = 0$. W przypadku, gdy M jest rozmaitością punktów regularnych zbioru algebraicznego, a f pochodzi od odwzorowania wielomianowego, pokażemy szczególną charakteryzację punktów krytycznych.

Potrzebny nam będzie najpierw następujący lemat. Przypomnijmy, że dla funkcji różniczkowalnej (w sensie rzeczywistym lub zespolonym) g przez dg oznaczamy 1-formę (rzeczywistą lub zespoloną)

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial g}{\partial x_n} dx_n.$$

Lemat 3.1. *Niech $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ będzie zbiorem otwartym, a $g : \Omega \to \mathbb{C}$ funkcją holomorficzną. Wówczas $z \in \Omega$ jest punktem krytycznym g jako odwzorowania rozmaitości gładkich wtedy i tylko wtedy, gdy $dg(z) = 0$, tzn. gdy pochodne cząstkowe $\partial g/\partial z_1, \ldots, \partial g/\partial z_n$ zerują się w z.*

Dowód. Wprowadźmy zmienne rzeczywiste: $z_k = u_k + iv_k$. Niech $g = g_1 + ig_2$. Punkt $z \in \Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ jest punktem krytycznym odwzorowania $g : \Omega \to \mathbb{R}^2$ wtedy i tylko wtedy, gdy macierz $2n \times 2$ pochodnych cząstkowych ma rząd mniejszy niż 2. Ale macierz ta składa się z n połączonych macierzy 2×2 postaci

$$A_k = \begin{bmatrix} \partial g_1/\partial u_k, & \partial g_1/\partial v_k \\ \partial g_2/\partial u_k, & \partial g_2/\partial v_k \end{bmatrix}.$$

Z równań Cauchy'ego-Riemanna wynika, że

$$\det A_k = \left(\frac{\partial g_1}{\partial u_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial g_1}{\partial v_k}\right)^2 = \left(\frac{\partial g_2}{\partial u_k}\right)^2 + \left(\frac{\partial g_2}{\partial v_k}\right)^2 = \left|\frac{\partial g}{\partial z_k}\right|^2.$$

Jeśli więc $dg(z) = 0$, to wszystkie pochodne cząstkowe po u_k, v_k zerują się i z jest punktem krytycznym g. Na odwrót, jeśli dla pewnego k pochodna cząstkowa $\partial g/\partial z_k$ nie zeruje się z, to macierz pochodnych cząstkowych zawiera nieosobliwy minor 2×2, ma więc rząd 2 i z jest punktem regularnym g. $\square$

Stwierdzenie 3.1. *Niech $g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ będzie funkcją wielomianową, a $M = V \setminus \Sigma(V)$ rozmaitością punktów regularnych zbioru algebraicznego V. Niech $f_1, f_2, \ldots f_k$ będą wielomianami rozpinającymi $I(V)$. Wówczas $x \in M$ jest punktem krytycznym $g_{|M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $dg(x)$ jest liniową kombinacją $df_1(x), df_2(x), \ldots, df_k(x)$.*

Dowód. Rozważmy najpierw przypadek rzeczywisty. Ustalmy $x \in M$. Mamy następującą charakteryzację przestrzeni stycznej:

$$T_xM = \bigcap_{i=1}^{k} \ker df_i(x).$$

Przypomnijmy prosty fakt z algebry liniowej:

Niech $\psi, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k$ będą funkcjonałami liniowymi. Wówczas $\bigcap_{i=1}^k \ker \phi_i \subset \ker \psi$ wtedy i tylko wtedy, gdy ψ jest kombinacją liniową $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k$.

Zauważmy ponadto, że $x \in M$ jest punktem krytycznym $g_{|M}$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T_xM \subset \ker dg(x)$. Stąd i z powyższego faktu natychmiast wynika teza stwierdzenia. $\square$

Jako wniosek otrzymujemy nastepującą, algebraiczną wersję twierdzenia Sarda:

Stwierdzenie 3.2. *Funkcja wielomianowa g obcięta do M ma co najwyżej skończenie wiele wartości krytycznych.*

Dowód. Rozważmy macierz

$$\begin{bmatrix} \partial g/\partial x_1 & \dots & \partial g/\partial x_n \\ \partial f_1/\partial x_1 & \dots & \partial f_1/\partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial f_k/\partial x_1 & \dots & \partial f_k/\partial x_n \end{bmatrix}.$$

Z poprzedniego stwierdzenia wynika, że $x \in M$ jest punktem krytycznym $g_{|M}$ dokładnie wtedy, gdy ta macierz ma rząd ρ. Oznaczmy przez C zbiór punktów krytycznych $g_{|M}$, a przez W zbiór tych punktów $x \in \mathbb{K}^n$, dla których powyższa macierz ma rząd $\leqslant \rho$. W jest zbiorem algebraicznym, bo wszystkie elementy macierzy są wielomianami, a warunek na rząd jest równoważny zerowaniu się pewnych minorów. Wynika stąd, że zbiór

$$C = W \cap M = W \cap V \backslash \Sigma(V)$$

jest różnicą zbiorów algebraicznych, a więc na mocy twierdzenia 3.2 ma przedstawienie postaci skończonej sumy rozłącznej

$$C = M_1 \sqcup M_2 \sqcup \ldots \sqcup M_p,$$

gdzi M_i są spójnymi rozmaitościami gładkimi (być może różnych wymiarów). Każdy punkt $x \in M_i$ jest punktem krytycznym odwzorowania $g_{|M}$, a więc także odwzorowania $g_{|M_i}$, bo $T_x M_i \subset T_x M$. Oznacza to, że funkcja g jest stała na każdej rozmaitości M_i, a zbiór wartości krytycznych

$$g(C) = g(M_1) \cup g(M_2) \cup \ldots \cup g(M_p)$$

jest skończony. □

3.2. Rozwłóknienia

Zacznijmy od pewnych pojęć z teorii homotopii. Dowody oraz więcej informacji można znaleźć na przykład w [B].

Odwzorowanie ciągłe $p : E \to B$ między przestrzeniami topologicznymi nazywami *rozwłóknieniem* (w sensie Hurewicza), gdy posiada następującą *własność podnoszenia homotopii*: dla dowolnej pary przekształceń $h : X \times I \to B$ oraz $H_0 : X \to E$ takiej, że $h(\cdot, 0) = p \circ H_0$ istnieje podniesienie $H : X \times I \to E$ takie, że $p \circ H = h$ oraz $H(\cdot, 0) = H_0$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "H_0"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, "h"] \arrow[ur, "H"] & B \end{tikzcd}$$

W szczególności oznacza to, że rozwłóknienia posiadają własność podnoszenia dróg (wystarczy wziąć za X przestrzeń jednopunktową). Okazuje się, że istnieje ciągłej funkcji podnoszącej drogi jest warunkiem wystarczającym na to, by przekształcenie było rozwłóknieniem.

W celu sformułowania stosownego twierdzenia wprowadźmy najpierw pewne oznaczenia. Niech ΩX oznacza przestrzeń dróg w przestrzeni X (tzn. przestrzeń odwzorowań ciągłych z odcinka w X wyposażoną w topologię zwarto-otwartą). Niech ponadto $P(X)$ oraz $P(f)$ oznaczają kocylindry, odpowiednio, przestrzeni X i przekształcenia $f : X \to Y$, tzn.

$$PX = \{(\omega, x) \in \Omega X \times X \mid \omega(0) = x\},$$

$$P(f) = \{(\eta, x) \in \Omega Y \times Y \mid \eta(0) = f(x)\}.$$

Zauważmy, że mamy naturalne odwzorowanie $\bar{f} : P(X) \to P(f)$ zadane wzorem

$$\bar{f}(\omega, x) = (f \circ \omega, x).$$

Twierdzenie 3.3. *Odwzorowanie $p : E \to B$ jest rozwłóknieniem Hurewicza wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja podnosząca drogi, tj. odwzorowanie ciągłe $s : P(p) \to P(E)$ takie, że $\bar{p} \circ s = \mathrm{id}$.*

Przejdźmy teraz do przypadku gładkich rozmaitości.

Definicja. Niech B będzie spójną rozmaitością, a E rozmaitością z brzegiem. Odwzorowanie gładkie $f : E \to B$ nazywamy *lokalnie trywialnym rozwłóknieniem*, jeśli dla każdego punktu $b \in B$ istnieje jego otwarte otoczenie U oraz dyfeomorfizm $\varphi : f^{-1}(b) \times U \to f^{-1}(U)$ takie, że $f \circ \varphi = \pi$, gdzie $\pi : f^{-1}(b) \times U \to U$ jest rzutowaniem na drugi czynnik iloczynu.

Ponadto jeśli $A \subset E$ jest podrozmaitością E, to $f : (E, A) \to B$ nazywamy *lokalnie trywialnym rozwłóknieniem pary* (E, A), gdy dyfeomorfizm φ można dobrać tak, by przeprowadzał $(f^{-1}(b) \cap A) \times U$ na $f^{-1}(U) \cap A$.

Twierdzenie 3.4. *Lokalnie trywialne rozwłóknienie jest rozwłóknieniem w sensie Hurewicza. Co więcej, jeśli homotopia jest gładka, to jej podniesienie również jest odwzorowaniem gładkim.*

Niech M, N będą rozmaitościami, a $f : M \to N$ gładkim odwzorowaniem. Przypomnijmy, że f jest *submersją w punkcie* $x \in M$, jeśli rózniczka $df_x : T_xM \to T_{f(x)}N$ jest epimorfizmem (w szczególności oznacza to, że $\dim N \leqslant \dim M$). Przekształcenie f nazywamy *submersją*, jeśli jest submersją w każdym punkcie $x \in M$.

Potrzebna nam będzie jeszcze następująca definicja:

Definicja. Przekształcenie $f : M \to N$ nazywamy *właściwym*, jeśli przeciwobraz każdego podzbioru zwartego N przy f jest zbiorem zwartym. W szczególności zawsze ma to miejsce, gdy M jest zwarta.

Twierdzenie Ehresmanna. *Jeżeli przekształcenie $f : E \to B$ jest właściwe oraz zarówno f, jak i obcięcie $f_{|\partial E} : \partial E \to B$ są submersjami, to $(E, \partial E) \to B$ jest lokalnie trywialnym rozwłóknieniem pary.*

Dowód można znaleźć w pracy [Wo].

Bibliografia

[B] G. E. Bredon, *Topology and Geometry*, 1993.

[J] P. Joubert, *The topology of isolated singularities on complex hypersurfaces*, Master's thesis at Leiden University, `http://www.math.leidenuniv.nl/scripties/Joubert.pdf`.

[F] O. Forster, *Lectures on Riemann surfaces*, 1981.

[M] J. Milnor, *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, 1974.

[Mo] S. Morita, *Geometry of Differential Forms*, 2001.

[Wh] H. Whitney, Elementary structure of real algebraic varieties, *Ann. Math.* **65** (1957) 3.

[Wo] J. A. Wolf, Differentiable fibre spaces and mappings compatible with Riemannian metrics, *Mich. Math. J.* **11** (1963), 65-70.

[Ż] H. Żołądek, *The Monodromy Group*, 2006.