# ESPACE HYPERBOLIQUE P-ADIQUE ET DYNAMIQUE DES FONCTIONS RATIONNELLES.

JUAN RIVERA-LETELIER

## Contents



## Introduction.

Fixons un nombre premier $p > 1$ et soient $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres $p$-adiques et $\mathbb{C}_p$ la plus petite extension complète et algébriquement close de $\mathbb{Q}_p$. Ce travail est dédié à la dynamique des fonctions rationnelles sur la droite projective $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ ; voir aussi [Hs], [Be1], [Be2], [R-L] et [Y].

Comme le corps $\mathbb{C}_p$ est algébriquement clos toute fonction rationnelle de degré au moins deux, à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, a une infinité de points périodiques dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$. On classifie ces points comme dans le cas complexe de la manière suivante : à chaque point périodique $z_0 \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ d'une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$, on associe son *multiplicateur* $\lambda = (R^n)'(z_0) \in \mathbb{C}_p$, où $n \geq 1$ est la période de $z_0$. Alors on dit que $z_0$ est *attractif*, *indifférent* ou *répulsif* selon que $|\lambda| < 1$, $|\lambda| = 1$ ou que $|\lambda| > 1$, respectivement.

**Théorème A.** *Si une fonction rationnelle de degré supérieur ou égal à deux, à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, a au moins deux points périodiques non-répulsifs (comptés avec multiplicité), alors elle en a une infinité.*

On peut comparer ce résultat avec le cas complexe pour lequel on sait (cf. [Sh], [Ep]) qu'une fonction rationnelle de degré $d > 1$, a au plus $2d-2$ cycles non-répulsifs.

Comme toute fonction rationnelle de degré $d \geq 1$ a $d+1 \geq 2$ points fixes, comptés avec multiplicité, le corollaire suivant est immédiat.

*Date*: Avril 21, 2001. Version corrigé, Decembre 2001.



Stony Brook IMS Preprint #2001/12
*December 2001*

**Corollaire.** *Une fonction rationnelle de degré au moins deux, à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, qui n'a pas de point fixe répulsif, a une infinité de points périodiques non-répulsifs.*

La preuve du Théorème A est basée sur la propriété suivante.

*Chaque fonction rationnelle induit une action sur l'espace hyperbolique $\mathbb{H}_p$, qui commute avec la composition.*

En d'autres termes, si $R$ et $Q \in \mathbb{C}_p(z)$ sont deux fonctions rationnelles, et si l'on note $R_*$, $Q_*$ et $(R \circ Q)_*$ les actions induites sur $\mathbb{H}_p$ par $R$, $Q$ et $R \circ Q$ respectivement, alors on a

$$(R \circ Q)_* = R_* \circ Q_*.$$

En particulier, si $R \in \mathbb{C}_p(z)$ est une fonction rationnelle alors $(R^n)_* = R_*^n$, pour tout entier $n \geq 1$. Apparement il n'y a pas d'analogue complexe de ces propriétés.

Une majeure partie de ce travail est consacrée à l'espace hyperbolique ($p$-adique) $\mathbb{H}_p$ et à l'étude de l'action sur $\mathbb{H}_p$ induite par une fonction rationnelle. L'espace hyperbolique $\mathbb{H}_p$ est munit d'une distance pour laquelle il est un arbre réel (au sense de J. Tits), séparable et complet. La situation est ici analogue au cas complexe puisque d'une part le groupe des automorphismes de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ agit par isométries sur $\mathbb{H}_p$ et d'autre part le bord à l'infini de $\mathbb{H}_p$ est canoniquement identifié à $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$.

Comme nous le verrons ultérieurement, la démonstration du Théorème A revient à montrer qu'il existe un point périodique répulsif dans l'espace hyperbolique ; voir Théorème A' plus bas.

Il y a des fonctions rationnelles qui n'ont pas de points répuslfis dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ ; considère par exemple le polynôme $z^p \in \mathbb{C}_p[z]$. Mais on a la propriété suivante.

**Théorème B.** *Toute fonction rationnelle de degré au moins deux, à coefficients dans $\mathbb{C}_p$, a un point fixe répulsif, soit dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, soit dans $\mathbb{H}_p$.*

Ce théorème est une contrepartie à la propriété suivante : toute fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ a un point fixe non-répulsif dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ ; voir [Be1]. En effet, si $R$ n'a pas de point fixe avec multiplicateur égal à 1, alors $R$ a exactement $\deg(R)+1$ points fixes et on a la formule d'indice

$$\frac{1}{1-\lambda_0} + \frac{1}{1-\lambda_1} + \cdots + \frac{1}{1-\lambda_{\deg(R)}} = 1,$$

où les $\lambda_i \in \mathbb{C}_p$ sont les multiplicateurs des points fixes ; voir [Be1] et [Mi]. Par la propriété ultramétrique, on ne peut pas avoir $|\lambda_i| > 1$ pour tout $0 \leq i \leq \deg(R)$.

Dans le théorème suivant on caractérise les fonctions rationnelles par le nombre de points périodiques dans $\mathbb{H}_p$. On identifie le corps résiduel de $\mathbb{C}_p$ à $\overline{\mathbb{F}}_p$, la fermeture algébrique du corps fini $\mathbb{F}_p$ de $p$ éléments. Alors on dit qu'une fonction rationnelle $\widetilde{R} \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$ est *inséparable* s'il existe une fonction rationnelle $\widetilde{Q} \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$ telle que $\widetilde{R}(z) = \widetilde{Q}(z^p)$.

**Théorème C.** *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle de degré au moins deux. Si l'action $R_*$ sur $\mathbb{H}_p$ induite par $R$ a au moins deux points périodiques dans $\mathbb{H}_p$, alors elle en a une infinité. De plus on a les propriétés suivantes.*

(1) *Si $R_*$ n'a pas de points périodiques dans $\mathbb{H}_p$, alors $R$ a un point fixe attractif dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ et tous les autres points périodiques de $R$ dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ sont répulsifs.*

(2) *Si $R_*$ a exactement un point périodique dans $\mathbb{H}_p$ alors, après changement de coordonnée, $R$ a une bonne réduction $\widetilde{R} \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$ qui est inséparable. Dans ce cas tous les points périodiques de $R$ dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ sont attractifs.*

Par exemple le polynôme $P(z) = z^d + c \in \mathbb{C}_p[z]$ est tel que $P_*$ n'a pas de points périodiques dans $\mathbb{H}_p$ si $|d^d c^{d-1}| > 1$ ; et il est tel que $P_*$ a unique point périodique dans $\mathbb{H}_p$ si $p|d$ et $|c| \leq 1$.

La notion de bonne réduction a été introduite par Morton et Silverman dans [MS] ; voir Section 5.1.

Finalement on montre une " Formule des Points Fixes " pour les fonction rationnelles, qui est un analogue au fait que toute fonction rationnelle de degré $d \geq 1$, différente de l'identité, a $d+1$ points fixes comptés avec multiplicité. Cette formule est valable pour toutes les fonctions rationnelles $R \in \mathbb{C}_p(z)$ de degré au moins 1 et elle compté, avec une multiplicité appropiée, les objects suivants.

(1) Les points fixes de $R$ dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ *qui ne sont pas indifférents.*
(2) Les points fixes *répulsifs* de $R_*$ dans $\mathbb{H}_p$.
(3) Les composantes analytiques du domaine de quasi-périodicité $\mathcal{E}(R) \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ qui sont fixées par $R$.

Le domaine de quasi-périodicité $\mathcal{E}(R) \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ (introduit dans [R-L]) est l'interieur de l'ensemble des points récurrents par $R$ et la notion de composante analytique remplace celle de composante connexe ; voir [R-L].

**Réduction d'une fonction rationnelle et l'espace hyperbolique.** Comme nous le verrons par la suite, l'action d'une fonction rationnelle sur l'espace hyperbolique $\mathbb{H}_p$ est étroitement reliée aux différentes réductions que la fonction rationnelle peut avoir ; voir Section 5.1 pour une définition de réduction.

Soit $\mathcal{O}_p = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z| \leq 1\}$ l'anneaux des entiers de $\mathbb{C}_p$ et soit $\mathfrak{m}_p = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z| < 1\}$ son idéal maximal. On identifie le corps résiduel $\mathcal{O}_p/\mathfrak{m}_p$ de $\mathbb{C}_p$ à $\overline{\mathbb{F}}_p$ et on note $\pi$ la projection de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ sur $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)$. On identifie aussi le groupe des automorphismes de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ au groupe $PGL(2, \mathbb{C}_p)$.

Fixons une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$. Pour chaque coordonnée de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ il existe une coordonnée à l'arrivée, dans laquelle $R$ a une réduction $\widetilde{R} \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$ non-triviale (c'est à dire avec $\deg(\widetilde{R}) \geq 1$) ; voir Section 5.1 pour une définiton de réduction. Cette coordonnée est unique, sauf post-composition par un élément de $PGL(2, \mathcal{O}_p)$. Par conséquent la fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ induit une action

$$R_* : PGL(2, \mathbb{C}_p)/PGL(2, \mathcal{O}_p) \longrightarrow PGL(2, \mathbb{C}_p)/PGL(2, \mathcal{O}_p)^1$$

de telle façon que pour $\mathcal{S} \in PGL(2, \mathbb{C}_p)/PGL(2, \mathcal{O}_p)$, *$R_*(\mathcal{S})$ est l'unique élément de $PGL(2, \mathbb{C}_p)/PGL(2, \mathcal{O}_p)$ tel que $R$ a une réduction non-triviale en coordonnées représentant $\mathcal{S}$ et $R_*(\mathcal{S})$.*

Il y a une distance naturelle dans $PGL(2, \mathbb{C}_p)/PGL(2, \mathcal{O}_p)$ et on peut définir l'espace hyperbolique $\mathbb{H}_p$ comme la complétion de cet espace métrique. Alors l'action $R_*$ induite par $R$ s'étend en une action sur $\mathbb{H}_p$, encore notée $R_*$.

---

[1] On remarque que $PGL(2, \mathcal{O}_p)$ n'est pas un sous-goupe normal de $PGL(2, \mathbb{C}_p)$ ; l'application $R_*$ est une application de classes lateraux.

Par exemple la propriété pour $R \in \mathbb{C}_p(z)$ d'avoir une réduction $\widetilde{R} \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$ non-triviale, se traduit par le fait que l'action $R_*$ sur $\mathbb{H}_p$ fixe le point de $\mathbb{H}_p$ correspondant à la coordonnée usuelle de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$. On note ce point $\mathcal{S}_{\text{can}}$ et on l'appelle *point canonique* de $\mathbb{H}_p$. C'est à dire qu' une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ a une réduction non-triviale si et seulement si le point $\mathcal{S}_{\text{can}}$ est fixé par $R_*$. Dans ce cas $R$ est semi-conjugée à $\widetilde{R}$ par la projection $\pi : \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) \longrightarrow \mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)$, sauf en un ensemble fini de classes résiduelles. Autrement dit il existe un ensemble fini $\Xi \subset \mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ tel que l'on ait le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - \pi^{-1}(\Xi) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p) - \Xi & \longrightarrow & \mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p) \\ & \widetilde{R} & \end{array}$$

Alors les différentes propriétés dynamiques de $\widetilde{R}$ se traduisent en propriétés dynamiques de $R$. Par exemple il n'est pas difficile de montrer que toute fonction rationnelle $\widetilde{R} \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$ de degré au moins 1 a une infinité de points périodiques ; cf. Appendice 1. Dans le cas où $\deg(\widetilde{R}) > 1$, ces points périodiques (sauf un nombre fini d'entre eux) se relèvent en points périodiques non-répulsifs de $R$ dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$.

La condition $\deg(\widetilde{R}) > 1$ est équivalente à ce que le point fixe $\mathcal{S}_{\text{can}} \in \mathbb{H}_p$ de $R_*$ soit *répulsif.* En général *l'existence d'un point périodique répulsif de $R_*$ dans $\mathbb{H}_p$, implique l'existence d'une infinité de points périodiques non-répulsifs de $R$ dans* $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ ; cf. Corollaire 5.5. Donc le Théorème A suit de la assertion suivante.

**Théorème A'.** *Si une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ a au moins deux points périodiques non-répulsifs dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, alors $R_*$ a un point périodique répulsif dans $\mathbb{H}_p$.*

**Remarques sur l'espace hyperbolique.** L'espace métrique $\mathbb{H}_p$ est un objet assez naturel et il apparaît dans la littérature sous divers formes. Par exemple il est un cas très particulier des immeubles de Bruhat-Tits (celui associé à $SL(2, \mathbb{C}_p)$) ; voir [BT], [T] et Appendice 2. L'analogie avec l'espace hyperbolique complexe et le plan hyperbolique est déjà explicite dans [Mu].

Il est aussi relié au espace analytique de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, au sens de V.G. Berkovich ; voir [Ber] (Remark 4.2.4 (v) et Chapter 5) et Appendice 2. On peut voir aussi [BHM] et [Es2]. Le fait qu'une fonction rationnelle induit une action sur cet espace suit de [Ber], on peut voir aussi [Bou] et [R-L].

On considère ici un traitement différent, qui convient mieux à l'etude de l'action d'une fonction rationnelle ; voir aussi la remarque dans la page 22 de [R-L].

**Plan de l'article.**

La *Section* 1 est consacrée à quelques rappels sur le corps $\mathbb{C}_p$.

Dans la *Section* 2 on définit l'espace hyperbolique. On introduit les bouts (*Section* 2.1), on décrit les points de l'espace hyperbolique (*Section* 2.2) et on considère la propriété de *séparation* (*Sections* 2.3 et 2.4) ; on peut comparer avec [R-L].

Dans la *Section* 3 on introduit la distance $d$ sur $\mathbb{H}_p$ et on montre que l'espace métrique $(\mathbb{H}_p, d)$ est complet (Proposition 3.2) et qu'il est un arbre réel au sens de J. Tits [T] (Proposition 3.7).

Dans la *Section* 4 on montre que chaque fonction rationnelle induit une action sur l'espace hyperbolique et on montre des propriétés locales de cette action. En particulier elle est lipschitzienne, avec constante égale au degré de la fonction rationnelle (Corollaire 4.7).

La *Section* 5 est dédiée aux Théorèmes A et B. On montre d'abord que tout point périodique répulsif dans $\mathbb{H}_p$ est rationnel (Proposition 5.4) et que l'existence d'un point périodique répulsif dans $\mathbb{H}_p$ implique celle d'une infinité de points périodiques non-répulsifs (Corollaire 5.5). La preuve des Théorèmes A et B est dans la *Section* 5.5.

La *Section* 6 contient un critère pour l'existence d'un point fixe dans $\mathbb{H}_p$ (Proposition 6.3). Il est utilisé dans la preuve du Théorème C pour "produire" des points périodiques.

Dans la *Section* 7 on considère l'ensemble exceptionnel (comme dans le cas complexe) de l'action d'une fonction rationnelle sur $\mathbb{H}_p$. On montre que cet ensemble contient au plus un élément et qu'il est non-vide si et seulement si la fonction rationnelle a une bonne réduction dans une coordonnée apropriée (Théorème 2).

Dans la *Section* 8 on étudie la propriété locale d'*inseparabilité* (de l'action sur $\mathbb{H}_p$ induite par une fonction rationnelle) qui est équivalente a ce que l'action soit localement expansive.

La *Section* 9 contient la démonstration du Théorème C. On réduit la démonstration du Théorème C à la Proposition C disant que l'existence d'un point périodique inséparable, qui ne soit pas exceptionnel, implique l'existence d'une infinité de points périodiques inséparables. La démonstration de cette proposition est analogue à la démonstration de Julia de la densité des points périodiques répulsifs.

Dans l'*Appendice* 1 on considère des propriétés des fonctions rationnelles à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$ (qui est isomorphe au corps résiduel de $\mathbb{C}_p$), qui est à caractéristique positive.

Dans l'*Appendice* 2 on fait quelques remarques sur l'espace hyperbolique. En particulier on considère son bord à l'infini et ces relations avec l'immeuble de Bruhat-Tits de $SL(2, \mathbb{C}_p)$ et avec l'espace analytique de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, au sens de V.G. Berkovich.

Dans l'*Appendice* 3 on montre la " Formule des Points Fixes ".

**Remerciements.** Je voudrais remercier J.C. Yoccoz avec qui j'ai eu des nombreuses discussions intéressantes et qui a influencé énormément ce travail. Mes remerciments vont aussi à R. Benedetto, E. Ghys et F. Paulin pour les références très utiles qu'ils m'ont indiquées, ainsi que pour d'enrichissantes discussions. R. Benedetto a aussi fait plusieurs remarques sur une version précédente de ce travail. Je remercie également A. Escassut qui m'a indique quelques références. Je remercie aussi G. Havard qui a fait des corrections d'orthographe pour l'introduction.

Je voudrais enfin remercier le Collège de France pour son hospitalité et la Universidad Católica del Norte pour sa générosité.

## 1. Préliminaires.

Soit $p > 1$ un nombre premier, $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres $p$-adiques et soit $\mathbb{C}_p$ la plus petite extension complète et algébriquement close de $\mathbb{Q}_p$.

On note $|\cdot|$ la norme sur $\mathbb{C}_p$ et $\mathbb{C}_p^* = \mathbb{C}_p - \{0\}$ le groupe multiplicatif de $\mathbb{C}_p$. On appelle

$$\begin{aligned} |\mathbb{C}_p^*| &= \{|z| \mid z \in \mathbb{C}_p^*\} \\ &= \{r > 0 \mid \log_p r \text{ est rationnel}\}. \end{aligned}$$

le *groupe de valuation* de $\mathbb{C}_p^*$. De plus on note dist la distance sur $\mathbb{C}_p$ induite par $|\cdot|$.

On note $\mathcal{O}_p = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z| \leq 1\}$ l'*anneau des entiers*. Alors $\mathfrak{m}_p = \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z| < 1\}$ est un ideal maximal de $\mathcal{O}_p$. Le corps $\widetilde{\mathbb{C}}_p = \mathcal{O}_p/\mathfrak{m}_p$ est appellé le *corps résiduel de* $\mathbb{C}_p$, qui est isomorphe à la fermeture algebrique $\overline{\mathbb{F}}_p$ du corps fini $\mathbb{F}_p$. On identifie $\widetilde{\mathbb{C}}_p$ à $\overline{\mathbb{F}}_p$.

Pour $z \in \mathcal{O}_p$ on note $\widetilde{z}$ la projection de $z$ dans $\overline{\mathbb{F}}_p$. Pour $\zeta \in \overline{\mathbb{F}}_p$ on pose $B(\zeta) = \{\widetilde{z} = \zeta\}$. Donc on a la partition,

$$\mathcal{O}_p = \sqcup_{\overline{\mathbb{F}}_p} B(\zeta).$$

1.1. **La droite projective.** On considère la droite projective $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, qui est l'ensemble des droites dans $\mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p$ passant par $(0,0)$. Pour $(x,y) \in \mathbb{C}_p \times \mathbb{C}_p - \{(0,0)\}$, on note $[x,y] \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ le point corresponant à la droite $\{(\lambda x, \lambda y) \mid \lambda \in \mathbb{C}_p\}$. On note $\infty$ le point $[1,0] \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ et on identifie $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - \{\infty\}$ avec $\mathbb{C}_p$, par l'application $[\lambda, 1] \longrightarrow \lambda$.

On étend la projection de $\mathbb{C}_p$ à $\overline{\mathbb{F}}_p$ à une projection de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) = \mathbb{C}_p \cup \{\infty\}$ à $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p) = \overline{\mathbb{F}}_p \cup \{\infty\}$, par $\widetilde{z} = \infty \in \overline{\mathbb{F}}_p$, pour $z \in \{|z| > 1\} \cup \{\infty\}$. On pose $B(\infty) = \{\widetilde{z} = \infty\} = \{|z| > 1\} \cup \{\infty\}$ et alors on a la partition

$$\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) = \sqcup_{\mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)} B(\zeta). \tag{1}$$

On a une correspondance entre $PGL(2, \mathbb{C}_p)$ et les automorphismes de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, telle que $\left(\begin{smallmatrix} a & c \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \in PGL(2, \mathbb{C}_p)$ correspond l'automorphsime de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ donné en coordonnées homogènes par $[x,y] \longrightarrow [ax + by, cx + dy]$.

Le sous-groupe $PGL(2, \mathcal{O}_p)$ de $PGL(2, \mathbb{C}_p)$ correspond à les automorphismes qui préservent la partition (1). De plus l'automorphisme de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ associé à $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in PGL(2, \mathcal{O}_p)$ préserve *chaque* élément de la partition (1), si et seulement si $|a-1| < 1$, $|d-1| < 1$, $|b| < 1$ et $|c| < 1$.

La *distance chordale* sur $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ est définit par,

$$\operatorname{dist}(\,[x,y],[x',y']\,) = \frac{|xy' - x'y|}{\max\{|x|,|y|\} \max\{|x'|,|y'|\}}$$

où en coordonnées,

$$\operatorname{dist}(z, z') = \frac{|z - z'|}{\max\{1, |z|\} \max\{1, |z'|\}},$$

voir [Ru] ou [MS]. Cette distance coïncide avec la distance induite par $|\cdot|$ sur $\mathcal{O}_p$. De plus un automrophsime de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ préserve la distance chordale, si et seulement si correspond à un élément de $PGL(2, \mathcal{O}_p)$.

1.2. **Boules et couronnes.** Etant donné $r \in |\mathbb{C}_p^*|$ et $a \in \mathbb{C}_p$ on appelle

$$\{z \in \mathbb{C}_p \mid |z-a| < r\} \text{ et } \{z \in \mathbb{C}_p \mid |z-a| \leq r\}$$

*boule ouverte de* $\mathbb{C}_p$ et *boule fermée de* $\mathbb{C}_p$, respectivement. Si $r \notin |\mathbb{C}_p^*|$ alors ces deux ensembles coïncident et on l'appelle *boule irrationnelle de* $\mathbb{C}_p$. Notons que par définition une boule $B$ de $\mathbb{C}_p$ est irrationnelle si et seulement si $\operatorname{diam}(B) \notin |\mathbb{C}_p^*|$ ; en particulier *si $B$ est ouverte ou fermée alors* $\operatorname{diam}(B) \in |\mathbb{C}_p^*|$.

Etant donnés deux boules $B$ et $B'$ de $\mathbb{C}_p$ il y a trois possibilités : soit $B \cap B' = \emptyset$, soit $B \subset B'$, soit $B' \subset B$.

L'image d'une boule ouverte (resp. fermée, irrationnelle) par un automorphisme de $\mathbb{C}_p$ est une boule de même nature.

Une boule ouverte (resp. fermée, irrationnelle) de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ est soit une boule de $\mathbb{C}_p$ de même nature, soit le complémentaire d'une boule fermée (resp. ouverte, resp. irrationnelle) de $\mathbb{C}_p$. *Pour ce qui suit le mot boule dénotera une boule de* $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$.

Etant donnés deux boules $B$ et $B'$ de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ il y a quatre possibilites : soit $B \cap B' = \emptyset$, soit $B \subset B'$, soit $B' \subset B$, soit $B \cap B' \neq \emptyset$ et $B \cup B' = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$.

Dans ce dernier cas les complémentaires de $B$ et $B'$ sont disjointes ; si $B$ et $B'$ ne sont pas fermées alors on dit que $B \cap B'$ est une *couronne*. Après changement de coordonnée, on peut supposer $B = \{|z| < r\}$ et $B' = \{|z| > r'\} \cup \{\infty\}$ avec $r' < r$ ; alors

$$B \cap B' = \{z \in \mathbb{C}_p \mid \log_p |z| \in (\log_p r', \log_p r)\}.$$

On note $\operatorname{mod}(B \cap B') = \log_p r - \log_p r' > 0$, qui ne dépend pas du choix de coordonnée, et on l'appelle le *module* de la couronne $B \cap B'$.

L'image d'une boule ouverte (resp. fermée, irrationnelle) par un automorphisme de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ est une boule de même nature.

## 2. Bouts et points de $\mathbb{H}_p$.

Dans cette section on définit les bouts (Section 2.1) et les points de l'espace hyperbolique $\mathbb{H}_p$ (Section 2.2) et on étudie la propriété de séparation (Sections 2.3 et 2.4). Les bouts et les points rationnels ont été considérés dans [R-L] ; les points rationnels ont été appelés *systèmes projectifs*.

Dans l'Appendice 2 on considère une défintion assez courte de $\mathbb{H}_p$.

2.1. **Bouts.** Soit $\{B_i\}_{i\geq 0}$ une suite croissante de boules fermées ou irrationnelles. Alors $B = \cup_{i\geq 0} B_i$ est soit une boule ouverte ou irrationnelle, soit égale à $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$. Donc $\{B - B_i\}_{i\geq 0}$ est soit une suite decroissante de couronnes, soit une suite decroissante de boules, respectivement. On appelle $\{B - B_i\}_{i\geq 0}$ *chaine évanescente.* Notons qu'on a

$$\cap_{i\geq 0}(B - B_i) = \emptyset$$

et par conséquent $B - B_i \subset \mathbb{C}_p$, pour $i$ assez grand. De plus $\operatorname{diam}(B - B_i)$ converge vers un nombre positive lorsque $i \to \infty$.

On dit que deux chaines évanescentes $\{B - B_i\}_{i\geq 0}$ et $\{B' - B'_i\}_{i\geq 0}$ sont *équivalentes* si pour tout $N \geq 0$ il existe $n \geq N$ tel que $B_N \subset B'_n$ et $B'_N \subset B_n$. Dans ce cas $B = B'$.

**Définition 2.1.** *Un* **bout** *est une classe de équivalence de chaines évanescentes.*

Soit $\mathcal{P}$ un bout et $\{B - B_i\}_{i\geq 0}$ une chaine évanescente définissante. Alors $B$ dépend seulement en $\mathcal{P}$ et on note $B_{\mathcal{P}} = B$.

Si $B_{\mathcal{P}} = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, alors on dit que $\mathcal{P}$ est un *bout singulier*. Sinon $B_{\mathcal{P}}$ est une boule ouverte ou irrationnelle qui est déterminé par $\mathcal{P}$. Si $B_{\mathcal{P}}$ est une boule ouverte (resp. irrationnelle) alors on dit que $\mathcal{P}$ est *rationnel* (resp. *irrationnel*). On a une correspondance entre les boules ouvertes (resp. irrationnelles) et les bouts rationnels (resp. irrationnels).

Chaque automorphisme $\varphi$ de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ induit une bijection sur les bouts rationnels (resp. irrationnels, singuliers). On note cette action par $\varphi_*$.

2.2. **Partitions de la droite projective et points de $\mathbb{H}_p$.** Un point de $\mathbb{H}_p$ est un ensemble de bouts, de telle façon que les points de $\mathbb{H}_p$ forment une partition de l'ensemble de bouts.

Il y a trois types de points de $\mathbb{H}_p$ : les points singuliers, rationnels et irrationnels.

2.2.1. *Points singuliers.* Les *points singuliers* de $\mathbb{H}_p$ sont les ensembles de la forme $\mathcal{S} = \{\mathcal{P}\}$, où $\mathcal{P}$ est un bout singulier.

2.2.2. *Points non-singuliers.* On dit que deux boules ouvertes ou irrationnelles $B_0$ et $B_1$ sont *associées*, si $B_0 \cap B_1 = \emptyset$ et si $B_0$ et $B_1$ sont maximales pour cette propriété. C'est-à-dire que si $i \in \{0, 1\}$ et $B_i'$ est une boule ouverte ou irrationnelle telle que $B_i \subset B_i'$ et $B_i' \cap B_{1-i} = \emptyset$, alors $B_i' = B_i$.

**Lemme 2.2.** *Soient $B_0$ et $B_1$ associées à $B$. Alors $B_0 = B_1$ où $B_0 \cap B_1 = \emptyset$. Dans ce dernier cas $B_0$ est associée à $B_1$.*

**Preuve.** La première assertion suit par maximalité. Supposons $B_0 \cap B_1 = \emptyset$. Soit $i \in \{0, 1\}$ et soit $B_i'$ une boule ouverte ou irrationnelle telle que $B_i \subset B_i'$ et $B_i' \cap B_{1-i} = \emptyset$. Alors $B \not\subset B_i'$, car $B_{1-i}$ est associée à $B$, donc $B_i' \cap B = \emptyset$. Par conséquent $B_i' = B_i$, car $B_i$ est associée à $B$. $\square$

Un point non-singulier $\mathcal{S}$ de $\mathbb{H}_p$ est un ensemble de bouts rationnels ou irrationnels tel que les boules $B_{\mathcal{P}_0}$ et $B_{\mathcal{P}_1}$ sont associées pour tous $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1 \in \mathcal{S}$ distincts, et maximal pour cette propriété. Dans ce cas on dit qu'une boule $B_{\mathcal{P}}$, avec $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$, est *associée* à $\mathcal{S}$.

Notons que l'union d'une suite croissante de boules ouvertes ou irrationnelles est une boule ouverte, une boule irrationnelle ou elle est égale à $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$. Par conséquent chaque point non-singulier $\mathcal{S}$ de $\mathbb{H}_p$ contient au moins deux éléments et on a la partition,

$$\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) = \sqcup_{\mathcal{S}} B_{\mathcal{P}}.$$

2.2.3. *Points irrationnels.* Les *points irrationnels* de $\mathbb{H}_p$ sont les ensembles de la forme $\{\mathcal{P}, \mathcal{P}'\}$ où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont des bouts irrationnels tel que $B_{\mathcal{P}} \sqcup B_{\mathcal{P}'} = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$.

Etant donné un bout irrationnel $\mathcal{P}$ les ensembles $B_{\mathcal{P}}$ et $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B_{\mathcal{P}}$ sont des boules irrationnelles et alors $\{\mathcal{P}, \mathcal{P}'\}$ est un point irrationnel de $\mathbb{H}_p$, où $\mathcal{P}'$ est le bout associé à $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B_{\mathcal{P}}$.

2.2.4. *Le point canonique.* Rappelons que pour $\zeta \in \mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ on noté $B(\zeta)$ la boule $\{z \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) \mid \widetilde{z} = \zeta\}$ ; voir Préliminaires. Donc on a la *partition canonique*

$$\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) = \sqcup_{\mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)} B(\zeta).$$

Soit $\mathcal{P}(\zeta)$ le bout correspondant à $B(\zeta)$. Alors il est facile de voir que $\mathcal{S}_{\text{can}} = \{\mathcal{P}(\zeta)\}_{\mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)}$ est un point non-singulier de $\mathbb{H}_p$. On l'appelle le *point canonique* de $\mathbb{H}_p$.

2.2.5. *Points rationnels.* Soit $\mathcal{P}$ un bout rationnel et soit $\varphi$ un automorphisme de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ tel que $\varphi(\{|z| < 1\}) = B_{\mathcal{P}}$. Alors $\mathcal{P} = \varphi_*(\mathcal{P}(0))$ et $\mathcal{S} = \{\varphi_*(\mathcal{P}(\zeta))\}_{\mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)}$ est le point (non-singulier) de $\mathbb{H}_p$ qui contient $\mathcal{P}$. On appelle $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ *point rationnel.* En particulier $\mathcal{S}_{\text{can}}$ est un point rationnel.

Notons que on a un paramétrage de $\mathcal{S}$ par $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ qui est unique, sauf changement de coordonnée projectif de $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)$.

2.2.6. *Définition de l'espace hyperbolique.*

**Définition 2.3.** *L'***espace hyperbolique** $p$**-adique***, qu'on note $\mathbb{H}_p$, est l'ensemble des points rationnels, irrationnels et non-singuliers. De plus on note $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ (resp. $\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$) l'ensemble des points rationnels (resp. non-singuliers) de $\mathbb{H}_p$.*

Dans la Section 3 on munit $\mathbb{H}_p$ d'un distance pour laquelle il est un arbre réel séparable et complet. Notons que $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ est dénombrable, car $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ est séparable.

Il est claire que chaque le groupe $PGL(2, \mathbb{C}_p)$ des automorphismes de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ agit sur $\mathbb{H}_p$, préservant $\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ et $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$. Cette action est transitive sur $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ et le stabilisateur du point $\mathcal{S}_{\text{can}}$ correspond au groupe $PGL(2, \mathcal{O}_p)$. Par conséquent on a une bijection entre $PGL(2, \mathbb{C}_p)/PGL(2, \mathcal{O}_p)$ et $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$.

Etant donné un automorphisme $\varphi$ de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ on note $\varphi_*$ l'action sur $\mathbb{H}_p$ induite par $\varphi$.

## 2.3. **Propriété de séparation.**

**Définition 2.4.** *Soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ et $X \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$.*

(1) *Si $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ est non-singulier et si $X$ intersect au moins deux boules associées à $\mathcal{S}$, alors on dit que $\mathcal{S}$ sépare $X$ et on note $\mathcal{S} \prec X$.*
(2) *Si $\mathcal{S} = \{\mathcal{P}\} \in \mathbb{H}_p$ est singulier et si pour toute chaine évanescente $\{D_i\}_{i \geq 0}$ définissant $\mathcal{P}$ on a $D_i \subset X$, pour $i$ assez grand, alors on note $\mathcal{S} \prec X$.*

Soient $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ et $X$, $Y \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$. Alors $\mathcal{S} \prec X$ et $X \subset Y$ implique $\mathcal{S} \prec Y$. D'autre part, si $\mathcal{S}$ est singulier, $\mathcal{S} \prec X$ et $\mathcal{S} \prec Y$ implique $X \cap Y \neq \emptyset$.

**Lemme 2.5.** *Soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ un point non-singulier et $B' \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ une boule telle que $\mathcal{S} \prec B'$. Alors il existe une unique boule $B$ associée à $\mathcal{S}$ telle que $B \not\subset B'$. Si de plus $B'$ est ouverte ou irrationnelle, alors $B \cap B' \neq \emptyset$ et $B \cap B'$ est une couronne.*

**Preuve.** Après changement de coordonnée on suppose $B' = \{|z| < r'\}$ ou $B' = \{|z| \leq r'\}$. Comme $\mathcal{S}$ sépare $B'$ il existe de boules distincts $B_0$ et $B_1$ associées à $\mathcal{S}$ qui intersectent $B'$. Alors $B_0 \cap B_1 = \emptyset$ et on peut supposer $B_0 \subset \mathbb{C}_p$ ; par conséquent $B_0 \subset B'$. Après changement de coordonnée on suppose $B_0 = \{|z| < r\}$, avec $r \leq r'$.

Par conséquent $B'$ ne contient pas la boule $B = \{|z| > r\} \cup \{\infty\}$, qui est associée à $\mathcal{S}$.

Si $B' = \{|z| \leq r'\}$ alors $\{|z| \leq r\} \subset B'$, donc $B'$ contient toutes les boules associées à $\mathcal{S}$ qui sont différentes de $B$.

Si $B' = \{|z| < r'\}$ alors $r < r'$, car $\mathcal{S}$ sépare $B'$. Donc $\{|z| \leq r\} \subset B'$ et par conséquent $B'$ contient toutes les boules associées à $\mathcal{S}$ qui sont différentes de $B$ ; de plus $B \cap B' = \{r < |z| < r'\} \neq \emptyset$ est une couronne. □

**Lemme 2.6.** *Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p$ de points distincts. Alors il existe un unique bout $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ tel que $\mathcal{S}' \prec B_{\mathcal{P}}$.*

**Preuve.** Si $\mathcal{S}$ est singulier le lemme est trivial, donc on suppose $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$.

1.– Supposons $\mathcal{S}' = \{\mathcal{P}'\}$ singulier. Soit $\{D_i'\}_{i\geq 0}$ une chaine évanescente définissant $\mathcal{P}'$. Il suffit de montrer qu'il existe une boule $B$ associée à $\mathcal{S}$ et $i \geq 0$ tel que $D_i' \subset B$, car dans ce cas pour toute chaine évanescente $\{\widetilde{D}_j'\}$ équivalente à $\{D_i'\}$ on a $\widetilde{D}_j' \subset D_i' \subset B$, pour $j$ assez grand.

Supposons par contradiction que pour tout $i \geq 0$ la boule $D_i'$ n'est pas contenue dans une boule associée à $\mathcal{S}$. C'est à dire $\mathcal{S} \prec D_i'$ pour $i \geq 0$. Soit $B$ la boule associée à $\mathcal{S}$ telle que $B \not\subset D_0'$ (Lemme 2.5). Comme pour $i \geq 0$ on a $D_i' \subset D_0'$ on obitient $B \not\subset D_i'$ et comme $\mathcal{S} \prec D_i'$ par hypothèse, on a $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B \subset D_i'$ par le Lemme 2.5. On obtient une contradiction car $\cap_{i\geq 0} D_i' = \emptyset$, puisque $\{D_i'\}_{i\geq 0}$ est une chaine évanescente.

2.– Supposons $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$. La unicité de $\mathcal{P}$ suit du Lemme 2.5.

Soit $B(\infty)$ (resp. $B'(\infty)$) la boule associée à $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}'$) contenant $\infty$ et posons $D = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B(\infty)$ (resp. $D' = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B'(\infty)$).

Notons que si une boule $\widetilde{B}$ contient $D'$ strictement, alors $\mathcal{S}'$ sépare $\widetilde{B}$.

Comme $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sont distincts on a $D \neq D'$ et par conséquent il y a trois possiblites.

- $D' \cap D = \emptyset$. Alors $D' \subset B(\infty)$ et par conséquent $\mathcal{S}'$ sépare $B(\infty)$.
- $D \subset D'$. Alors $B'(\infty) \subset B(\infty)$ et comme $B'(\infty) \neq B(\infty)$ la boule $B(\infty)$ intersecte une autre boule associée à $\mathcal{S}$. Donc $\mathcal{S}'$ sépare $B(\infty)$.
- $D' \subset D$. Comme $D \neq D'$ il existe une boule $B$ associée à $\mathcal{S}$ telle que $D' \subset B$. Donc $\mathcal{S}'$ sépare $B$. □

**Lemme 2.7.** *Soient $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ distincts. Soit $B$ (resp. $B'$) la boule associée à $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}'$) telle que $\mathcal{S}' \prec B$ (resp. $\mathcal{S} \prec B'$). Alors $B \cap B'$ est une couronne.*

**Preuve.** Par le Lemme 2.5 il existe une unique boule $\widetilde{B}$ associée à $\mathcal{S}$ telle que $\widetilde{B} \not\subset B'$ et $\widetilde{B} \cap B'$ est une couronne. Donc $\mathcal{S}'$ sépare $\widetilde{B}$ et par conséquent $B = \widetilde{B}$. □

2.4. **Propriété de séparation dans $\mathbb{H}_p$.** Fixons un point $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$. Par le Lemme 2.6 chaque point $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p$ différent de $\mathcal{S}$, détermine un bout $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ tel que $\mathcal{S}' \prec B_{\mathcal{P}}$.

Comme $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) = \sqcup_{\mathcal{S}} B_{\mathcal{P}}$ est une partition de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, chaque point $z' \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ détermine un bout $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ tel que $z' \in B_{\mathcal{P}}$. On note $z' \prec B_{\mathcal{P}}$.

**Définition 2.8.** *Soient $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1 \in \mathbb{H}_p \cup \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ et $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ des points différents. Pour $i = 0, 1$ soit $\mathcal{P}_i \in \mathcal{S}$ le bout tel que $\mathcal{S}_i \prec B_{\mathcal{P}_i}$. On dit que $\mathcal{S}$ est* **entre** *$\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$ si $\mathcal{P}_0 \neq \mathcal{P}_1$. On dit aussi que $\mathcal{S}$* **sépare** *$\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$.*

*On note $(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1) \subset \mathbb{H}_p$ l'ensemble de tous les points entre $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$. De plus on pose $[\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1) = (\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_0] = (\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1) \cup \{\mathcal{S}_0\}$ et $[\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1] = [\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1) \cup \{\mathcal{S}_0\}$.*

Notons que un point $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ peut séparer deux éléments de $\mathbb{H}_p \cup \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ seulement si $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$. Cette définition généralise la Définition 2.4 dans le sense que un point $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ sépare deux points $z_0$ et $z_1 \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ distincts, si et seulement si $\mathcal{S}$ sépare l'ensemble $\{z_0, z_1\} \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ (dans le sense de la Définition 2.4).

**Lemme 2.9.** *Soient $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1 \in \mathbb{H}_p$ des points distincts et $\mathcal{S} \in (\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1)$. Alors on a les propriétés suivantes.*

(1) *Si $\mathcal{P} \in \mathcal{S}_1$ est le bout tel que $\mathcal{S} \prec B_{\mathcal{P}}$, alors $\mathcal{S}_0 \prec B_{\mathcal{P}}$.*
(2) *$(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1) - \{\mathcal{S}\} = (\mathcal{S}_0, \mathcal{S}) \sqcup (\mathcal{S}, \mathcal{S}_1)$.*

**Preuve.** Soient $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1 \in \mathcal{S}$ les bouts distincts tel que $\mathcal{S}_0 \prec B_{\mathcal{P}_0}$ et $\mathcal{S}_1 \prec B_{\mathcal{P}_1}$.

1.– D'après le Lemme 2.7 on a $B_{\mathcal{P}} \cap B_{\mathcal{P}_1} \neq \emptyset$, donc $B_{\mathcal{P}_0} \subset B_{\mathcal{P}}$ (Lemme 2.5). Comme $\mathcal{S} \prec B_{\mathcal{P}_0}$ on a $\mathcal{S} \prec B_{\mathcal{P}}$.

2.– Considérons $\mathcal{S}' \in (\mathcal{S}_0, \mathcal{S})$ et soient $\mathcal{P}'_0, \mathcal{P}' \in \mathcal{S}'$ les bouts distincts tel que $\mathcal{S}_0 \prec B_{\mathcal{P}'_0}$ et $\mathcal{S}' \prec B_{\mathcal{P}'}$. Par la partie 1, avec $\mathcal{S}_1 = \mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}_1$, on a $\mathcal{S}_1 \prec B_{\mathcal{P}'}$. Donc $\mathcal{S}' \in (\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1)$. De la même façon on a $(\mathcal{S}, \mathcal{S}_1) \subset (\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1)$.

D'autre part soit $\mathcal{S}' \in (\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1)$ différent de $\mathcal{S}$ et soient $\mathcal{P}'_0, \mathcal{P}'_1 \in \mathcal{S}'$ les bouts tel que $\mathcal{S}_0 \prec B_{\mathcal{P}'_0}$ et $\mathcal{S}_1 \prec B_{\mathcal{P}'_1}$. Comme $\mathcal{S}_i \prec B_{\mathcal{P}_i}$ et $\mathcal{S}_i \prec B_{\mathcal{P}'_i}$ on a $B_{\mathcal{P}_i} \cap B_{\mathcal{P}'_i} \neq \emptyset$, pour $i = 0, 1$.

Si $B_{\mathcal{P}_0} \cap B_{\mathcal{P}'_1} \neq \emptyset$ alors $\mathcal{S} \prec B_{\mathcal{P}'_1}$ et par conséquent $\mathcal{S}' \in (\mathcal{S}_0, \mathcal{S})$. Supposons alors $B_{\mathcal{P}_0} \cap B_{\mathcal{P}'_1} = \emptyset$. Dans une coordonnée telle que $0 \in B_{\mathcal{P}_0}$ et $\infty \in B_{\mathcal{P}'_1}$ on a $B_{\mathcal{P}_0} = \{|z| < r\}$ et $B_{\mathcal{P}'_1} = \{|z| > r'\} \cup \{\infty\}$, où $r' > r > 1$. Comme $B_{\mathcal{P}_i} \cap B_{\mathcal{P}'_i} \neq \emptyset$, pour $i = 0, 1$, on a $B_{\mathcal{P}'_0} = \{|z| < r'\}$ et $B_{\mathcal{P}_1} = \{|z| > r\} \cup \{\infty\}$. Donc $\mathcal{S} \prec B_{\mathcal{P}'_0}$ et par conséquent $\mathcal{S}' \in (\mathcal{S}, \mathcal{S}_1)$. $\square$

**Lemme 2.10.** *Soient $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2 \in \mathbb{H}_p \cup \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ de points différents tel que $\mathcal{S}_i$ n'est pas entre $\mathcal{S}_j$ et $\mathcal{S}_k$, pour tous les choix de $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$. Alors il existe un unique point $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ tel que $\mathcal{S}$ est entre $\mathcal{S}_i$ et $\mathcal{S}_j$, pour chaque paire $0 \le i < j \le 2$. Dans ce cas $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$.*

**Preuve.** Si $\mathcal{S}_i \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ soit $B_i$ la boule associée à $\mathcal{S}_i$ telle que $\mathcal{S}_j \prec B_i$ et $\mathcal{S}_k \prec B_i$ ; on pose $D_i = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B_i$. Dans le cas $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ pour chaque paire $0 \le i < j \le 2$, $B_i \cap B_j$ est une couronne (Lemme 2.7), donc $D_0$, $D_1$ et $D_2$ sont disjoints deux à deux.

Pour chaque $0 \le i \le 2$ tel que $\mathcal{S}_i \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ ou tel que $\mathcal{S}_i \in \mathbb{H}_p$ soit un point singulier, on choisit une boule irationnelle $D_i$ telle que $\mathcal{S}_i \prec D_i$, de telle façon que les boules $D_0$, $D_1$ et $D_2$ soient deux à deux disjoints. Après changement de coordonnée on suppose $0 \in D_0$, $1 \in D_1$ et $\infty \in D_2$. Donc $D_0 \subset B(0)$, $D_1 \subset B(1)$ et $D_2 \subset B(\infty)$ et par conséquent $\mathcal{S}_{\text{can}}$ est entre $\mathcal{S}_i$ et $\mathcal{S}_j$, pour chaque paire $0 \le i < j \le 2$.

Supposons d'autre part que $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ est un point entre $\mathcal{S}_i$ et $\mathcal{S}_j$, pour chaque paire $0 \le i < j \le 2$. Considérons le bout $\mathcal{P}_i \in \mathcal{S}$ tel que $\mathcal{S}_i \prec B_{\mathcal{P}_i}$ (Lemme 2.6), pour $i = 0, 1, 2$. Alors par hypothèse les bouts $\mathcal{P}_i$ sont deux à deux disjoints et par consèquent $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$. D'autre part on a $D_i \cap B_{\mathcal{P}_i} \neq \emptyset$ car $\mathcal{S}_i \prec D_i$. Si $B_{\mathcal{P}_i}$ ne contient pas $D_i$ alors $D_j$, $D_k \subset B_{\mathcal{P}_i}$, pour $\{i, j, k\} = \{0, 1, 2\}$ (cf. Lemme 2.5) ; mais ceci implique $B_{\mathcal{P}_j} \cap B_{\mathcal{P}_i} \neq \emptyset$, qui est une contradiction. Donc $D_i \subset B_{\mathcal{P}_i}$. De plus $B_{\mathcal{P}_0}$ ne contient pas 1 et $\infty$, et par conséquent $B_{\mathcal{P}_0} \subset B(0)$. De la même façon on a $B_{\mathcal{P}_1} \subset B(1)$ et $B_{\mathcal{P}_2} \subset B(\infty)$. Donc $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{can}}$. $\square$

**Lemme 2.11.** *Soit $\mathcal{P}$ un bout et soient $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1 \in \mathbb{H}_p$ des points distincts tel que $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1 \prec B_{\mathcal{P}}$. Alors il existe un point $\overline{\mathcal{S}} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ tel que $\overline{\mathcal{S}} \prec B_{\mathcal{P}}$ et tel que $[\mathcal{S}_0, \mathcal{S}) \cap [\mathcal{S}_1, \mathcal{S}) = [\overline{\mathcal{S}}, \mathcal{S})$, où $\mathcal{S}$ est le point de $\mathbb{H}_p$ contenant $\mathcal{P}$.*

**Preuve.** L'assertion est triviale si $\mathcal{S}_0 \in (\mathcal{S}_1, \mathcal{S})$ ou si $\mathcal{S}_1 \in (\mathcal{S}_0, \mathcal{S})$. Donc on suppose que $\mathcal{S}_0$ (resp. $\mathcal{S}_1$) n'est pas entre $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}$ (resp. entre $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}$). Comme $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1 \prec B_{\mathcal{P}}$ et $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$, le point $\mathcal{S}$ n'est pas entre $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$. Alors par le Lemme 2.10 il existe un point $\overline{\mathcal{S}} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ qui est entre $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$ et entre $\mathcal{S}_i$ et $\mathcal{S}$, pour $i = 0, 1$. Donc on a $\overline{\mathcal{S}} \prec B_{\mathcal{P}}$, $(\mathcal{S}_i, \mathcal{S}) = (\mathcal{S}_i, \overline{\mathcal{S}}) \sqcup [\overline{\mathcal{S}}, \mathcal{S})$, pour $i = 0, 1$, et $(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1) - \{\overline{\mathcal{S}}\} = (\mathcal{S}_0, \overline{\mathcal{S}}) \sqcup (\overline{\mathcal{S}}, \mathcal{S}_1)$ (Lemme 2.9).

Considérons $\mathcal{S}' \in (\mathcal{S}_1, \overline{\mathcal{S}})$. Alors $\mathcal{S}'$ est entre $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}$ et entre $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_0$. Par l'unicité de $\overline{\mathcal{S}}$ (cf. Lemme 2.10) on conclut que $\mathcal{S}'$ n'est pas entre $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}$. De la même façon on a que $(\mathcal{S}_0, \overline{\mathcal{S}}) \subset (\mathcal{S}_0, \mathcal{S})$ est disjoint de $(\mathcal{S}_1, \mathcal{S})$. Donc $(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}) \cap (\mathcal{S}_1, \mathcal{S}) = [\overline{\mathcal{S}}, \mathcal{S})$. $\square$

## 3. Distance sur $\mathbb{H}_p$.

Dans cette section on définit une distance $d$ sur $\mathbb{H}_p$ (Lemme 3.1) telle que $(\mathbb{H}_p, d)$ est complet et $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ est dense dans $\mathbb{H}_p$ (Proposition 3.2 et voir aussi Lemme 3.3). En particulier $\mathbb{H}_p$ est séparable car $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ est dénombrable.

On montre aussi que l'espace métrique $(\mathbb{H}_p, d)$ est un arbre réel au sense de J. Tits (Proposition 3.7), voir [T] et [P] pour la définition d'arbre réel.

Dans l'Appendice 2 on donne une définition assez courte de l'espace métrique $(\mathbb{H}_p, d)$.

Considérons des points non-singuliers $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ distincts. Soit $B$ la boule associée à $\mathcal{S}$ telle que $\mathcal{S}' \prec B$ et soit $B'$ la boule associée à $\mathcal{S}'$ telle que $\mathcal{S} \prec B'$. Par le Lemme 2.7, $B \cap B'$ est une couronne. On définit

$$d(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = \operatorname{mod}(B \cap B').$$

Alors il est facile de voir que si $D$ (resp. $D'$) est une boule de $\mathbb{C}_p$ associée à $\mathcal{S}$ (resp. $\mathcal{S}'$) on a

$$d(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = \log_p \frac{\operatorname{diam}(D \cup D')^2}{\operatorname{diam}(D)\operatorname{diam}(D')}. \tag{2}$$

Considérons maintenant $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ non-singulier et $\mathcal{S}' = \{\mathcal{P}'\} \in \mathbb{H}_p$ singulier. Soit $B$ la boule associée à $\mathcal{S}$ telle que $\mathcal{S}' \prec B$ et soit $\{\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B'_i\}_{i \geq 0}$ une chaine évanescente déffinisant $\mathcal{P}'$. On suppose les boules $B'_i$ irrationnelles. Alors $D'_i = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B'_i \subset B$, pour $i$ assez grand. Donc $\{B \cap B'_i\}_{i \gg 1}$ est une suite croissante de couronnes. On pose

$$d(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = \lim_{i \to \infty} \operatorname{mod}(B \cap B'_i).$$

Comme $D'_i \subset \mathbb{C}_p$ pour $i$ assez grand et $\operatorname{diam}(D'_i) \to r' > 0$, on a $d(\mathcal{S}, \mathcal{S}') < \infty$.

De façon équivalente, si $D$ une boule associée à $\mathcal{S}$ contenue dans $\mathbb{C}_p$ on a

$$d(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = \lim_{i \to \infty} \log_p \frac{\operatorname{diam}(D \cup D'_i)^2}{\operatorname{diam}(D)\operatorname{diam}(D'_i)}.$$

On peut définir $d(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ quand les points $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p$ sont singuliers de façon analogue.

Pour $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ on pose $d(\mathcal{S}, \mathcal{S}) = 0$ ; notons qu'on a $d(\mathcal{S}, \mathcal{S}') > 0$ quand $\mathcal{S} \neq \mathcal{S}'$.

Le lemme suivant montre que $d$ définе une distance sur $\mathbb{H}_p$. Comme le module d'une couronne est invariant par les automorphismes de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, chaque automorphisme de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ induit une isométrie sur $\mathbb{H}_p$.

**Lemme 3.1.** *Soient $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ de points distincts. Alors*

$$d(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1) \leq d(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}) + d(\mathcal{S}, \mathcal{S}_1),$$

*avec égalité si et seulement si $\mathcal{S}$ est entre $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$.*

**Preuve.** Supposons que $\mathcal{S}$ est entre $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$. Alors $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ et après changement de coordonnée on peut supposer que $\mathcal{S}$ est associé à $B = \{|z| < r\}$, $\mathcal{S}_0 \prec B$ et $\mathcal{S}_1 \prec \{|z| > r\} \cup \{\infty\}$.

Soient $D_0$ et $D_1$ des boules tel que $D_0 \subset B$ et $D_1 \subset \{|z| > r\}$. Alors $\mathrm{diam}(D_0 \cup B) = \mathrm{diam}(B)$ et $\mathrm{diam}(B \cup D_1) = \mathrm{diam}(D_0 \cup D_1)$. Par conséquent

$$\frac{\mathrm{diam}(D_0 \cup B)^2}{\mathrm{diam}(D_0)\mathrm{diam}(B)} \cdot \frac{\mathrm{diam}(B \cup D_1)^2}{\mathrm{diam}(B)\mathrm{diam}(D_1)} = \frac{\mathrm{diam}(D_0 \cup D_1)^2}{\mathrm{diam}(D_0)\mathrm{diam}(D_1)}.$$

Dans le cas $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1 \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ on obtient $d(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}) + d(\mathcal{S}, \mathcal{S}_1) = d(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1)$, en prenant $D_i$ comme boule associée à $\mathcal{S}_i$, pour $i = 0, 1$.

Si $\mathcal{S}_0 = \{\mathcal{P}_0\}$ (resp. $\mathcal{S}_1 = \{\mathcal{P}_1\}$) est singulier on considère une chaine évanescente $\{D_{0,i}\}_{i \geq 0}$ (resp. $\{D_{1,j}\}_{j \geq 0}$) définissant $\mathcal{P}_0$ (resp. $\mathcal{S}_1$). Alors on obtient $d(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}) + d(\mathcal{S}, \mathcal{S}_1) = d(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1)$ en prenant $D_0 = D_{0,i}$ (resp. $D_1 = D_{1,j}$) pour $i \geq 0$ (resp. $j \geq 0$) assez grand tel que $D_{0,i} \subset B$ (resp. $D_{1,j} \subset \{|z| > r\}$) et en passant à la limite quand $i \to \infty$ (resp. $j \to \infty$).

Supposons maintenant que $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ n'est pas entre $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$. Si $\mathcal{S}_0$ est entre $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}$ ou $\mathcal{S}_1$ est entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_0$, alors la inegalité stricte suit du précédent. Sinon il existe $\overline{\mathcal{S}} \in \mathbb{H}_p$ qui est entre $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$, entre $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}$ et entre $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}$ (Lemme 2.10). Alors, par le précédent,

$$d(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}) + d(\mathcal{S}, \mathcal{S}_1) = d(\mathcal{S}_0, \overline{\mathcal{S}}) + d(\overline{\mathcal{S}}, \mathcal{S}_1) + 2d(\overline{\mathcal{S}}, \mathcal{S}) > d(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1). \square$$

Notons que la distance entre deux points de $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ est rationnelle. De plus la distance entre un point rationnel et un point irrationnel est irrationnelle, mais il y a des points singuliers à distance rationnelle d'un point rationnel.

**Proposition 3.2.** *L'espace métrique $(\mathbb{H}_p, d)$ est complet et $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ est dense dans $\mathbb{H}_p$. En particulier $\mathbb{H}_p$ est séparable.*

**Preuve.** Soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ et soit $\{B - B_i\}_{i \geq 1}$ une chaine évanescente définissant un bout dans $\mathcal{S}$. On suppose les boules $B_i$ fermées. Alors le point $\mathcal{S}_i \in \mathbb{H}_p$ associé à $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B_i$ est rationnel. Si $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$, alors $d(\mathcal{S}, \mathcal{S}_i) = \mathrm{mod}(B - B_i) \to 0$ quand $i \to \infty$. Si $\mathcal{S}$ est singulier alors $D_i = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B_i$ est une boule ouverte et $r = \lim_{i \to \infty} \mathrm{diam}(D_i) > 0$. Par conséquent

$$d(\mathcal{S}, \mathcal{S}_i) = \log_p \mathrm{diam}(D_i) - \log_p r \to 0,$$

quand $i \longrightarrow \infty$. Donc $\mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ est dense dans $\mathbb{H}_p$.

Soit $\{\mathcal{S}_i\}_{i \geq 0} \subset \mathbb{H}_p$ une suite de Cauchy. Par le précédent on peut supposer $\{\mathcal{S}_i\}_{i \geq 0} \subset \mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$. Soit $B_i$ une boule ouverte associée à $\mathcal{S}_i$ contenue dans $\mathbb{C}_p$.

Comme $\{\mathcal{S}_i\}_{i\geq 0}$ est une suite de Cauchy, pour chaque $i \geq 0$ l'ensemble

$$\cup_{j\geq i} B_i \subset \mathbb{C}_p$$

est borné, cf. (2). Il existe alors une boule $D_i$ de $\mathbb{C}_p$ du même diamètre contenant $\cup_{j\geq i} B_i$. On a $D_{i+1} \subset D_i$ pour $i \geq 0$ et de plus $\operatorname{diam}(D_i) \to r > 0$, car $\{\mathcal{S}_i\}_{i\geq 0}$ est une suite de Cauchy.

Soit $\overline{\mathcal{S}}_i \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ le point associé à $D_i$. Pour $j \geq i$ on a $B_j \subset D_j \subset D_i$, donc

$$d(\mathcal{S}_j, \overline{\mathcal{S}}_j) + d(\overline{\mathcal{S}}_j, \overline{\mathcal{S}}_i) = d(\mathcal{S}_j, \overline{\mathcal{S}}_i) \to 0, \text{ quand } i \to \infty.$$

Par conséquent $\{\overline{\mathcal{S}}_i\}_{i\geq 0}$ est une suite de Cauchy équivalente à $\{\mathcal{S}_i\}_{i\geq 0}$.

Soit $D = \cap D_i$. Alors $\{D_i - D\}_{i\geq 0}$ est une chaine évanescente et $\{\overline{\mathcal{S}}_i\}_{i\geq 0}$ converge vers le point de $\mathbb{H}_p$ associé à $\{D_i - D\}_{i\geq 0}$. □

3.1. **Géodésiques et segments géodésiques.** Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p \cup \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ de points distincts. Rappelons que $(\mathcal{S}, \mathcal{S}') \subset \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des points entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$, $[\mathcal{S}, \mathcal{S}') = (\mathcal{S}', \mathcal{S}] = \{\mathcal{S}\} \cup (\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ et $[\mathcal{S}, \mathcal{S}'] = [\mathcal{S}, \mathcal{S}') \cup \{\mathcal{S}'\}$ (Définition 2.8).

Par example il est facile de voir que $(0, \infty) \subset \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ est égal à $\{\mathcal{S}_r\}_{\mathbb{R}}$, où $\mathcal{S}_r \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ est le point associé à la boule $\{|z| < p^r\}$. De plus l'application

$$\mathcal{S}_r \in (0, \infty) \longrightarrow r \in \mathbb{R}$$

est une isométrie. Rappelons que chaque automorphisme de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ induit une isométrie sur $\mathbb{H}_p$.

Si $z, z' \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ on dit que $(z, z') \subset \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ est la *géodésique* joignait $z$ et $z'$. Comme il existe un automorphisme de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ qui envoie $z$ à $0$ et $z'$ à $\infty$, on conclut que $(z, z')$ est isométrique à $\mathbb{R}$.

Dans le cas où $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ et $z \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, on dit que $[\mathcal{S}, z)$ est une *demi-géodésique.* Si $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ alors il existe un automorphisme de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ envoyant $z$ à $\infty$ et $\mathcal{S}$ dans $(0, \infty)$. Par conséquent $[\mathcal{S}, z)$ est isométrique à $[0, \infty) \subset \mathbb{R}$.

Dans le cas où $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p$ on appelle $[\mathcal{S}, \mathcal{S}']$ *segment géodésique.* Si $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ alors il existe un automorphisme de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ qui envoie $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ dans $(0, \infty) \subset \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$. Alors $[\mathcal{S}, \mathcal{S}']$ est isométrique à un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ de longeur $d(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$.

**Lemme 3.3.** *Les points rationnels sont denses dans chaque segment géodésique de* $\mathbb{H}_p$.

**Preuve.** Soit $\ell$ un segment géodésique et soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ appartenant à $\ell$. Fixons $\mathcal{S}' \in \ell$ différent de $\mathcal{S}$ et soit $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ le bout tel que $\mathcal{S}' \prec B_{\mathcal{P}}$ (Lemme 2.6).

Soit $\{B - B_i\}_{i\geq 0}$ une chaine évanescente définissant $\mathcal{P}$, telle que chaque $B_i$ est une boule fermée. Alors pour $i$ assez grand le point $\mathcal{S}_i \in \mathbb{H}_p$ associé au complémentaire de $B_i$ appartient à $(\mathcal{S}, \mathcal{S}') \subset \ell$ (cf. Lemme 2.11). De plus $\mathcal{S}_i$ converge vers $\mathcal{S}$ quand $i \to \infty$ ; voir la démonstration de la Proposition 3.2. □

**Lemme 3.4.** *Considérons $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p$ distincts. Alors le segment géodésique $[\mathcal{S}, \mathcal{S}']$ est isométrique à un intervalle de $\mathbb{R}$ de longeur $d(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$. De plus pour $z \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, la demi-géodésique $[\mathcal{S}, z)$ est isométrique à $[0, \infty) \subset \mathbb{R}$.*

**Preuve.** Il reste a considérer le cas $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ singulier. Supposons que $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p \cup \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ n'est pas un point de $\mathbb{H}_p$ singulier, le cas $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p$ singulier étant similaire.

Soit $\{\mathcal{S}_i\}_{i\geq 0} \subset (\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ une suite convergente vers $\mathcal{S}$ telle que $d(\mathcal{S}, \mathcal{S}_i)$ est decroissant (cf. preuve du lemme précédent). Alors $(\mathcal{S}_i, \mathcal{S}')$ est une suite croissante de segments géodésiques (ou demi-géodésiques) isométriques à un intervalle de $\mathbb{R}$ de longuer $d(\mathcal{S}_i, \mathcal{S}') \to d(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$. Comme $(\mathcal{S}, \mathcal{S}') = \cup(\mathcal{S}_i, \mathcal{S}')$ (cf. Lemme 2.9) on a que $[\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ est isométrique à $[0, \infty) \subset \mathbb{R}$ si $\mathcal{S}' \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ ou $[\mathcal{S}, \mathcal{S}']$ est isométrique à un intervalle de $\mathbb{R}$ de longeur $d(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$, si $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p$. □

3.2. **Convexité et connexité dans $\mathbb{H}_p$.** Dans cette section on montre que l'espace métrique $(\mathbb{H}_p, d)$ est un arbre réel (Proposition 3.7). C'est-à-dire que pour tous points distincts $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p$ il existe un et un seul arc topologique $[\mathcal{S}, \mathcal{S}'] \subset \mathbb{H}_p$ de extrémités $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$, et que de plus cet arc topologique est isométrique à un intervalle de $\mathbb{R}$ de longeur $d(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$. Cette définition est due à J. Tits [T], voir aussi par exemple [P].

**Définition 3.5.** *On dit qu'une partie $\widehat{X}$ de $\mathbb{H}_p$ est* **convexe** *si pour tous $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1 \in \widehat{X}$ distincts, $\widehat{X}$ contient tous les points de $\mathbb{H}_p$ entre $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$.*

Notons que par le Lemme 3.4 toute partie convexe de $\mathbb{H}_p$ est aussi connexe. On verra que d'autre part toute partie connexe de $\mathbb{H}_p$ est convexe, voir Proposition 3.7. En particulier l'intersection non-vide de deux parties connexes de $\mathbb{H}_p$ est aussi connexe.

Etant donné un bout $\mathcal{P}$ contenu dans $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$, on définit

$$\widehat{B}_{\mathcal{P}} = \{\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p - \{\mathcal{S}\} \mid \mathcal{S}' \prec B_{\mathcal{P}}\}.$$

D'après le Lemme 2.6 pour chaque $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ on a une partition,

$$\mathbb{H}_p - \{\mathcal{S}\} = \sqcup_{\mathcal{S}} \widehat{B}_{\mathcal{P}}. \tag{3}$$

**Lemme 3.6.** *L'ensemble $\widehat{B}_{\mathcal{P}} \subset \mathbb{H}_p$ est ouvert et sa fermeture est égale à $\widehat{B}_{\mathcal{P}} \cup \{\mathcal{S}\}$.*

**Preuve.** Soit $\mathcal{S}' \in \widehat{B}_{\mathcal{P}}$. Si $\mathcal{S}'' \in \mathbb{H}_p$ est différent de $\mathcal{S}$ et n'appartient pas à $\widehat{B}_{\mathcal{P}}$, on a $\mathcal{S} \in (\mathcal{S}', \mathcal{S}'')$ et par conséquent $d(\mathcal{S}', \mathcal{S}'') > d(\mathcal{S}', \mathcal{S})$. Donc l'ensemble ouvert $\{\mathcal{S}'' \in \mathbb{H}_p \mid d(\mathcal{S}', \mathcal{S}'') < d(\mathcal{S}', \mathcal{S})\}$ est contenu dans $\widehat{B}_{\mathcal{P}}$.

D'autre part le point $\mathcal{S}$ appartient à la fermeture de $\widehat{B}_{\mathcal{P}}$ (cf. partie 1 du Lemme 2.9) et comme l'ensemble

$$\mathbb{H}_p - \widehat{B}_{\mathcal{P}} \cup \{\mathcal{S}\} = \sqcup_{\mathcal{P}' \in \mathcal{S} - \{\mathcal{P}\}} \widehat{B}_{\mathcal{P}'}$$

est ouvert par le précédent, on obtient que $\widehat{B}_{\mathcal{P}} \cup \{\mathcal{S}\}$ est fermé. □

**Proposition 3.7.**

(1) *Une partie de $\mathbb{H}_p$ est convexe si et seulement si elle est connexe.*
(2) *L'espace métrique $(\mathbb{H}_p, d)$ est un arbre réel.*

**Preuve.**
1.– D'après le Lemme 3.4 toute partie convexe de $\mathbb{H}_p$ est aussi connexe. D'autre part soit $\widehat{X} \subset \mathbb{H}_p$ une partie connexe de $\mathbb{H}_p$. Soient $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \widehat{X}$ et $\mathcal{S}_0 \in (\mathcal{S}, \mathcal{S}')$. De plus soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}' \in \mathcal{S}_0$ les bouts tel que $\mathcal{S} \prec B_{\mathcal{P}}$ et $\mathcal{S}' \prec B_{\mathcal{P}'}$. Supposons par contradiction que $\widehat{X} \subset \mathbb{H}_p - \{\mathcal{S}_0\}$. Alors les ensembles $\widehat{B}_{\mathcal{P}} \cap X$ et $\widehat{B}_{\mathcal{P}'} \cap X$ sont non-vides et par le précédent ils sont ouverts et fermés dans $\widehat{X}$. On obtient une contradiction, donc $\mathcal{S}_0 \in \widehat{X}$. Par conséquent $\widehat{X}$ est convexe.

2.– Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p$ des points distincts. Par le Lemme 3.4 $[\mathcal{S}, \mathcal{S}'] \subset \mathbb{H}_p$ est un arc topologique de extrémités $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ et il est isométrique à un intervalle de $\mathbb{R}$ de longeur $d(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$.

D'autre part soit $\ell \subset \mathbb{H}_p$ un arc topologique de extrémités $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$. Comme $\ell$ est connexe on a $[\mathcal{S}, \mathcal{S}'] \subset \ell$ par 1 et donc $\ell = [\mathcal{S}, \mathcal{S}']$. $\square$

**Lemme 3.8.** *Etant donné une partie $X$ de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, l'ensemble*

$$\widehat{X} = \{\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p \mid \mathcal{S} \prec X\}$$

*est convexe et par conséquent connexe.*

**Preuve.** Considérons $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1 \in \widehat{X}$ distincts et soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ entre $\mathcal{S}_0$ et $\mathcal{S}_1$. Soient $B_0$ et $B_1$ les boules distincts associées à $\mathcal{S}$, tel que $\mathcal{S}_i \prec B_i$ pour $i = 0, 1$.

Si $\mathcal{S}_i$ est singulier on a $B_i \cap X \neq \emptyset$, car $\mathcal{S}_i \prec B_i$ et $\mathcal{S}_i \prec X$.

Si $\mathcal{S}_i$ est non-singulier il existe une boule $\widetilde{B}_i$ associée à $\mathcal{S}_i$ telle que $\widetilde{B}_i \not\subset B_i$ et $D_i = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - \widetilde{B}_i \subset B_i$ (Lemme 2.5). Comme $\mathcal{S}_i$ sépare $X$ on a $D_i \cap X \neq \emptyset$ et par conséquent $B_i \cap X \neq \emptyset$.

Donc $B_i \cap X \neq \emptyset$, pour $i = 0, 1$, et par conséquent $\mathcal{S}$ sépare $X$. $\square$

On appelle $\widehat{X}$ l'*enveloppe convexe* de $X \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$. Notons que l'ensemble $\widehat{X}$ contient tous les points en $\mathbb{H}_p$ qui sont entre deux points dans $X$. Mais si $X \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ est d'interieur non-vide alors $\widehat{X}$ contient aussi des points singuliers.

Notons que $\widehat{B}_{\mathcal{P}}$ est connexe d'après le Lemme 3.8 et par conséquent chaque $\widehat{B}_{\mathcal{P}}$ est une composante connexe de $\mathbb{H}_p - \{\mathcal{S}\}$ (cf. (3) et Lemme 3.6). Par conséquent les points de *branchement* de $\mathbb{H}_p$ sont les points rationnels.

## 4. Action des fonctions rationnelles sur $\mathbb{H}_p$.

Considérons une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ qui ne soit pas constante. Etant donné un point $w \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ le *degré local* de $R$ en $w$, que l'on note $\deg_R(w)$, est définit comme suit. On considère des coordonnées tel que $w = 0$ et $R(0) = 0$. Alors $R$ est localement de la forme

$$a_d z^d + a_{d+1} z^{d+1} + \dots, \text{ où } d \geq 1 \text{ et } a_d \neq 0 \ ;$$

on définit $\deg_R(w) = d$ et on dit que $\deg_R(w)$ est la *multiplicité* de $w$ comme préimage de $R(w)$. Il n'est pas difficile de voir que $\deg_R(w)$ ne dépend pas du choix des coordonnées.

Pour $w \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ on a

$$\sum_{R(z)=w} \deg_R(z) = \deg(R) \tag{4}$$

et pour $Q \in \mathbb{C}_p(z)$ on a $\deg_{Q \circ R}(w) = \deg_Q(R(w)) \cdot \deg_R(w)$.

Etant donnés $X$, $Y \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ tel que $R(X) \subset Y$ on dit que $R : X \longrightarrow Y$ est *de degré* $d$, où $d \geq 1$, si pour tout $y \in Y$

$$\sum_{x \in X,\, R(x)=y} \deg_R(x) = d \ ;$$

de façon équivalente, tout point dans $Y$ a exactement $d$ préimages dans $X$ comptées avec multiplicité.

Les *points critiques* d'une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ sont les points $c \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ tel que $\deg_R(c) > 1$. Si $c \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ est un point critique de $R$, alors la *multiplicité de $c$ comme point critique* de $R$ est par définition $\deg_R(c) - 1$. Une fonction rationnelle $R$ a $2\deg(R) - 2$ points critiques comptés avec multiplicité. C'est-à-dire

$$\sum_{\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)} (\deg_R(c) - 1) = 2\deg(R) - 2.$$

4.1. **Action d'une fonction rationnelle sur le bouts.** Fixons une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$.

**Proposition 4.1.** *Soit $\mathcal{P}$ un bout rationnel (resp. irrationnel, singulier). Alors il existe un bout $\mathcal{P}'$ de même nature et un entier $d \geq 1$ tel que pour toute chaine évanescente $\{C_i\}_{i\geq 0}$ définissant $\mathcal{P}$, il existe $N \geq 1$ tel que on a les propriétés suivantes.*

1. *$\{R(C_i)\}_{i\geq N}$ est une chaine évanescente définissant $\mathcal{P}'$.*
2. *Pour tout $i \geq N$, $R : C_i \longrightarrow R(C_i)$ est de degré $d$.*

La preuve de cette proposition est à la fin de cette section.

On note $R_*(\mathcal{P}) = \mathcal{P}'$. De plus on note $\deg_R(\mathcal{P}) = d$ et on l'appelle **degré local de $R$ en $\mathcal{P}$**.

**Lemme 4.2.** *Soit $\mathcal{P}$ un bout non-singulier. Alors il existe un entier $N \geq 1$ tel que*

1. *Chaque point $y \in B_{R_*(\mathcal{P})}$ a $N + \deg_R(\mathcal{P})$ préimages par $R$ dans $B_{\mathcal{P}}$.*
2. *Chaque point $y \notin B_{R_*(\mathcal{P})}$ a $N$ préimages par $R$ dans $B_{\mathcal{P}}$.*

*En particulier $R : B_{\mathcal{P}} \longrightarrow B_{R_*(\mathcal{P})}$ est de degré $\deg_R(\mathcal{P})$ ou $R(B_{\mathcal{P}}) = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$.*

Les démonstrations de la Proposition 4.1 et du Lemme 4.2 dépend du lemme suivant.

**Lemme 4.3.** *Considérons $r > 0$. Alors il exite un entier $d \geq 1$ et $r_0 \in (0, r)$ tel que après changement de coordonnée à l'arrivée, on a $|R(z)| = |z|^d$ si $r_0 < |z| < r$, et pour tout $\widetilde{r}_0 \in [r_0, r)$*

$$R : \{z \in \mathbb{C}_p \mid \widetilde{r}_0 < |z| < r\} \longrightarrow \{w \in \mathbb{C}_p \mid \widetilde{r}_0^d < |w| < r^d\}$$

*est de degré $d$. Si de plus $r \notin |\mathbb{C}_p^*|$ alors il existe $r_1 > r$ tel que $R(z) = |z|^d$ si $r_0 < |z| < r_1$, et tel que pour tous $r_0 \leq \widetilde{r}_0 < \widetilde{r}_1 \leq r_1$*

$$R : \{z \in \mathbb{C}_p \mid \widetilde{r}_0 < |z| < \widetilde{r}_1\} \longrightarrow \{w \in \mathbb{C}_p \mid \widetilde{r}_0^d < |w| < \widetilde{r}_1^d\}$$

*est de degré $d$.*

**Preuve.** Etant donné un polynôme $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_k z^k \in \mathbb{C}_p[z]$, soit $n(P) \geq 0$ le plus petit entier qui maximise $|a_n| r^n$ et on pose $T_P(z) = P(z) - a_{n(P)} z^{n(P)}$. Après changement de coordonnée à l'arrivée on suppose $R = P/Q$, avec $P(z) = z^{n(P)} + T_P(z) \in \mathbb{C}_p[z]$ et $Q(z) = z^{n(Q)} + T_Q(z) \in \mathbb{C}_p[z]$.

Quitte à changer $R$ par $R - 1$ on suppose $n(P) \neq n(Q)$ et quitte à changer $R$ par $\frac{1}{R}$ on suppose $n(P) > n(Q)$. Par conséquent $|R(z)| = |z|^{n(P)-n(Q)}$ pour $z \in \mathbb{C}_p$ tel que $|z| < r$ est assez proche de 1.

Posons $d = n(P) - n(Q) \geq 1$. Alors pour $|w| < r^d$ le polynôme

$$P_w(z) = P(z) - wQ(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n,$$

est tel que $c_{n(P)} = 1$ et tel que $n(P)$ est le plus petit entier qui maximise $|c_n|r^n$ (c'est à dire $n(P_w) = n(P)$). Posons $r_w = |w|^{\frac{1}{d}}$. On choisit $r_0 \in (0, r)$ proche de $r$, tel que si $r_0^d < |w| < r^d$ alors $|c_{n(Q)}| = |w|$,

$$|c_i|r_w^i \leq r_w^{n(P)} = |c_{n(Q)}|r_w^{n(Q)}, \text{ pour } n(Q) < i < n(P)$$

et $|c_j|r_w^j < |c_{n(Q)}|r_w^{n(Q)}$ pour $0 \leq j < n(Q)$.

Par conséquent $(n(Q), \log_p|w|)$ et $(n(P), 0)$ sont des sommets consecutifs du polygône de Newton de $P_w$. Donc $P_w$ à $d = n(P) - n(Q)$ zéros dans $\{|z| = r_w\}$, comptés avec multiplicité. C'est-à-dire que $R$ a $d$ préimages de $w$ dans $\{|z| = r_w\}$ comptées avec multiplicité, et par conséquent pour tout $\widetilde{r}_0 \in [r_0, r)$,

$$R : \{\widetilde{r}_0 < |z| < r\} \longrightarrow \{\widetilde{r}_0^d < |z| < r^d\}$$

est de degré $d$.

Si de plus $r \notin |\mathbb{C}_p^*|$, on a $|a_i|r^i < r^{n(P)}$ pour $i \neq n(P)$ et $|b_j|r^j < r^{n(Q)}$ pour $j \neq n(Q)$. Alors on peut montrer les assertions du lemme de façon analogue. □

**Preuve de la Proposition 4.1.**
*Cas 1.- Le bout $\mathcal{P}$ est non-singulier.* Après changement de au coordonnée au départ on suppose $B_{\mathcal{P}} = \{|z| < r\}$. Considérons la coordonnée à l'arrivée donnée par le Lemme 4.3. Notons que pour toute chaine évanescente $\{C_i\}_{i \geq 0}$ définissant $\mathcal{P}$, on a $C_i = \{\rho_i < |z| < r\}$ pour $i$ assez grand, où $\rho_i \to r$ quand $i \to \infty$. Alors la proposition suit des assertions du Lemme 4.3 dans ce cas.

*Cas 2.- Le bout $\mathcal{P}$ est singulier.* Ce cas dépend du Lemme 4.2 (ce lemme dépend du cas précédent seulement).

Comme $\cap C_i = \emptyset$, pour $i$ assez grand la boule $C_i$ est disjointe des pôles de $R$. Dans ce cas $R(C_i)$ est une boule et $R : C_i \longrightarrow R(C_i)$ est de degré $d_i \geq 1$ (Lemme 4.2). Comme $C_{i+1} \subset C_i$ on a $d_{i+1} \leq d_i$ et il existe $N \geq 0$ tel que $d = d_i$ ne dépend pas de $i$ pour $i \geq N$.

On voit facilement que $\mathcal{P}'$ et $d$ ne dépend pas du représentant de $\mathcal{P}$ choisi. □

**Preuve du Lemme 4.2.** Après changement de coordonée on suppose $B_{\mathcal{P}} = \{|z| < r\}$. Considérons la coordonnée à l'arrivée donnée par le Lemme 4.3. Alors $d = \deg_R(\mathcal{P})$, $B_{R_*(\mathcal{P})} = \{|w| < r^d\}$ et il existe $r_0 \in (0, r)$ tel que $|R(z)| = |z|^d$ quand $r_0 < |z| < r$.

Soit $N \geq 0$ le nombre de pôles de $R$ dans la boule $\{|z| < r\}$. Alors par le polygône de valuation $R$ a $N + d$ zéros dans $\{|z| < r\}$ (voir par example [Es1] ou [R-L] Section 1.3.2).

Considérons $y \in \{|z| < r^d\}$. Alors $|R(z) - y| = |z|^d$ quand $\max\{r_0, |y|\} < |z| < r$. Donc la fonction rationnelle $R - y$ a $N + d$ zéros dans $\{|z| < r\}$.

Considérons $y \notin \{|z| < r^d\}$. Alors $|\frac{yR(z)}{R(z)-y}| = |z|^d$ quand $r_0 < |z| < r$. Comme la fonction rationnelle $\frac{yR}{R-y}$ a les mêmes zéros que $R$, elle a $N$ pôles dans $\{|z| < r\}$.
□

4.2. **Action d'une fonction rationnelle sur $\mathbb{H}_p$.** Dans cette section on définit l'action $R_*$ sur $\mathbb{H}_p$ induite par une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$. On définit aussi pour chaque point $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ un entier $\deg_R(\mathcal{S}) \geq 1$ qu'on appelle *degré local de $R$ en $\mathcal{S}$*.

Etant donné un point singulier $\mathcal{S} = \{\mathcal{P}\} \in \mathbb{H}_p$ on note $R_*(\mathcal{S}) = \{R_*(\mathcal{P})\} \in \mathbb{H}_p$ et $\deg_R(\mathcal{S}) = \deg_R(\mathcal{P}) \geq 1$.

Soit $\mathcal{S} = \{\mathcal{P}, \mathcal{P}'\} \in \mathbb{H}_p$ un point irrationnel. Alors par le Lemme 4.3 on a $\deg_R(\mathcal{P}) = \deg_R(\mathcal{P}') \geq 1$ et $\{R_*(\mathcal{P}), R_*(\mathcal{P}')\}$ est un point irrationnel de $\mathbb{H}_p$. On note $\deg_R(\mathcal{S})$ et $R_*(\mathcal{S}) \in \mathbb{H}_p$ respectivement.

La proposition suivante décrit l'action d'une fonction rationnelle sur les points rationnels de $\mathbb{H}_p$ ; voir [R-L] Proposition 2.4.

**Proposition 4.4.** *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle et $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ un point rationnel. Alors on a les propriétés suivantes.*

(1) *Il existe un point rationnel $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ tel que si $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ alors $R_*(\mathcal{P}) \in \mathcal{S}'$.*

(2) *Considérons des paramétrages*
$$\mathcal{S} = \{\mathcal{P}(\xi)\}_{\xi \in \mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)} \text{ et } \mathcal{S}' = \{\mathcal{P}'(\xi)\}_{\xi \in \mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)}.$$
*Alors il existe une fonction rationnelle $\widetilde{R} \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$ telle que pour tout $\xi \in \mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ on a*
$$R_*(\mathcal{P}(\xi)) = \mathcal{P}'(\widetilde{R}(\xi)) \text{ et } \deg_R(\mathcal{P}(\xi)) = \deg_{\widetilde{R}}(\xi).$$
*Donc pour tout $\mathcal{P}' \in \mathcal{S}'$*
$$\sum_{\mathcal{P} \in \mathcal{S}, R_*(\mathcal{P}) = \mathcal{P}'} \deg_R(\mathcal{P}) = \deg(\widetilde{R}).$$

(3) *Il existe un sous-ensemble fini $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$ tel que $R(D_{\mathcal{P}}) = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ pour tout $\mathcal{P} \in \mathcal{T}$ et tel que $R : D_{\mathcal{P}} \longrightarrow D_{R_*(\mathcal{P})}$ est de degré $\deg_R(\mathcal{P})$ pour tout $\mathcal{P} \in \mathcal{S} - \mathcal{T}$ ; dans ce dernier cas $R(D_{\mathcal{P}}) = D_{R_*(\mathcal{P})}$.*

On note $\deg_R(\mathcal{S}) \geq 1$ le degré de $\widetilde{R}$, qui ne dépend pas du choix des coordonnées.

### 4.3. **Action locale d'une fonction rationnelle.**

**Proposition 4.5.** *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle fixant $0 \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ et localement de la forme $R(z) = a_d z^d + a_{d+1} z^{d+1} + \cdots$, où $d = \deg_R(0)$. Alors pour $r > 0$ petit $R_*(\mathcal{S}_r) = \mathcal{S}_{|a_d|r^d}$ et $\deg_R(\mathcal{S}_r) = d = \deg_R(0)$ ; où $\mathcal{S}_r \in \mathbb{H}_p$ est le point associé à la boule $\{|z| < r\}$.*

**Preuve.** Pour $r > 0$ soit $\mathcal{P}_r \in \mathcal{S}_r$ le bout associé à $\{|z| < r\}$. Pour $r > 0$ petit on a $R(\{|z| = r\}) = \{|z| = |a_d|r^d\}$ et l'application $R : \{|z| < r\} \longrightarrow \{|z| < |a_d|r^d\}$ est de degré $d$. Donc $R_*(\mathcal{P}_r) = \mathcal{P}_{|a_d|r^d}$ et $\deg_R(\mathcal{P}_r) = d$. Par conséquent $R_*(\mathcal{S}_r) = \mathcal{S}_{|a_d|r^d}$.

De plus notons que l'image du bout associé à $\{|z| > r\} \cup \{\infty\}$ est le bout associé à $\{|z| > |a_d|r^d\} \cup \{\infty\}$ et comme $R(\{|z| = r\}) = \{|z| = |a_d|z^d\}$ on conclut que $\mathcal{P}_r$ est le seul bout dans $\mathcal{S}_r$ ayant $\mathcal{P}_{|a_d|r^d}$ comme image. Donc $\deg_R(\mathcal{S}_r) = \deg_R(\mathcal{P}_r) = d$ (cf. partie 2 de la Proposition 4.4). $\square$

**Proposition 4.6.** *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle. Soit $\mathcal{P}$ un bout et soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ le point qui contient $\mathcal{P}$. Alors il existe un point $\overline{\mathcal{S}} \in \mathbb{H}_p$ tel que $\overline{\mathcal{S}} \prec B_{\mathcal{P}}$ et tel que on ait les propriétés suivantes.*

(1) *$R_*((\mathcal{S}, \overline{\mathcal{S}})) = (R_*(\mathcal{S}), R_*(\overline{\mathcal{S}}))$ et $R_*$ est injective sur $(\mathcal{S}, \overline{\mathcal{S}})$.*

(2) *Pour tout $\mathcal{S}' \in (\mathcal{S}, \overline{\mathcal{S}})$ on a $\deg_R(\mathcal{S}') = \deg_R(\mathcal{P})$.*

(3) $d(R_*(\mathcal{S}), R_*(\overline{\mathcal{S}})) = \deg_R(\mathcal{P}) \cdot d(\mathcal{S}, \overline{\mathcal{S}})$.

**Corollaire 4.7.** *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle. Alors pour tous $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p$ on a*

$$d(R_*(\mathcal{S}), R_*(\mathcal{S}')) \leq \deg(R) \cdot d(\mathcal{S}, \mathcal{S}').$$

*En particulier l'action sur $\mathbb{H}_p$ induite par une fonction rationnelle est continue.*

**Preuve.** Rappelons que pour tout bout $\mathcal{P}$ on a $\deg_R(\mathcal{P}) \leq \deg(R)$, voir Section 4.1.

Posons $t' = d(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ et pour $0 \leq t \leq t'$ soit $\mathcal{S}_t \in [\mathcal{S}, \mathcal{S}']$ le point tel que $d(\mathcal{S}_t, \mathcal{S}) = t$ ; on a $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}$ et $\mathcal{S}' = \mathcal{S}_{t'}$. Par la Proposition 4.6 pour tout $t \in [0, t')$ (resp. $t \in (0, t']$) il existe $\overline{t} \in (t, t']$ (resp. $\overline{t} \in [0, t)$) (cf. Lemme 2.11) tel que on ait

$$d(R_*(\mathcal{S}_t), R_*(\mathcal{S}_{\overline{t}})) \leq \deg(R) \cdot d(\mathcal{S}_t, \mathcal{S}_{\overline{t}}).$$

Comme l'intervalle $[0, t']$ est compact il existe $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = t'$ tel que $d(R_*(\mathcal{S}_{t_{i-1}}), R_*(\mathcal{S}_{t_i})) \leq \deg(R) \cdot d(\mathcal{S}_{t_{i-1}}, \mathcal{S}_{t_i})$ pour $1 \leq i \leq k$. $\square$

**Corollaire 4.8.** *Considérons un segment de $\mathbb{H}_p$ paramètre par $\{\mathcal{S}_t\}_{0 \leq t \leq t'}$, de telle façon que $d(\mathcal{S}_{t_0}, \mathcal{S}_{t_1}) = |t_0 - t_1|$ pour $0 \leq t_0 < t_1 \leq t'$. Supposons que $R \in \mathbb{C}_p(z)$ est une fonction rationnelle telle que $R_*$ soit injective sur $[\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_{t'}]$. Alors*

$$d(R_*(\mathcal{S}_0), R_*(\mathcal{S}_{t'})) = \int_0^{t'} \deg_R(\mathcal{S}_s) ds.$$

*En particulier on a $d(R_*(\mathcal{S}_0), R_*(\mathcal{S}_{t'})) \geq d(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_{t'})$.*

**Preuve.** Comme dans la démonstration du corollaire précédent on peut trouver $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = t'$ tel que pour $1 \leq i \leq k$ le degré $\deg_R(\mathcal{S})$ soit constant sur $[\mathcal{S}_{t_{i-1}}, \mathcal{S}_{t_i}]$ et tel que on ait $d(R_*(\mathcal{S}_{t_{i-1}}), R_*(\mathcal{S}_{t_i})) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \deg_R(\mathcal{S}_s) ds$ (cf. partie 2 et 3 de la Proposition 4.6). Comme par hypothèse $R_*$ est injective sur $[\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_{t'}]$, l'assertion du corolliare suit. $\square$

La démonstration de la Proposition 4.6 dépend du lemme suivant.

**Lemme 4.9.** *Soit $C$ une couronne et soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle telle que $R(C)$ est aussi une couronne. Alors il existe un entier $d \geq 1$ tel que $R : C \longrightarrow R(C)$ est de degré $d$ et on a,*

$$\mathrm{mod}(R(C)) = d \cdot \ \mathrm{mod}(C).$$

**Preuve.** Après changement de coordonnée on suppose $C = \{r_0 < |z| < r_1\}$ et $R(C) = \{r'_0 < |z| < r'_1\}$. En particulier $R$ n'a pas de zéros ni des pôles sur $C$. On pose $R = P/Q$ où,

$$P(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n \in \mathbb{C}_p[z] \text{ et}$$

$$Q(z) = b_0 + b_1 z + ... + b_{n'} z^{n'} \in \mathbb{C}_p[z].$$

Alors il existe $0 \leq k \leq n$ (resp. $0 \leq k' \leq n'$) tel que $|a_i| r_0^i \leq |a_k| r_0^k$ (resp. $|b_j| r_0^j \leq |b_{k'}| r_0^{k'}$) pour $0 \leq i \leq k$ (resp. $0 \leq j \leq k'$) et $|a_i| r_1^i \leq |a_k| r_1^k$ (resp. $|b_j| r_1^j \leq |b_{k'}| r_1^{k'}$) pour $k \leq i \leq n$ (resp. $k' \leq j \leq n'$).

Comme $R(C) = \{r'_0 < |z| < r'_1\}$ on a $k \neq k'$ et quitte à chager $R$ par $\frac{1}{R}$ on suppose $k > k'$. Alors on peut montrer, comme dans la démonstration du Proposition 4.1, que $R : C \longrightarrow R(C)$ est de degré $d = k - k'$. De plus notons que $r'_0 = (|a_k|/|b_{k'}|) r_0^d$ et $r'_1 = (|a_k|/|b_{k'}|) r_1^d$. Par conséquent

$$\mathrm{mod}(R(C)) = \log_p(r'_1/r'_0) = \log_p(r_1^d/r_0^d) = d \cdot \ \mathrm{mod}(C). \square$$

**Preuve de la Proposition 4.6.** Si le bout $\mathcal{P}$ est non-singulier, le lemme suit de la preuve du Proposition 4.1 et du Lemme 4.3. Donc on suppose $\mathcal{S} = \{\mathcal{P}\}$ singulier.

Soit $\{D_i\}_{i\geq 0}$ une chaine évanescente définissant $\mathcal{P}$ et soit $\mathcal{S}_i \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ le point associé à $D_i$, de telle façon que $\mathcal{S}_{i+1}$ est entre $\mathcal{S}_i$ et $\mathcal{S}$. On pose $\overline{\mathcal{S}} = \mathcal{S}_0$. On suppose $R : D_i \longrightarrow R(D_i)$ de degré $\deg_R(\mathcal{P})$ et que $\{R(D_i)\}_{i\geq 0}$ est une chaine évanescente définissant $R_*(\mathcal{P})$ (Proposition 4.1).

De plus on suppose les boules $D_i$ irrationnelles, de telle façon que $C_i = D_0 - D_i$ est une couronne et par conséquent $d(\overline{\mathcal{S}}, \mathcal{S}_i) = \operatorname{mod}(C_i)$. De plus $R(C_i) = R(D_0) - R(D_i)$ est aussi une couronne, donc $d(R(\overline{\mathcal{S}}), R(\mathcal{S}_i)) = \operatorname{mod}(R(C_i))$. Comme $R : C_i \longrightarrow R(C_i)$ est de degré $\deg_R(\mathcal{P})$ on a par le Lemme 4.9,

$$\begin{aligned} d(R(\overline{\mathcal{S}}), R(\mathcal{S}_i)) &= \operatorname{mod}(R(C_i)) = \deg_R(\mathcal{P}) \operatorname{mod}(C_i) \\ &= \deg_R(\mathcal{P})\, d(\overline{\mathcal{S}}, \mathcal{S}_i).\square \end{aligned}$$

## 5. Points périodiques dans $\mathbb{H}_p$.

Fixons une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ et considérons l'action $R_*$ sur $\mathbb{H}_p$ induite par $R$. On dit qu'un point $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ est *périodique* par $R_*$ si'l existe $n \geq 1$ tel que $R_*^n(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. Dans ce cas on dit que $\mathcal{S}$ est *indifférent* si $\deg_{R^n}(\mathcal{S}) = 1$ et on dit que $\mathcal{S}$ est *répulsif* si $\deg_{R^n}(\mathcal{S}) > 1$.

Comme on verra dans la Section 5.1 les points fixes rationnels sont étroitement relies à la notion de *réduction*, voir aussi Section 8.1.

Le reste de cette section est dédiée à la preuve des Théorèmes A et B. Dans la Section 5.2 on considére les points fixes irrationnels ou singuliers et dans les Sections 5.3 et 5.4 on considère les points périodiques répulsifs et indifférents respectivement. La Section 5.5 contient la démonstration des Théorèmes A et B.

5.1. **Réduction d'une fonction rationnelle et points fixes.** En coordonnées homogènes une fonction rationnelle s'ecrit de la forme $[P_0, P_1]$, où $P_1$ et $P_2 \in \mathbb{C}_p[z_0, z_1]$ sont de polynômes homogènes du même degré, égal au degré de la fonction rationnelle. Pour $\lambda \in \mathbb{C}_p^*$, $[\lambda P_0, \lambda P_1]$ représente la même fonction rationnelle.

Etant donné un polynôme $P \in \mathbb{C}_p[z_0, z_1]$ on note $\widetilde{P}$ sa projection dans $\overline{\mathbb{F}}_p[z_0, z_1]$.

**Définition 5.1.** *Considérons une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ donné en coordonnées homogènes par $[P_0, P_1]$. Quitte à remplacer $P_0$ et $P_1$ par $\lambda P_0$ et $\lambda P_1$ on suppose $P_0$ et $P_1$ à coefficients entiers et tel que au moins un des coefficients de $P_0$ ou $P_1$ soit de norme égale à* 1.

*Alors on dit que $R$ a une* **réduction non-triviale** *si les polynômes $\widetilde{P}_0, \widetilde{P}_1 \in \overline{\mathbb{F}}_p[z_0, z_1]$ sont tels que ni $\widetilde{P}_0$, ni $\widetilde{P}_1$ est un multiple de l'autre. Dans ce cas la fonction rationnelle $\widetilde{R} \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$, donnée en coordonnées homogènes par $[\widetilde{P_0}, \widetilde{P_1}]$, est de degré au moins 1 et on dit que $\widetilde{R}$ est la* **réduction** *de $R$.*

*Si de plus $\widetilde{P}_0$ et $\widetilde{P}_1$ n'ont pas de racine commune sur $\overline{\mathbb{F}}_p \times \overline{\mathbb{F}}_p$, autre que* $(0,0)$, *alors on dit que $R$ a* **une bonne réduction***.*

La notion de bonne réduction à été introduite par Morton et Silverman dans [MS], voir aussi [Be2], [R-L] et Section 7.2.

Les propriétés suivantes sont faciles de voir ; cf. [R-L].

Une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ a une réduction non-triviale si le point canonique $\mathcal{S}_{\mathrm{can}} \in \mathbb{H}_p$ est fixé par $R_*$. Dans ce cas la fonction rationnelle $\widetilde{R} \in \mathbb{F}_p(z)$ est de degré au moins 1 et elle coïncide avec la fonction rationnelle donnée par la Proposition 4.4.

Donc on a la propriété suivante : *Pour tout point rationnel $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ la condition $R_*(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ est équivalente a ce que $R$ ait une réduction non-triviale dans une coordonnée compatible avec $\mathcal{S}$.*

Notons qu'une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ a une bonné réduction si et seulement si elle a une réduction non-triviale qui est de degré égal au degré de $R$. De façon équivalente $R \in \mathbb{C}_p(z)$ a une bonne réduction si et seulement si le point canonique $\mathcal{S}_{\mathrm{can}} \in \mathbb{H}_p$ est fixé par $R_*$ et le degré de $R$ en $\mathcal{S}_{\mathrm{can}}$ est maximal : $\deg_R(\mathcal{S}_{\mathrm{can}}) = \deg(R)$.

Si une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ a une bonne réduction, alors pour tout bout $\mathcal{P} \in \mathcal{S}_{\mathrm{can}}$ on a $R_*(\mathcal{P}) \in \mathcal{S}_{\mathrm{can}}$ et $R(B_{\mathcal{P}}) = B_{R_*(\mathcal{P})}$.

### 5.2. **Points fixes singuliers ou irrationnels.**

**Lemme 5.2.** *Soit $\mathcal{S} = \{\mathcal{P}, \mathcal{P}'\} \in \mathbb{H}_p$ un point irrationnel et soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle telle que $R_*(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. Alors $\deg_R(\mathcal{S}) = 1$ et $R$ fixe $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.*

**Preuve.** Après changement de coordonnée on suppose $B_{\mathcal{P}} = \{|z| < r\}$ et $B_{\mathcal{P}'} = \{|z| > r\} \cup \{\infty\}$, où $r \notin |\mathbb{C}_p^*|$. Posons $R = P/Q$ avec,

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_d z^d \in \mathbb{C}_p[z] \text{ et}$$

$$Q(z) = b_0 + b_1 z + \cdots + b_{d'} z^{d'} \in \mathbb{C}_p[z].$$

Soit $0 \le n \le d$ (resp. $0 \le n' \le d'$) le plus petit entier qui maximise $|a_n| r^n$ (resp. $|b_{n'}| r^{n'}$). Comme $r \notin |\mathbb{C}_p^*|$ on a $|a_i| r^i < |a_n| r^n$ (resp. $|b_j| r^j < |b_{n'}| r^{n'}$) pour $i \neq n$ (resp. $j \neq n'$). Donc $|R(z)| = |a_n/b_{n'}||z|^{n-n'}$ pour tout $z$ tel que $|z|$ est assez proche de $r$. Donc $|a_n/b_{n'}| r^{n-n'} = r$ et comme $r \notin |\mathbb{C}_p^*|$ on a $\deg_R(\mathcal{P}) = n - n' = 1$ et $R_*$ fixe $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$. □

**Lemme 5.3.** *Soit $\mathcal{P} \in \mathbb{H}_p$ un bout singulier, soit $\{D_i\}_{i \ge 0}$ une chaine évanescente définissante et soit $r = \lim_{i \to \infty} \operatorname{diam}(D_i) > 0$. De plus soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle telle que $R_*(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$. Alors $\deg_R(\mathcal{P}) = 1$ et il existe $N \ge 0$ tel que $|R - id| \le r$ sur $D_N$.*

**Preuve.** Soit $N \ge 1$ assez grand tel que pour $i \ge N$, la boule $D_i$ ne contient ni de pôles ni de points fixes de $R$. Alors $R(D_i)$ est une boule et $\{R(D_i)\}_{i \ge N}$ est une chaine évanescente définissant $\mathcal{P}$.

Posons $\mathcal{S} = \{\mathcal{P}\} \in \mathbb{H}_p$ et soit $\mathcal{S}_i \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ le point associé à $D_i$. Par la Proposition 4.6, on peut supposer $N$ assez grand tel que

$$d(\mathcal{S}, R_*(\mathcal{S}_N)) = d(R_*(\mathcal{S}), R_*(\mathcal{S}_N)) = \deg_R(\mathcal{P})\, d(\mathcal{S}, \mathcal{S}_N).$$

Par conséquent $D_N \subset R(D_N) \subset \mathbb{C}_p$. Si $R(D_N) \neq D_N$, alors l'image de $D_N$ par $R - id$ est la boule $\{|z| \le \operatorname{diam}(D_N)\}$ ; mais ceci n'est pas possible car cette boule contient 0 et $R$ n'a pas de points fixes sur $D_N$. Donc $R(D_N) = D_N$ et par conséquent $\deg_R(\mathcal{P}) = 1$.

Comme $R$ n'a pas de point fixe sur $D_N$, $|R - id|$ est constant sur $D_N$. Comme $R$ fixe chaque boule $D_i$, pour $i \ge N$, on a $|R - id| \le \lim_{i \longrightarrow \infty} \operatorname{diam}(D_i) = r$ sur $D_N$. □

5.3. **Points périodiques répulsifs.**

**Proposition 5.4.** *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle et soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ un point périodique répulsif de $R_*$. Alors on a les propriétés suivantes.*

(1) *Le point $\mathcal{S}$ est rationnel.*
(2) *Soit $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ et $n \geq 1$ tel que $R_*^n(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$. Alors $B_{\mathcal{P}}$ contient un point fixe de $R^n$. Si de plus $R_*^n(B_{\mathcal{P}}) \subset B_{\mathcal{P}}$, alors ce point fixe est non-répulsif.*

**Preuve.**

1.– Le fait que le point $\mathcal{S}$ est rationnel est une conséquence immédiate des Lemmes 5.2 et 5.3.

2.– Après changement de coordonné on suppose $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{can}}$ et $B_{\mathcal{P}} = \{|z| < 1\}$. Donc $R^n$ a une réduction non-triviale qu'on note $\widetilde{R} \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$. Par hypothèse $\deg(\widetilde{R}) = \deg_{R^n}(\mathcal{S}_{\text{can}}) > 1$, donc la fonction rationnelle $Q(z) = R^n(z) - z$ a $\widetilde{Q}(z) = \widetilde{R}(z) - z \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$ comme réduction. Donc $\widetilde{Q}(0) = 0$ et par conséquent $Q_*(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ et $\{|z| < 1\} = B_{\mathcal{P}} \subset Q(B_{\mathcal{P}})$ (Lemme 4.2). Alors il existe $z_0 \in B_{\mathcal{P}}$ tel que $R^n(z_0) - z_0 = Q(z_0) = 0$.

2.1.– Si on a $R^n(\{|z| < 1\}) \subset \{|z| < 1\}$ alors $|(R^n)'(z_0)| \leq 1$, donc $z_0$ est non-répulsif. $\square$

**Corollaire 5.5.** *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle telle que $R_*$ ait un point périodique répulsif dans $\mathbb{H}_p$. Alors $R$ a une infinité de points périodiques non-répulsifs dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$.*

**Preuve.** Soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ un point périodique répulsif de $R_*$ de période $n \geq 1$. Soit $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}_{\text{can}}$ l'ensemble fini tel que $R(B_{\mathcal{P}}) = B_{R_*(\mathcal{P})}$, pour tout bout $\mathcal{P} \in \mathcal{S} - \mathcal{T}$ (Proposition 4.4).

Comme $\widetilde{R}$ a une infinité de points périodiques (Lemme 10.1) il existe une infinité de bouts $\mathcal{P} \in \mathcal{S}_{\text{can}}$ périodiques par $R_*^n$ et tel que $R^{nm}(\mathcal{P}) \in \mathcal{S} - \mathcal{T}$ pour $m \geq 1$. Pour un tel $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ on a $R^{nk}(B_{\mathcal{P}}) = B_{\mathcal{P}}$, où $k \geq 1$ est la période de $\mathcal{P}$. Par la partie 2 de la Proposition 5.4 la boule $B_{\mathcal{P}}$ contient un point périodique non-répulsif de $R$. $\square$

**Corollaire 5.6.** *Une fonction rationnelle ayant une réduction non-triviale de degré au moins deux, a une infinité de points périodiques non-répulsifs dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$.*

**Preuve.** Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle ayant une réduction $\widetilde{R} \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$ non-triviale. Alors $R_*(\mathcal{S}_{\text{can}}) = \mathcal{S}_{\text{can}}$ et $\deg_R(\mathcal{S}_{\text{can}}) = \deg(\widetilde{R}) > 1$ par hypothèse (cf. Section 5.1). Cette à dire $\mathcal{S}_{\text{can}}$ est un point fixe répulsif de $R$. Alors le corollaire suit du corollaire précédent. $\square$

5.4. **Points périodiques indifférents.** Dans cette section on considére le Théorème 1 qui est une (petite) reformulation du Théorème 3 de [R-L]. Le but est de démontrer la Proposition 5.7 ; la démonstration des Théorèmes A, B et C en dépend.

Etant donné une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$, soit $\mathcal{E}(R) \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ l'interieur de l'ensemble des points récurrents par $R$, qu'on appelle *domaine de quasi-périodicité* de $R$ ; voir [R-L]. Cet ensemble est ouvert, invariant par $R$ et pour tout $n \geq 1$ on a $\mathcal{E}(R^n) = \mathcal{E}(R)$. De plus $\mathcal{E}(R)$ contient les points périodiques indifférents de $R$.

Rappelons qu'un affinoïde ouvert est le complémentaire dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ d'une réunion finie non-vide de boules fermées disjointes $\{B_i\}_I$. On appelle les bouts correspondants aux boules $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B_i$, *bouts de l'affinoïde.*

**Théorème 1** ([R-L] Théorème 3)**.** *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle de degré au moins deux. Alors chaque composante analytique $C$ de $\mathcal{E}(R)$ est un affinoïde ouvert différent de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ et chaque point de $\mathbb{H}_p$ contenant un bout de $C$ est un point périodique répulsif de $R_*$.*

La notion de composante analytique (introduité dans [Be1]) remplace la notion de composante connexe ; voir aussi [R-L]. La seule propriété qui nous intéresse ici c'est la suivante : $\mathcal{E}(R) \neq \emptyset$ implique qu'il existe un composante analytique de $\mathcal{E}(R)$, qui d'après le Théorème 1 c'est un affinoïde ouvert.

Donc une conséquence immédiate du Théorème 1 est que $\mathcal{E}(R) \neq \emptyset$ implique que $R_*$ a un point périodique répulsif dans $\mathbb{H}_p$.

**Proposition 5.7.** *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle de degré au moins deux. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *$R_*$ a un point périodique indifférent dans $\mathbb{H}_p$.*
(2) *$R_*$ a une infinité de points périodiques indifférents dans $\mathbb{H}_p$.*
(3) *$R$ a un point périodique indifférent dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$.*
(4) *$R$ a une infinité de points périodiques indifférents dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$.*
(5) *$\mathcal{E}(R) \neq \emptyset$.*

*Dans ce cas $R_*$ a aussi un point périodique répulsif dans $\mathbb{H}_p$.*

La démonstration de cette proposition dépend du lemme suivant.

**Lemme 5.8.** *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle.*

(1) *Soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ un point fixe indifférent de $R_*$. Alors il existe un bout $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ fixé par $R_*$ ; notons qu'on a $\deg_R(\mathcal{P}) = 1$.*
(2) *Soit $\mathcal{P}$ un bout fixé par $R_*$ tel que $\deg_R(\mathcal{P}) = 1$ et soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ le point contenant $\mathcal{P}$. Alors il existe un point $\overline{\mathcal{S}} \in \widehat{B}_{\mathcal{P}}$ tel que tout point dans le segment $(\mathcal{S}, \overline{\mathcal{S}}) \subset \mathbb{H}_p$ est fixe indifférent.*

**Preuve.**
1.– La assertion est triviale si $\mathcal{S}$ est singulier. Elle suit du Lemme 5.2 si $\mathcal{S}$ est irrationnel et de la Proposition 4.4 si $\mathcal{S}$ est rationnel.

2.– Soit $\mathcal{S}_0$ tel que $\mathcal{S}_0 \prec B_{\mathcal{P}}$, tel que $R_*$ soit injective sur $(\mathcal{S}_0, \mathcal{S})$ et tel que $\deg_R(\mathcal{S}') = 1$ pour tout $\mathcal{S}' \in (\mathcal{S}_0, \mathcal{S})$ (Proposition 4.6). Comme $R_*(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$ on a $R_*(\mathcal{S}_0) \prec B_{\mathcal{P}}$.

Si $\mathcal{S}_0$ n'est pas fixé par $R_*$ considérons le point $\overline{\mathcal{S}}$ tel que $(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}) \cap (R_*(\mathcal{S}_0), \mathcal{S}) = [\overline{\mathcal{S}}, \mathcal{S})$ (Lemme 2.11). Alors $R_*(\overline{\mathcal{S}}) \in (R_*(\mathcal{S}_0), \mathcal{S})$ et $d(\overline{\mathcal{S}}, \mathcal{S}) = d(R_*(\overline{\mathcal{S}}), \mathcal{S})$, donc $\overline{\mathcal{S}}$ est fixé par $R_*$. Quitte à remplacer $\mathcal{S}_0$ par $\overline{\mathcal{S}}$ on suppose $R_*(\mathcal{S}_0) = \mathcal{S}_0$.

Alors tout point dans $(\mathcal{S}_0, \mathcal{S})$ est fixé par $R_*$ (cf. Proposition 4.6). $\square$

**Preuve de la Proposition 5.7.** Le fait que $\mathcal{E}(R) \neq \emptyset$ implique l'existence d'un point périodique répulsif de $R_*$ dans $\mathbb{H}_p$ est une conséquence immédiate du Théorème 1.

L'équivalence entre les propriétés 3, 4 et 5 à été démontré dans [R-L], voir Corollaire 5.17. L'equivalence entre 1 et 2 suit du Lemme 5.8. Donc il reste à montrer que 3 implique 1 et 1 implique 5.

Supposons que $R$ a un point périodique indifférent dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$. On se ramene au cas $R(0) = 0$ et $|R'(0)| = 1$. Alors pour $r > 0$ assez petit $R : \{|z| \leq r\} \longrightarrow \{|z| \leq r\}$

est de degré 1 et par conséquent le point $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ associé à la boule $\{|z| < r\}$ est un point fixe indifférent de $R_*$ ; voir aussi Proposition 4.5.

Soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ un point périodique indifférent de $R_*$. Quitte à remplacer $R$ par un itéré on suppose que $\mathcal{S}$ est fixé par $R_*$. D'après le Lemme 5.8 on peut supposer que $\mathcal{S}$ est rationnel et après changement de coordonnée on suppose $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{\text{can}}$. Alors $R$ a une réduction $\widetilde{R} \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$ de degré 1. Soient $\mathcal{P} \in \mathcal{S}_{\text{can}}$ et $n \geq 1$ tel que $R^n : B_{\mathcal{P}} \to B_{\mathcal{P}}$ soit de degré 1 (cf. Lemme 10.1 et Proposition 4.4). Alors $B_{\mathcal{P}} \subset \mathcal{E}(R)$ (voir [R-L] Corollaire 3.12). □

5.5. **Théorèmes A et B.** Fixons une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ de degré au moins deux. Notons que par le Corollaire 5.5 le Théorème A suit du Théorème A'.

**Lemme 5.9.** *Soit $z_0 \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ un point fixe de $R$ et soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ un point tel que $\mathcal{S} \in (z_0, R_*(\mathcal{S})) \subset \mathbb{H}_p$. Alors, soit $z_0$ est un point fixe répulsif de $R$, soit $(z_0, \mathcal{S})$ contient un point fixe répulsif de $R_*$.*

**Preuve.** Pour $r > 0$ soit $\mathcal{S}_r \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ le point associé à la boule $\{|z| < r\}$. Notons que la propriété $R_*(\mathcal{S}_r) \prec \{|z| < r\}$ est ouverte en $r$.

Comme $\mathcal{S} \in (z_0, R_*(\mathcal{S})) \subset \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$, le point $\mathcal{S}$ est non-singulier. Après changement de coordonnée on suppose $z_0 = \infty$ et $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{r_0}$. Posons

$$r_1 = \sup\{r \geq r_0 \mid R_*(\mathcal{S}_{r'}) \prec \{|z| < r\} \text{ pour tout } r' \in (r_0, r)\} > r_0.$$

Si $r_1 = \infty$, alors $\infty \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ est un point fixe répulsif de $R$ (cf. Proposition 4.5).

Supposons $r_1 < \infty$. Alors $R_*(\mathcal{S}_{r'}) \prec \{|z| < r_1\}$ pour tout $r' \in (r_0, r_1)$. Donc $R_*(\mathcal{S}_{r_1})$ appartient à la fermeture de $\widehat{B} = \{\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p \mid \mathcal{S} \prec \{|z| < r_1\}\}$, qui est égale à $\widehat{B} \cup \{\mathcal{S}_{r_1}\}$ (Lemme 3.6). Mais $R_*(\mathcal{S}_{r_1}) \notin \widehat{B}$ par définition de $r_1$, donc $R_*(\mathcal{S}_{r_1}) = \mathcal{S}_{r_1}$. Par construction on a

$$d(R_*(\mathcal{S}_{r'}), \mathcal{S}_{r_1}) > d(\mathcal{S}_{r'}, \mathcal{S}_{r_1}), \text{ pour tout } r' \in (r_0, r_1).$$

Donc le degré de $R$ au bout associé à $\{|z| < r_1\}$ est strictement plus grand que 1 (cf. partie 3 de la Proposition 4.6) et par conséquent $\deg_R(\mathcal{S}_{r_1}) > 1$. □

**Preuve du Théorème A'.** Si $R$ a un point périodique indifférent le Théorème suit de la Proposition 5.7, donc on suppose que $R$ a deux points périodiques attractifs $z_0$ et $z_1 \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$. Quitte à remplacer $R$ par un itéré on suppose les points $z_0$ et $z_1$ fixés par $R$ et aprés changement de coordonnée on suppose $z_0 = 0$ et $z_1 = \infty$.

Pour $r > 0$ soit $\mathcal{S}_r \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ le point associé à la boule $\{|z| < r\}$. Comme 0 est un point fixe attractif, pour $r > 0$ petit on a $R_*(\mathcal{S}_r) = \mathcal{S}_{r'}$, avec $r' < r$ (Proposition 4.5). C'est-à-dire $\mathcal{S}_r \in (\infty, R_*(\mathcal{S}_r)) \subset \mathbb{H}_p$. Par le Lemme 5.9, $(\infty, \mathcal{S}_r) \subset \mathbb{H}_p$ contient un point fixe répulsif de $R_*$. □

**Lemme 5.10.** *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle et soit $\mathcal{P}$ un bout non-singulier tel que $B_{\mathcal{P}} \subset B_{R_*(\mathcal{P})}$ et $R_*(\mathcal{P}) \neq \mathcal{P}$. Alors on a les proriétés suivantes.*

(1) *La boule $B_{\mathcal{P}}$ contient au moins $\deg_R(\mathcal{P}) \geq 1$ points fixes de $R$, comptés avec multiplicité.*
(2) *Soit $B_{\mathcal{P}} \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ contient un point fixe répulsif de $R$, soit $\widehat{B}_{\mathcal{P}} \subset \mathbb{H}_p$ contient un point fixe répulsif de $R_*$.*

**Preuve.**
1.– Après changement de coordonnée on suppose que $R_*(\mathcal{P})$ est le bout associé à $\{|z| < r\}$. Posons $Q(z) = R(z) - z \in \mathbb{C}_p(z)$. Alors il n'est pas difficile de voir

que $Q_*(\mathcal{P}) = R_*(\mathcal{P})$ et $\deg_Q(\mathcal{P}) = \deg_R(\mathcal{P})$ (cf. Lemme 2.3 de [R-L]). Par le Lemme 4.2 $B_\mathcal{P}$ contient au moins $\deg_Q(\mathcal{P}) = \deg_R(\mathcal{P})$ zéros de $Q$, comptés avec multiplicité.

2.– Soit $z_0 \in B_\mathcal{P}$ un point fixe de $R$ et soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^\mathbb{R}$ le point contenant le bout $\mathcal{P}$. Si $R_*(\mathcal{S}) \neq \mathcal{S}$, alors par hypothèse on a $\mathcal{S} \in (z_0, R_*(\mathcal{S}))$ et l'assertion suit du Lemme 5.9.

Supposons $R_*(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. Alors pour $\mathcal{S}' \in (z_0, \mathcal{S})$ proche de $\mathcal{S}$ on a $R_*(\mathcal{S}') \in \widehat{B}_{R_*(\mathcal{P})}$. Comme par hypothése $R_*(\mathcal{P}) \neq \mathcal{P}$, on a $\mathcal{S}' \in (z_0, R_*(\mathcal{S}'))$ et l'assertion suit du Lemme 5.9. $\square$

**Preuve du Théorème B.** Soit $z_0 \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ un point fixe non-répulsif de $R$. Il y a deux cas.

*Cas 1.-* Le point fixe $z_0$ est attractif. Soit $B$ une boule fermée contenant $z_0$, assez petite. Alors le bout $\mathcal{P}$ associé à $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B$ est tel que $B_\mathcal{P} \subset B_{R_*(\mathcal{P})}$ et $R_*(\mathcal{P}) \neq \mathcal{P}$ (cf. Proposition 4.5). Donc le théorème suit du lemme précédent dans ce cas.

*Cas 2.-* Le point fixe $z_0$ est indifférent. Alors la composante analytique $C$ de $\mathcal{E}(R)$ contenant $z_0$ est fixée par $R$. Soient $\mathcal{P}_0, \ldots, \mathcal{P}_n$ les bouts de $C$ et soit $\mathcal{S}_i \in \mathbb{H}_p$ le point contenant $\mathcal{P}_i$. Notons que $\deg_R(\mathcal{P}_i) = 1$.

Alors $R_*$ permute les bouts $\mathcal{P}_0, \ldots, \mathcal{P}_n$ et d'après le Théorème 1 il existe $0 \leq i \leq n$ tel que $\deg_R(\mathcal{S}_i) > 1$. Si $R_*(\mathcal{S}_i) = \mathcal{S}_i$ on est fini, donc on suppose $R_*(\mathcal{S}_i) = \mathcal{S}_j$ avec $j \neq i$. Comme $\deg_R(\mathcal{P}_i) = 1$ il existe un bout $\mathcal{P} \in \mathcal{S}_i$ différent de $\mathcal{P}_i$ tel que $R_*(\mathcal{P}) = R_*(\mathcal{P}_i) = \mathcal{P}_j$. En particulier $\mathcal{P} \neq \mathcal{P}_j = R_*(\mathcal{P})$. De plus on a,

$$B_\mathcal{P} \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B_{\mathcal{P}_i} \subset B_{\mathcal{P}_j}.$$

Alors le théorème suit de la partie 2 du Lemme 5.10. $\square$

## 6. Applications propres et points fixes.

Le but de cette section est de montrer un critère pour l'existence de points fixes (Proposition 6.3), qu'on utilisera dans la démonstration du Théorème C pour " produir " des points périodiques, voir Proposition C dans la Section 9.

Fixons une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$. Etant donné un ouvert $\widehat{\mathcal{V}} \subset \mathbb{H}_p$ on dit que l'application $R_* : \widehat{\mathcal{V}} \longrightarrow R_*(\widehat{\mathcal{V}})$ est **propre** si $R_*(\partial \widehat{\mathcal{V}}) \cap R_*(\widehat{\mathcal{V}}) = \emptyset$.

**Lemme 6.1.** *Soit $\widehat{\mathcal{V}} \subset \mathbb{H}_p$ un ouvert tel que l'application $R_* : \widehat{\mathcal{V}} \longrightarrow R_*(\widehat{\mathcal{V}})$ est propre. Soit $\widehat{\mathcal{W}'} \subset R_*(\widehat{\mathcal{V}})$ un ouvert connexe et soit $\widehat{\mathcal{W}} \subset \widehat{\mathcal{V}}$ une composante connexe de $R_*^{-1}(\widehat{\mathcal{W}'}) \cap \widehat{\mathcal{V}}$. Alors $R_*(\widehat{\mathcal{W}}) = \widehat{\mathcal{W}'}$ et l'application $R_* : \widehat{\mathcal{W}} \longrightarrow R_*(\widehat{\mathcal{W}})$ est propre.*

La démonstration de ce lemme dépend du Lemme 6.2 plus bas.

Par exemple $R_*$, comme application de $\mathbb{H}_p$ dans lui même, est propre. Alors comme conséquence du lemme, pour tout ouvert $\widehat{\mathcal{W}} \subset \mathbb{H}_p$ et toute composante connexe $\widehat{\mathcal{W}_0}$ de $R_*^{-1}(\widehat{\mathcal{W}})$, on a $R_*(\widehat{\mathcal{W}_0}) = \widehat{\mathcal{W}}$ et l'application $R_* : \widehat{\mathcal{W}_0} \longrightarrow \widehat{\mathcal{W}}$ est propre.

**Lemme 6.2.** *Soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$, $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ et soit $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p$ tel que $\mathcal{S}' \prec B_{R_*(\mathcal{P})}$. Alors il existe $\overline{\mathcal{S}} \in R_*^{-1}(\mathcal{S}')$ tel que $\overline{\mathcal{S}} \prec B_{\mathcal{P}}$, tel que $R_*((\mathcal{S}, \overline{\mathcal{S}})) = (R_*(\mathcal{S}), \mathcal{S}')$ et tel que $R_*$ est injective sur $[\mathcal{S}, \overline{\mathcal{S}}]$. On a alors $d(\mathcal{S}, \overline{\mathcal{S}}) \leq d(R_*(\mathcal{S}), \mathcal{S}')$.*

**Preuve.** La dernière assertion suit du Corollaire 4.8.

Posons $r_0 = d(R_*(\mathcal{S}), \mathcal{S}')$ et pour $0 \leq r \leq r_0$ soit $\mathcal{S}'_r \in [R_*(\mathcal{S}), \mathcal{S}']$ le point tel que $d(R_*(\mathcal{S}), \mathcal{S}'_r) = r$. En particulier $\mathcal{S}'_0 = R_*(\mathcal{S})$ et $\mathcal{S}'_{r_0} = \mathcal{S}'$.

Posons $\mathcal{S}_0 = \mathcal{S}$. Il suffit de montrer que pour $0 \leq r \leq r_0$ on peut définir $\mathcal{S}_r \in \widehat{B}_{\mathcal{P}}$ tel qu'on ait $R_*(\mathcal{S}_r) = \mathcal{S}'_r$ et $\cup_{0 \leq r' \leq r} \{\mathcal{S}_{r'}\} = [\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_r]$. Ceci est une conséquence des considérations suivantes.

(1) Supposons que est $\mathcal{S}_r$ déjà définit pour $0 \leq r \leq r_1 < r_0$. Soit $\mathcal{P}' \in \mathcal{S}'_{r_1} = R_*(\mathcal{S}_{r_1})$ le bout tel que $\mathcal{S}'_{r_0} \prec B_{\mathcal{P}'}$ et soit $\mathcal{P}_1 \in \mathcal{S}_{r_1}$ un bout tel que $R_*(\mathcal{P}_1) = \mathcal{P}'$ ; si $r_1 = 0$ on choisit $\mathcal{P}_1 = \mathcal{P}$. Par la Proposition 4.6 il existe $\varepsilon > 0$ tel qu'on peut définir $\mathcal{S}_r \in \widehat{B}_{\mathcal{P}_1}$ pour $r_1 \leq r \leq r_1 + \varepsilon$.

(2) Supposons que $\mathcal{S}_r$ est déjà définit pour $0 \leq r < r_1$. Alors pour $0 < r < r' < r_1$ on a $d(\mathcal{S}_r, \mathcal{S}_{r'}) \leq r' - r$ (Proposition 4.6). Comme $\mathbb{H}_p$ est complet (Proposition 3.2) il existe un point limite de $\{\mathcal{S}_r\}_{0 \leq r < r_1}$, quand $r \to r_1$. On définit $\mathcal{S}_{r_1}$ comme ce point limite.

$\square$

**Preuve du Lemme 6.1.** Fixons un point $\mathcal{S} \in \widehat{\mathcal{W}}$ et soit $\mathcal{S}' \in \widehat{\mathcal{W}}' - \{R_*(\mathcal{S})\}$. Par le Lemme 6.2 il existe $\overline{\mathcal{S}} \in R_*^{-1}(\mathcal{S}')$ tel que $R_*((\mathcal{S}, \overline{\mathcal{S}})) = (R_*(\mathcal{S}), \mathcal{S}') \subset \widehat{\mathcal{W}}' \subset R_*(\widehat{\mathcal{V}})$. Comme l'application $R_* : \widehat{\mathcal{V}} \longrightarrow R_*(\widehat{\mathcal{V}})$ est propre on a $[\mathcal{S}, \overline{\mathcal{S}}] \subset \widehat{\mathcal{V}}$. Donc $\overline{\mathcal{S}} \in \widehat{\mathcal{W}}$ et par conséquent $R_*(\widehat{\mathcal{W}}) = \widehat{\mathcal{W}}'$.

D'autre part soit $\overline{\mathcal{S}} \in \partial \widehat{\mathcal{W}}$. Si de plus $\overline{\mathcal{S}} \in \partial \widehat{\mathcal{V}}$ alors $R_*(\overline{\mathcal{S}}) \notin \widehat{\mathcal{W}}' \subset R_*(\widehat{\mathcal{V}})$, car $R_* : \widehat{\mathcal{V}} \longrightarrow R_*(\widehat{\mathcal{V}})$ est propre. Si $\overline{\mathcal{S}} \in \widehat{\mathcal{V}}$ alors $R_*(\overline{\mathcal{S}}) \notin \widehat{\mathcal{W}}'$, par définition de $\widehat{\mathcal{W}}$. Donc $R_* : \widehat{\mathcal{W}} \longrightarrow \widehat{\mathcal{W}}'$ est propre. $\square$

## 6.1. **Un critère pour l'existence de point fixe.**

**Proposition 6.3.** *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle et soit $\widehat{\mathcal{V}} \subset \mathbb{H}_p$ un ouvert connexe tel que $R_* : \widehat{\mathcal{V}} \longrightarrow R_*(\widehat{\mathcal{V}})$ soit propre et tel que $R_*(\widehat{\mathcal{V}})$ contient la fermeture topologique $\overline{\mathcal{V}}$ de $\widehat{\mathcal{V}}$. Alors, soit $\widehat{\mathcal{V}}$ contient un point fixe rationnel de $R_*$, soit il existe un point fixe répulsif $z_0 \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ de $R$ tel que $\widehat{\mathcal{V}}$ contient une demi-géodésique issue de $z_0$.*

Le corollaire suivant est une conséquence immédiate de la proposition.

**Corollaire 6.4.** *Soit $\widehat{\mathcal{W}} \subset \mathbb{H}_p$ un ouvert connexe borné et soit $\widehat{\mathcal{V}}$ une composante connexe de $R_*^{-1}(\widehat{\mathcal{W}})$. Si $\widehat{\mathcal{W}}$ contient la fermeture de $\widehat{\mathcal{V}}$, alors $\widehat{\mathcal{V}}$ contient un point fixe rationnel de $R_*$.*

**Preuve de la Proposition 6.3.** Supposons que $R_*$ n'a pas de point fixe rationnel dans $\widehat{\mathcal{V}}$. Alors $R_*$ n'a pas de point fixe dans $\widehat{\mathcal{V}}$ ; car si $\mathcal{S} \in \widehat{\mathcal{V}}$ est un point fixe de $R_*$ alors $\mathcal{S}$ n'est pas rationnel par hypothèse et donc $\mathcal{S}$ est un point fixe indifférent (Proposition 5.4), mais comme $\widehat{\mathcal{V}}$ est ouverte le Lemme 5.8 et le Lemme 3.3 impliquent que $\widehat{\mathcal{V}}$ contient un point fixe rationnel.

1.– Fixons $\mathcal{S}_0 \in \widehat{\mathcal{V}}$. Pour chaque $t \geq 0$ on définira $\mathcal{S}_t \in \widehat{\mathcal{V}}$ à distance $t$ de $\mathcal{S}_0$ tel que $R_*$ soit injective sur $[\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_t]$, tel que pour tout $\mathcal{S} \in [\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_t]$ on ait $R_*(\mathcal{S}) \in [R_*(\mathcal{S}_0), \mathcal{S})$ et tel que

$$[\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_t] = \cup_{0 \leq t' \leq t}\{\mathcal{S}_{t'}\} \quad \text{et} \quad [R_*(\mathcal{S}_0), R_*(\mathcal{S}_t)] = \cup_{0 \leq t' \leq t}\{R_*(\mathcal{S}_{t'})\}.$$

1.1.– Soit $t_0 \geq 0$ tel que $\mathcal{S}_t$ est déjà définit pour $0 \leq t \leq t_0$. On définira $\mathcal{S}_t$ pour $t > t_0$ proche de $t_0$.

Notons que par hypothèse $R_*(\mathcal{S}_{t_0}) \in [R_*(\mathcal{S}_0), \mathcal{S}_{t_0})$, donc $[R_*(\mathcal{S}_0), \mathcal{S}_{t_0}) = [R_*(\mathcal{S}_0), R_*(\mathcal{S}_{t_0})] \sqcup (R_*(\mathcal{S}_{t_0}), \mathcal{S}_{t_0})$ (Lemme 2.9). Soit $\overline{\mathcal{S}} \in R_*^{-1}(\mathcal{S}_{t_0})$ donné par le Lemme 6.2, de telle façon que $R_*$ soit injective sur $[\mathcal{S}_{t_0}, \overline{\mathcal{S}}]$ et $R_*((\mathcal{S}_{t_0}, \overline{\mathcal{S}})) = (R_*(\mathcal{S}_{t_0}), \mathcal{S}_{t_0})$. Comme $R_*$ est injective sur $[\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_{t_0}]$ et $R_*([\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_{t_0}]) = [R_*(\mathcal{S}_0), R_*(\mathcal{S}_{t_0})]$, on a $\mathcal{S}_{t_0} \in (\mathcal{S}_0, \overline{\mathcal{S}})$ et $R_*$ est injective sur $(\mathcal{S}_0, \overline{\mathcal{S}})$.

Soit $t_1 > t_0$ assez proche de $t_0$ tel que $[\mathcal{S}_{t_0}, \mathcal{S}_{t_1}] \subset \widehat{\mathcal{V}}$ et tel que

$$d(\mathcal{S}_{t_0}, \mathcal{S}_{t_1}) + d(R_*(\mathcal{S}_{t_0}), R_*(\mathcal{S}_{t_1})) < d(\mathcal{S}_{t_0}, R_*(\mathcal{S}_{t_0})) \ ; \tag{5}$$

où $\mathcal{S}_{t_1} \in (\mathcal{S}_0, \overline{\mathcal{S}})$ est le point à distance $t_1$ de $\mathcal{S}_0$, voir figure 1. Pour $t_0 < t < t_1$ soit $\mathcal{S}_t$ le point dans $[\mathcal{S}_{t_0}, \mathcal{S}_{t_1}]$ à distance $t$ de $\mathcal{S}_0$.

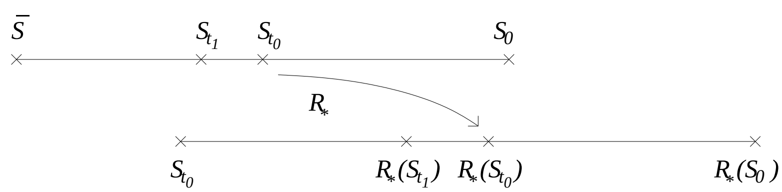


FIGURE 1

Il reste à montrer que pour tout $t_0 < t \leq t_1$ on a $R_*(\mathcal{S}_t) \in [R_*(\mathcal{S}_0), \mathcal{S}_t)$. Comme $R_*(\mathcal{S}_t) \in (R_*(\mathcal{S}_{t_0}), \mathcal{S}_{t_0})$ les bouts $\mathcal{P}, \mathcal{P}' \in R_*(\mathcal{S}_t)$ tel que $\mathcal{S}_{t_0} \prec B_{\mathcal{P}}$ et $R_*(\mathcal{S}_{t_0}) \prec B_{\mathcal{P}'}$ respectivement, sont distincts. Alors $\mathcal{S}_t \prec B_{\mathcal{P}}$, car sinon $R_*(\mathcal{S}_t) \in (\mathcal{S}_{t_0}, \mathcal{S}_t]$ et on aurait

$$\begin{aligned} d(\mathcal{S}_{t_0}, \mathcal{S}_t) &\geq d(\mathcal{S}_{t_0}, R_*(\mathcal{S}_t)) \geq d(\mathcal{S}_{t_0}, R_*(\mathcal{S}_{t_1})) \\ &= d(\mathcal{S}_{t_0}, R_*(\mathcal{S}_{t_0})) - d(R_*(\mathcal{S}_{t_0}), R_*(\mathcal{S}_{t_1})) > d(\mathcal{S}_{t_0}, \mathcal{S}_{t_1}), \end{aligned}$$

où la derinère inégalité suit de (5). Donc $\mathcal{S}_t \prec B_{\mathcal{P}}$ et comme $R_*(\mathcal{S}_0) \prec B_{\mathcal{P}'}$ on a $R_*(\mathcal{S}_t) \in (R_*(\mathcal{S}_0), \mathcal{S}_t)$.

1.2.– Soit $t_0 > 0$ et supposons que $\mathcal{S}_t$ est déjà définit pour $0 \leq t < t_0$ ; maintenant on définira $\mathcal{S}_{t_0}$.

Comme $\mathbb{H}_p$ est complet (Proposition 3.2) il existe un point $\mathcal{S}_{t_0} \in \mathbb{H}_p$ tel que $[\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_{t_0}) = \cup_{0 \leq t < t_0}\{\mathcal{S}_t\}$. En particulier $\mathcal{S}_{t_0}$ est à distance $t_0$ de $\mathcal{S}_0$, $R_*$ est injective sur $[\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_{t_0}]$ et par continuité on a $R_*(\mathcal{S}_{t_0}) \in [R_*(\mathcal{S}_0), \mathcal{S}_{t_0}]$.

Par définition on a $\mathcal{S}_{t_0} \in \overline{\mathcal{V}} \subset R_*(\widehat{\mathcal{V}})$ et par conséquent $R_*(\mathcal{S}_{t_0}) \in [R_*(\mathcal{S}_0), \mathcal{S}_{t_0}) \subset R_*(\widehat{\mathcal{V}})$. Comme $[\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_{t_0}) \subset \widehat{\mathcal{V}}$ et l'application $R_* : \widehat{\mathcal{V}} \longrightarrow R_*(\widehat{\mathcal{V}})$ est propre on conclut $\mathcal{S}_{t_0} \in \widehat{\mathcal{V}}$. Comme par hypothèse $R_*$ n'a pas de points fixes dans $\widehat{\mathcal{V}}$ on obtient $R_*(\mathcal{S}_{t_0}) \in [R_*(\mathcal{S}_0), \mathcal{S}_{t_0})$.

2.– Comme conséquence de 1.1 et 1.2 on peut définir $\mathcal{S}_t \in \widehat{\mathcal{V}}$, pour $t \geq 0$, satisfasaint les proprietétés en 1. Pour $t \geq 0$ soit $\mathcal{P}_t \in \mathcal{S}_t$ le bout tel que $\mathcal{S}_{t'} \in \widehat{B}_{\mathcal{P}_t}$ pour $t' > t$.

Alors pour $t < t'$ la boule $B_{\mathcal{P}_t}$ contient $B_{\mathcal{P}_{t'}}$ strictement. Comme $\mathcal{S}_t$ est à distance $t$ de $\mathcal{S}_0$ le diamètre chordal de $B_{\mathcal{P}_t}$ tend vers zéro quand $t \to \infty$. Comme $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ est complet il existe $z_0 \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ tel que $\cap_{t \geq 0} B_{\mathcal{P}_t} = \{z_0\}$. La propriéte $R_*(\mathcal{S}_t) \in [R_*(\mathcal{S}_0), \mathcal{S}_t)$ implique que $z_0$ est un point fixe de $R$. La propriéte $R_*(\mathcal{S}_t) \in [R_*(\mathcal{S}_0), \mathcal{S}_t)$ implique aussi que $z_0$ est répulsif (cf. Proposition 4.5). □

## 7. Bonne réduction et l'ensemble exceptionnel.

Dans cette section on considère l'*ensemble exceptionnel* de l'action sur $\mathbb{H}_p$ induite par une fonction rationnelle ; comme dans le cas complexe pour les fonctions rationnelles, voir par exemple [Mi]. On peut comparer aussi avec [Hs] pour le cas des fonctions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{C}_p$.

Cet ensemble est étroitement relie au concept de bonne réduction introduit par P. Morton et J.H. Silverman en [MS] ; voir Section 5.1.

De façon un peu surprenante une partie essentielle du Théorème 2, caractérisant l'ensemble exceptionnel, est donnée par un théorème de R. Benedetto, qui à été originalement formulé de façon complètment indépendante de l'espace hyperbolique ; voir [Be2].

On montre d'abord la Proposition 7.1 (dans la Section 7.1) sur le nombre de préimages d'un point dans $\mathbb{H}_p$ par la action induite par une fonction rationnelle.

### 7.1. Sur le nombre de préimages d'un point dans $\mathbb{H}_p$.

Le but de cette section est de montrer la proposition suivante.

**Proposition 7.1.** *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle. Alors pour tout point $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ l'ensemble $R_*^{-1}(\mathcal{S}) \subset \mathbb{H}_p$ des préimages de $\mathcal{S}$ par $R_*$ est fini et on a*

$$\sum_{R_*^{-1}(\mathcal{S})} \deg_R(\mathcal{S}') = \deg(R).$$

Ceci à été montré dans [R-L] (Lemme 2.5) pour les points rationnels de $\mathbb{H}_p$.

Fixons une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$. On considère d'abord le lemme suivant.

**Lemme 7.2.** *Chaque point $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ a un nombre fini de préimages par $R_*$.*

**Preuve.** Soient $\mathcal{S}_i \in R_*^{-1}(\mathcal{S})$, pour $1 \leq i \leq k$, des points distincts ; on montrera que $k \leq \deg(R)$. Choisissons un bout $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ et pour $1 \leq i \leq k$ soit $\mathcal{P}_i \in \mathcal{S}_i$ un bout tel que $R_*(\mathcal{P}_i) = \mathcal{P}$. De plus soient $\{C_j\}_{j \geq 0}$ et $\{C_{i,j}\}_{j \geq 0}$ chaines évanescentes représentant $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}_i$ respectivement.

Soit $N \geq 0$ assez grand tel que les $C_{i,N}$ soient disjoints deux à deux et soit $M \geq 0$ tel que $C_M \subset R(C_{i,N})$ pour $1 \leq i \leq k$. Fixons $w \in C_M$. Alors chaque $C_{i,N}$ contient au moins une préimage de $w$ et par conséquent $k \leq \#R^{-1}(w) \leq \deg(R)$. □

**Preuve de la Proposition 7.1.**

1.– Supposons d'abord que le point $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ n'est pas singulier. Après changement de coordonnée on suppose $\mathcal{S} \in (0, \infty) \subset \mathbb{H}_p$. Pour $r > 0$ on note $\mathcal{S}_r \in (0, \infty)$ le point de $\mathbb{H}_p$ associé à la boule $\{|z| < r\}$.

1.1.– Soit $X \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ l'ensemble des zéros et des pôles de $R$ et soit $\widehat{X} \subset \mathbb{H}_p$ l'enveloppe convexe de $X$. Comme $X$ a au moins deux éléments, l'ensemble $\widehat{X}$ est non-vide.

Soit $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p$ un point tel que $R_*(\mathcal{S}') \in (0, \infty)$. Alors il existe bouts $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_\infty \in \mathcal{S}'$ tel que $0 \in B_{R_*(\mathcal{P}_0)}$ et $\infty \in B_{R_*(\mathcal{P}_\infty)}$. Par le Lemme 4.2 les boules $B_{\mathcal{P}_0}$ et $B_{\mathcal{P}_\infty}$ intersect $X$. Donc $\mathcal{S}' \in \widehat{X}$ et par conséquent $R_*^{-1}((0, \infty)) \subset \widehat{X}$.

1.2.– Considérons la fonction

$$r \longrightarrow \sum_{R_*^{-1}(\mathcal{S}_r)} \deg_R(\mathcal{S}').$$

Elle prend la valeur $\deg(R)$ pour $r > 0$ petit (cf. Proposition 4.5 et (4)) et alors il suffit de montrer qu'elle est localement constante.

Fixons $r_0 > 0$ et soit $\mathcal{P}_0 \in \mathcal{S}_{r_0}$ le bout tel que $0 \in B_{\mathcal{P}_0}$. Pour chaque $\mathcal{S}' \in R_*^{-1}(\mathcal{S}_{r_0})$ et chaque $\mathcal{P}' \in \mathcal{S}'$ tel que $R_*(\mathcal{P}') = \mathcal{P}_0$ soit $\overline{\mathcal{S}}(\mathcal{P}') \in \mathbb{H}_p$ le point donné par la Proposition 4.6, de telle façon que $R_*$ soit injective sur $(\mathcal{S}', \overline{\mathcal{S}}(\mathcal{P}')]$ et tel que on ait $\deg_R(\widehat{\mathcal{S}}) = \deg_R(\mathcal{P}')$ pour $\widehat{\mathcal{S}} \in (\mathcal{S}', \overline{\mathcal{S}}(\mathcal{P}')]$. On suppose de plus que $\overline{\mathcal{S}}(\mathcal{P}') \in \widehat{X}$.

Soit $r < r_0$ proche de $r_0$. Alors chaque un des segments $(\mathcal{S}', \overline{\mathcal{S}}(\mathcal{P}')]$ contient exactement une préimage de $\mathcal{S}_r$ par $R_*$.

D'autre part, pour tout $\widetilde{\mathcal{S}} \in R_*^{-1}(\mathcal{S}_r)$ il existe $\mathcal{S}' \in R_*^{-1}(\mathcal{S}_{r_0})$ à distance au plus $r_0 - r$ de $\widetilde{\mathcal{S}}$ (Lemme 6.2). Comme par 1.1 on a $\widetilde{\mathcal{S}} \in \widehat{X}$, si $r$ est assez proche de $r_0$ on a $\widetilde{\mathcal{S}} \in (\mathcal{S}', \overline{\mathcal{S}}(\mathcal{P}')]$, où $\mathcal{P}' \in \mathcal{S}'$ est le bout tel que $\widetilde{\mathcal{S}} \prec B_{\mathcal{P}'}$ (voir Lemme 2.11). En particulier $\deg_R(\widetilde{\mathcal{S}}) = \deg_R(\mathcal{P}')$.

Donc, par la Proposition 4.4 si $\mathcal{S}$ est rationnel, on a

$$\begin{aligned} \sum_{\widetilde{\mathcal{S}} \in R_*^{-1}(\mathcal{S}_r)} \deg_R(\widetilde{\mathcal{S}}) &= \sum_{\mathcal{S}' \in R_*^{-1}(\mathcal{S}_{r_0})} \; \sum_{\mathcal{P}' \in \mathcal{S}',\, R_*(\mathcal{P}') = \mathcal{P}_0} \deg_R(\mathcal{P}') \\ &= \sum_{\mathcal{S}' \in R_*^{-1}(\mathcal{S}_{r_0})} \deg_R(\mathcal{S}'). \end{aligned}$$

Le cas $r > r_0$ proche de $r_0$ est similaire.

2.– Supposons maintenant $\mathcal{S} = \{\mathcal{P}\} \in \mathbb{H}_p$ singulier. Soient $\mathcal{S}_i = \{\mathcal{P}_i\} \in \mathbb{H}_p$, pour $1 \le i \le k$, les préimages de $\mathcal{S}$ par $R_*$. Pour chaque $1 \le i \le k$ soit $\overline{\mathcal{S}}_i \in \mathbb{H}_p$ donné par la Proposition 4.6, de telle façon que $R_*$ soit injective sur $(\mathcal{S}_i, \overline{\mathcal{S}}_i)$, $R_*((\mathcal{S}_i, \overline{\mathcal{S}}_i)) = (R_*(\mathcal{S}_i), R_*(\overline{\mathcal{S}}_i))$ et tel que $\deg_R(\overline{\mathcal{S}}) = \deg_R(\mathcal{P}_i) = \deg_R(\mathcal{S}_i)$ pour $\overline{\mathcal{S}} \in (\mathcal{S}_i, \overline{\mathcal{S}}_i)$.

Quitte à prendre les points $\overline{\mathcal{S}}_i$ plus proches des $\mathcal{S}_i$ on suppose que $\mathcal{S}' = R_*(\overline{\mathcal{S}}_i)$ ne dépend pas de $1 \le i \le k$, et on suppose les segments $(\mathcal{S}_i, \overline{\mathcal{S}}_i)$ deux à deux disjoints.

2.1.– Soit $\widetilde{\mathcal{S}}' \in (\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ tel que $d(\mathcal{S}, \widetilde{\mathcal{S}}') < d(\mathcal{S}_i, \overline{\mathcal{S}}_i)$ pour $1 \le i \le k$ et soit $\widetilde{\mathcal{S}} \in R_*^{-1}(\widetilde{\mathcal{S}}')$. D'après le Lemme 6.2 il existe $1 \le i \le k$ tel que $d(\mathcal{S}_i, \widetilde{\mathcal{S}}) \le d(\mathcal{S}, \widetilde{\mathcal{S}}') < d(\mathcal{S}_i, \overline{\mathcal{S}}_i)$.

Supposons par contradiction que $\widetilde{\mathcal{S}} \notin (\mathcal{S}_i, \overline{\mathcal{S}}_i)$. Soit $\widehat{\mathcal{S}} \in (\mathcal{S}_i, \overline{\mathcal{S}}_i)$ tel que $(\mathcal{S}_i, \overline{\mathcal{S}}_i) \cap (\mathcal{S}_i, \widetilde{\mathcal{S}}) = (\mathcal{S}_i, \widehat{\mathcal{S}}]$ (cf. Lemme 2.11) et soient $\overline{\mathcal{P}}, \widetilde{\mathcal{P}} \in \widehat{\mathcal{S}}$ les bouts tel que $\overline{\mathcal{S}}_i \prec B_{\overline{\mathcal{P}}}$ et $\widetilde{\mathcal{S}} \prec B_{\widetilde{\mathcal{P}}}$ respectivement. Par définition de $\overline{\mathcal{S}}_i$ on a $\deg_R(\overline{\mathcal{P}}) = \deg_R(\widehat{\mathcal{S}})$, donc $R_*(\widetilde{\mathcal{P}}) \neq R_*(\overline{\mathcal{P}})$ (cf. Proposition 4.4). Comme $R_*$ est injective sur $(\mathcal{S}_i, \widetilde{\mathcal{S}})$ et sur

$(\mathcal{S}_i, \overline{\mathcal{S}}_i)$ on a $R_*(\widetilde{\mathcal{S}}) \notin (\mathcal{S}, \mathcal{S}')$, qui est une contradiction car $R_*(\widetilde{\mathcal{S}}) = \widetilde{\mathcal{S}}' \in (\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ par définition.

2.2.– Donc toute préimage de $\widetilde{\mathcal{S}}'$ est contenue dans un des segments $(\mathcal{S}_i, \overline{\mathcal{S}}_i)$. D'autre part, pour $1 \leq i \leq k$ il existe une préimage $\widetilde{\mathcal{S}}_i$ de $\widetilde{\mathcal{S}}'$ dans $(\mathcal{S}_i, \overline{\mathcal{S}}_i)$. Comme $\widetilde{\mathcal{S}}' \in (\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ est un point non-singulier on a par 1,

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{S}' \in R_*^{-1}(\mathcal{S})} \deg_R(\mathcal{S}') &= \sum_{1 \leq i \leq k} \deg_R(\mathcal{S}_i) = \sum_{1 \leq i \leq k} \deg_R(\widetilde{\mathcal{S}}_i) \\ &= \sum_{\widetilde{\mathcal{S}} \in R_*^{-1}(\widetilde{\mathcal{S}}')} \deg_R(\widetilde{\mathcal{S}}) = \deg(R). \square \end{aligned}$$

7.2. **Ensemble exceptionnel.** Comme dans le cas complexe on considère la définition suivante.

**Définition 7.3.** *On dit que un point $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ est un point* **exceptionnel** *de $R$ si l'ensemble $\cup_{n \geq 0} R_*^{-n}(\mathcal{S})$ est fini.*

Cette terminologie est justifiée par le théorème suivant.

**Théorème 2** (Ensemble Exceptionnel)**.** *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle de degré au moins deux et soit $R_*$ l'action sur $\mathbb{H}_p$ induite par $R$. Alors il existe au plus un point exceptionnel de $R_*$.*

*Si $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ est un point exceptionnel de $R_*$, alors $\mathcal{S}$ est rationnel, $R_*(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ et $R$ a une bonne réduction dans une coordonnée $\varphi$ telle que $\varphi_*(\mathcal{S}) = \mathcal{S}_{\text{can}}$.*

Voir Section 5.1 pour une définition de bonne réduction.

Dans la terminologie de [R-L] on dit qu'une fonction rationnelle $R$ est *simple*, si'l existe une coordonnée dont laquelle $R$ a une bonne réduction. Alors on obtient le corollaire immédiat suivant du théorème.

**Corollaire 7.4.** *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle de degré au moins deux. Si $R$ n'est pas simple, alors pour tout $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ l'ensemble $\cup_{n \geq 0} R_*^{-n}(\mathcal{S})$ est infini.*

La démonstration du théorème dépend du théorème suivant de R. Benedetto et d'un lemme plus bas.

**Théorème** ([Be2], Theorem B)**.** *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle de degré au moins deux et soit $n \geq 1$ un entier. Si $R^n$ a une bonne réduction, alors $R$ a une bonne réduction. De façon équivalente, si $R_*^n(\mathcal{S}_{\text{can}}) = \mathcal{S}_{\text{can}}$ et $\deg_{R^n}(\mathcal{S}_{\text{can}}) = \deg(R^n)$, alors $R_*(\mathcal{S}_{\text{can}}) = \mathcal{S}_{\text{can}}$ et $\deg_R(\mathcal{S}_{\text{can}}) = \deg(R)$.*

**Preuve.** Posons $\mathcal{O} = \{\mathcal{S}_{\text{can}}, R_*(\mathcal{S}_{\text{can}}), \ldots, R_*^{n-1}(\mathcal{S}_{\text{can}})\} \subset \mathbb{H}_p$. Comme $R_*^n$ a une bonne réduction, pour tout $\mathcal{P} \in \mathcal{S}_{\text{can}}$ on a $R^n(B_{\mathcal{P}}) = B_{R_*^n(\mathcal{P})}$, donc pour tout point $\mathcal{S} \in \mathcal{O}$ et tout bout $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ on a $R(B_{\mathcal{P}}) = B_{R_*(\mathcal{P})}$ (cf. Lemme 4.2). Supposons par contradiction que $\mathcal{O}$ contient au moins deux points. Comme l'ensemble $\mathcal{O}$ est fini et $R_*(\mathcal{O}) = \mathcal{O}$, pour arriver à une contradiction il suffit de montrer que pour tous $\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1 \in \mathcal{O}$ distincts, on a $d(R_*(\mathcal{S}_0), R_*(\mathcal{S}_1)) > d(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1)$.

Soit $\mathcal{P}_i \in \mathcal{S}_i$ le bout tel que $\mathcal{S}_{1-i} \prec B_{\mathcal{P}_i}$, pour $i = 0, 1$ ; alors $C = B_{\mathcal{P}_0} \cap B_{\mathcal{P}_1}$ est une couronne (Lemme 2.7). Posons $D_i = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B_{\mathcal{P}_i} \subset B_{\mathcal{P}_{1-i}}$ ; on a $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) = D_0 \sqcup C \sqcup D_1$. Comme $R(B_{\mathcal{P}_i}) = B_{R_*(\mathcal{P}_i)} \neq \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ on conclut que $\widehat{D}_i = R(D_i) = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B_{R_*(\mathcal{P}_i)}$ (cf. Lemme 4.2) et par conséquent $\widehat{C} = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - \widehat{D_0} \sqcup \widehat{D_1}$ est une couronne. Comme $R(C) \subset B_{R_*(\mathcal{P}_0)} \cap B_{R_*(\mathcal{P}_1)} = \widehat{C}$ et $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) = D_0 \sqcup C \sqcup D_1$ on conclut que $R : C \longrightarrow \widehat{C}$ est de degré $\deg(R) > 1$. Alors par le Lemme 4.9,

$$d(R_*(\mathcal{S}_0), R_*(\mathcal{S}_1)) = \bmod(\widehat{C}) = \deg(R)\cdot \bmod(C) = \deg(R)\cdot d(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1) > d(\mathcal{S}_0, \mathcal{S}_1). \square$$

**Lemme 7.5.** *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle de degré au moins deux ayant une bonne réduction. Alors tout point périodique de $R_*$ distinct de $\mathcal{S}_{\text{can}}$ est indifférent.*

**Preuve.** Notons que pour tout $\mathcal{P} \in \mathcal{S}_{\text{can}}$ on a $R_*(\widehat{B}_{\mathcal{P}}) = \widehat{B}_{R_*(\mathcal{P})}$. Considérons un point périodique $\mathcal{S} \neq \mathcal{S}_{\text{can}}$ et soit $\mathcal{P} \in \mathcal{S}_{\text{can}}$ tel que $\mathcal{S} \in \widehat{B}_{\mathcal{P}}$. Quitte à remplacer $R$ par un itéré on suppose $\mathcal{S}$ fixé par $R_*$ et par conséquent $R_*(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.

Si $\deg_R(\mathcal{P}) = 1$ alors $\deg_R(\mathcal{S}) = 1$.

Si $\deg_R(\mathcal{P}) > 1$ alors par le Lemme de Schwarz, pour tout boule $B \subset B_{\mathcal{P}}$ le diamètre chordal de $R(B)$ est strictement plus petit que celui de $B$. Par conséquent pour tout point $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p - \{\mathcal{S}_{\text{can}}\}$ on a $d(R_*(\mathcal{S}), \mathcal{S}_{\text{can}}) > d(\mathcal{S}, \mathcal{S}_{\text{can}})$. Donc $R_*(\mathcal{S}) \neq \mathcal{S}$ pour tout $\mathcal{S} \in \widehat{B}_{\mathcal{P}}$. $\square$

**Preuve du Théorème 2.** Soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ et posons $E = \cup_{i \geq 0} R_*^{-n}(\mathcal{S})$. Alors $R^{-1}(E) \subset E$, et par conséquent si $E$ est fini on a,

$$\sum_E \# R_*^{-1}(\mathcal{S}') = \# R_*^{-1}(E) \leq \# E.$$

Donc $\# R_*^{-1}(\mathcal{S}') = 1$ et $\deg_R(\mathcal{S}') = \deg(R)$ pour tout $\mathcal{S}' \in E$ (cf. Proposition 7.1). En particulier $R^{-1}(E) = E$ et tout élément de $E$ est périodique par $R_*$. Par conséquent il existe $n \geq 1$ tel que $R_*^n(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$, on a $\deg_{R^n}(\mathcal{S}) = \deg(R^n) > 1$ et $\mathcal{S}$ est rationnel. Donc, par le Théorème de Benedetto, on a $R_*(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ et $\deg_R(\mathcal{S}) = \deg(R)$. On conclut que $R$ a une bonne réduction dans une coordonnée $\varphi$ telle que $\varphi_*(\mathcal{S}) = \mathcal{S}_{\text{can}}$.

En particulier tout point exceptionnel est fixe répulsif. Donc, par le lemme précédent, il existe au plus un point exceptionnel de $R$. $\square$

## 8. Lemme d'approximation et inséparabilité.

Dans cette section on s'occupe de la propriété locale qu'on appelle *inséparabilité*, qui se traduit géométriquement en une expansion locale (Propsition 8.1).

L'intérêt c'est le suivant : on montre que si $R \in \mathbb{C}_p(z)$ est une fonction rationnelle telle que $R_*$ n'a pas de points périodiques indifférents, alors tous les points périodiques de $R_*$ (qui sont alors répulsfis) sont inséparables (voir Corollaire 8.3 et Proposition 9.1).

8.1. **Lemme d'Approximation.** Pour étudier la propriété locale d'inséparabilité (que par simplicité on définit seulement au points rationnels) on montre la propriété générale suivante.

**Lemme d'Approximation.** *Soient $R$ et $Q \in \mathbb{C}_p(z)$ deux fonctions rationnelles ayant la même réduction ; c'est à dire*

$$R_*(\mathcal{S}_{\text{can}}) = Q_*(\mathcal{S}_{\text{can}}) = \mathcal{S}_{\text{can}}$$

*et $R_*$ et $Q_*$ coïncident sur $\mathcal{S}_{\text{can}}$. Alors $R_*$ et $Q_*$ coïncident sur un voisinage de $\mathcal{S}_{\text{can}}$ dans $\mathbb{H}_p$.*

**Preuve.** Posons $\varepsilon = Q - R \in \mathbb{C}_p(z)$. Soit $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}_{\text{can}}$ un ensemble fini tel que pour $\mathcal{P} \in \mathcal{S}_{\text{can}} - \mathcal{T}$ on ait $R(B_{\mathcal{P}}) \subset \mathbb{C}_p$ et $Q(B_{\mathcal{P}}) \subset \mathbb{C}_p$. Dans ce cas $Q(B_{\mathcal{P}}) = R(B_{\mathcal{P}}) = B_{R_*(\mathcal{P})} \subset \{|z| \leq 1\}$ (Lemme 4.2) et par conséquent $\varepsilon(B_{\mathcal{P}}) = (R-Q)(B_{\mathcal{P}}) \subset \{|z| < 1\}$.

Comme l'ensemble $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}_{\text{can}}$ est fini on peut trouver $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1 \in \mathcal{S}_{\text{can}}$ tel que $\varepsilon_*(\mathcal{P}_0)$ et $\varepsilon_*(\mathcal{P}_1)$ soient distincts. Donc $\varepsilon_*(\mathcal{S}_{\text{can}}) \prec \{|z| < 1\}$ et par conséquent il existe $r_0 \in (0,1)$ tel que $\varepsilon_*(\mathcal{S}_{\text{can}}) \prec \{|z| < r_0\}$.

Pour chaque $\mathcal{P} \in \mathcal{T}$ soit $C_{\mathcal{P}} \subset B_{\mathcal{P}}$ une couronne de la forme $C_{\mathcal{P}} = B_{\mathcal{P}} - B'_{\mathcal{P}}$, où $B'_{\mathcal{P}} \subset B_{\mathcal{P}}$ est une boule fermée, de telle façon que

$$R(C_{\mathcal{P}}) \subset B_{R_*(\mathcal{P})} \text{ et } \varepsilon(C_{\mathcal{P}}) \subset \{|z| < r_0\}.$$

Posons $X = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - \sqcup_{\mathcal{T}} B'_{\mathcal{P}}$. Alors pour tout bout $\mathcal{P} \in \mathcal{S}_{\text{can}}$ et toute boule $B \subset B_{\mathcal{P}}$ contenue dans $X$ on a $R(B) \subset B_{R_*(\mathcal{P})}$ et $\varepsilon(B) \subset \{|z| < r_0\}$. Par conséquent $R(B)$ est une boule (Lemme 4.2) et si le diamètre chordal de $R(B)$ est plus grand que $r_0$, alors $Q(B) = (R + \varepsilon)(B) = R(B)$.

Notons que pour tout point rationnel $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ tel que $\mathcal{S} \prec X$ il existe une boule $B$ associée à $\mathcal{S}$ telle que $B \subset X$. Si de plus $\mathcal{S}$ est tel que $d(R_*(\mathcal{S}), \mathcal{S}_{\text{can}}) < \log_p \frac{1}{r_0}$, alors la boule $R(B)$ a un diamètre chordal plus grande que $r_0$. Donc par le précédent $R_*(\mathcal{S}) = Q_*(\mathcal{S})$. Alors par continuité (Corollaire 4.7), $R_*$ et $Q_*$ coïncident sur

$$\{\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p \mid \mathcal{S} \prec X,\, d(R_*(\mathcal{S}), \mathcal{S}_{\text{can}}) < \log_p \frac{1}{r_0}\},$$

qui est un voisinage de $\mathcal{S}_{\text{can}}$ dans $\mathbb{H}_p$. □

8.2. **Inséparabilité.** On dit qu'une fonction rationnelle $\widetilde{R} \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$ est *inséparable* s'il existe une fonction rationnelle $\widetilde{Q} \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$ telle que $\widetilde{R}(z) = \widetilde{Q}(z^p)$. Ceci est équivalente à ce que $\deg_R(\zeta) > 1$ pour tout (resp. une infinité de) $\zeta \in \mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ ; voir Proposition 10.3.

**Proposition 8.1.** *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle ayant une réduction non-triviale $\widetilde{R} \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$. Etant donné $n \geq 1$, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *On a $\deg_R(\mathcal{S}) \geq p^n$ pour tout point $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ dans un voisinage de $\mathcal{S}_{\text{can}}$.*
(2) *On a $\deg_R(\mathcal{P}) \geq p^n$ pour tout (resp. pour une infinité de) $\mathcal{P} \in \mathcal{S}_{\text{can}}$.*
(3) *Il existe une fonction rationnelle $\widetilde{Q} \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$ telle que $\widetilde{R}(z) = \widetilde{Q}(z^{p^n})$.*

*Dans ce cas, pour tout point $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ dans un voisinage de $\mathcal{S}_{\text{can}}$ on a*

$$d(R_*(\mathcal{S}), \mathcal{S}_{\text{can}}) \geq p^n d(\mathcal{S}, \mathcal{S}_{\text{can}}).$$

**Preuve.** L'équivalence entre 2 et 3 suit de la Proposition 10.3 dans l'Appendice 1, par induction en $n \geq 1$. L'implication $1 \Rightarrow 2$ suit de la Proposition 4.6. Supposons que la propriété 3 est vraie.

Soit $Q \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle ayant $\widetilde{Q}$ comme réduction et posons $F(z) = z^{p^n}$, de telle façon que $R$ et $Q \circ F$ ont la même réduction. Par le Lemme d'Approximation les actions $R_*$ et $(Q \circ F)_*$ coïncident sur un voisinage de $\mathcal{S}_{\text{can}}$. Comme $F_*$ satisfait la propriété 1, $R_*$ aussi satisfait cette propriété.

Notons que pour tout $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ dans un voisinage de $\mathcal{S}_{\text{can}}$ on a $d(F_*(\mathcal{S}), \mathcal{S}_{\text{can}}) \geq p^n d(\mathcal{S}, \mathcal{S}_{\text{can}})$. Si l'on prend la fonction rationnelle $Q \in \mathbb{C}_p(z)$ ayant le même degré que $\widetilde{Q}$, alors $Q$ a une bonne réduction et par conséquent on a $d(Q_*(\mathcal{S}), \mathcal{S}_{\text{can}}) \geq d(\mathcal{S}, \mathcal{S}_{\text{can}})$ pour tout $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ (cf. Lemme de Schwarz). Donc $(Q \circ F)_*$, et par conséquent $R_*$ par le Lemme d'Approximation, satisfait la dernière assertion de la proposition. $\square$

Voir Section 5.1 pour la définition de réduction.

Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle. Si $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ est un point rationnel, on dit que $R_*$ est **inséparable** en $\mathcal{S}$, si l'action de $R_*$ de $\mathcal{S}$ à $R_*(\mathcal{S})$ est inséparable ; c'est à dire, si $\deg_R(\mathcal{P}) > 1$ pour tout (resp. une infinité de) $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ ; voir Proposition 10.3. Le corollaire suivant est immédiat (cf. Proposition 4.6).

**Corollaire 8.2.** *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle et $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ un point rationnel. Alors $R_*$ est inséparable en $\mathcal{S}$ si et seulement s'il existe un voisinage $\widehat{\mathcal{V}} \subset \mathbb{H}_p$ de $\mathcal{S}$ tel que $\deg_R(\mathcal{S}') > 1$ pour tout $\mathcal{S}' \in \widehat{\mathcal{V}}$. Dans ce cas $\deg_R(\mathcal{S}') \geq p$ pour tout $\mathcal{S}' \in \widehat{\mathcal{V}}$ et $R_*$ est inséparable en tout point rationnel contenu dans $\widehat{\mathcal{V}}$.*

On dit qu'un point périodique $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ est **inséparable**, si $\mathcal{S}$ est rationnel et si $R_*$ est inséparable en $\mathcal{S}$. Notons que les points périodiques inséparables sont répulsifs.

**Corollaire 8.3.** *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle telle que $R_*$ n'a pas de points périodiques indifférents. Alors tous les points périodiques de $R_*$ dans $\mathbb{H}_p$ sont inséparables.*

**Preuve.** Soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ un point périodique de $R_*$. Par hypothèse $\mathcal{S}$ est répulsif et par conséquent rationnel. Quitte à changer $R$ par un itéré on suppose que $\mathcal{S}$ est fixé par $R_*$.

Comme $\mathcal{S}$ est répulsif il existe une infinité de cycles de bouts dans $\mathcal{S}$ (Proposition 10.1). Comme $R_*$ n'a pas de points périodiques indifférents, pour tout cycle

$$\{\mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n\} \subset \mathcal{S}.$$

on a $\deg_{R^n}(\mathcal{P}_i) > 1$ (cf. partie 2 du Lemme 5.8). Par conséquent il existe une infinité de bouts $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{S}$ tel que $\deg_R(\mathcal{P}) > 1$. Donc l'action de $R_*$ est inséparable en $\mathcal{S}$ (cf. Proposition 8.1). $\square$

## 9. Sur le nombre de points périodiques dans $\mathbb{H}_p$.

Cette section est dediée à la démonstration du Théorème C.

La démonstration est comme suit. Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle de degré au moins deux. On montre d'abord que si l'action $R_*$ sur $\mathbb{H}_p$ a au moins deux points périodiques, alors elle en a une infinité.

Si $R_*$ a un point périodique indifférent alors $R_*$ en a une infinité (Proposition 5.7), donc on suppose que $R_*$ n'a pas des points périodiques indifférents. Par conséquent tous les points périodiques de $R_*$ sont répulsifs et *aussi inséparables*, voir Corollaire 8.3.

Supposons que $R_*$ a un point périodique dans $\mathbb{H}_p$. Si ce point périodique est exceptionnel, alors le Théorème 2 et le Lemme 7.5 impliquent que $R_*$ a exactement un point périodique dans $\mathbb{H}_p$. D'autre part, si ce point périodique n'est pas exceptionnel, alors la proposition suivante implique que $R_*$ a une infinité de points périodiques dans $\mathbb{H}_p$.

**Proposition C.** *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle telle que $R_*$ a un point périodique inséparable qui n'est pas exceptionnel. Alors $R_*$ a une infinité de points périodiques inséparables.*

La démonstration de cette proposition est dans la Section 9.2, plus bas. Elle est analogue à la démonstration de G. Julia de la densité de points périodiques répulsifs, voir [Mi].

Montrons maintenant les assertions du Théorème C qui restent.

**Preuve de l'assertion 1.** Supposons que $R \in \mathbb{C}_p(z)$ est telle que $R_*$ n'a pas de points périodiques dans $\mathbb{H}_p$. Par le Théorème A' la fonction rationnelle $R$ a au plus un point périodique non-répulsif dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, et comme toute fonction rationnelle a au moins un point fixe non-réulsif (voir [Be1] ou l'Introduction), alors $R$ a exactement un point périodique non-répulsif, qui est alors un point fixe de $R$. Par la Proposition 5.7 ce point fixe est attractif ; voir Corollaire 5.17 de [R-L].

**Preuve de l'assertion 2.** Supposons que $R_*$ a exactement un point périodique dans $\mathbb{H}_p$. Alors $R_*$ n'a pas de points périodiques indifférents dans $\mathbb{H}_p$ (Proposition 5.7) et donc le (seul) point périodique de $R_*$ dans $\mathbb{H}_p$ est inséparable (Corollaire 8.3). La Proposition C implique qu'il est un point exceptionnel et par le Théorème 2, après changement de coordonnée la fonction rationnelle $R$ a une bonne réduction qui est inséparable. Le fait que tous les points périodiques de $R$ dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ sont attractifs est alors facile de montrer ; voir par exemple Proposition 4.6 de [R-L].

**Exemple.** *D'après la Proposition 5.7 toute fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}(z)$ ayant un point périodique indifférent dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ est telle que $R_*$ a une infinité de points périodiques (indifférents) dans $\mathbb{H}_p$ (considère par exemple le polynôme $z+z^d \in \mathbb{C}_p[z]$ avec $d \geq 2$).*

*Considérons d'autre part le polynôme $Q(z) = z^p + pz^d \in \mathbb{C}_p[z]$ avec $d > p$. Le point $\mathcal{S}_{\text{can}} \in \mathbb{H}_p$ est fixé par $Q_*$ et $Q_*$ est inséparable en $\mathcal{S}_{\text{can}}$. De plus $\deg_Q(\mathcal{S}_{\text{can}}) = p < \deg(Q)$, donc par le Théorème 2 le point $\mathcal{S}_{\text{can}}$ n'est pas un point exceptionnel de $Q_*$. Alors la Proposition C implique que l'action $Q_*$ a une ifinité de points périodiques (inséparables) dans $\mathbb{H}_p$.*

9.1. **Lemme d'incompressibilité.** Par un théorème de Montel, si $R \in \mathbb{C}(z)$ est une fonction rationnelle à coefficients complexes et $z_0 \in \mathbb{P}(\mathbb{C})$ est un point périodique répulsif de $R$ on a

$$\mathbb{P}(\mathbb{C}) - E \subset \cup_{n \geq 1} R^n(V),$$

où $V$ est un voisinage quelconque de $z_0$ et l'ensemble exceptionnel $E \subset \mathbb{P}(\mathbb{C})$ contient au plus deux points, voir par exemple [Mi].

La propriété analogue dans $\mathbb{H}_p$ n'est pas vraie (voir exemple plus bas) mais elle est vraie pour les points périodiques *inséparables.*

**Proposition 9.1.** *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle et soit $R_*$ l'action induite par $R$ sur $\mathbb{H}_p$. Soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ un point périodique inséparable de $R_*$. Alors pour tout voisinage $\widehat{\mathcal{V}} \subset \mathbb{H}_p$ de $\mathcal{S}$ on a*

$$\cup_{n \geq 1} R_*^n(\widehat{\mathcal{V}}) = \mathbb{H}_p.$$

Cette proposition est une conséquence simple du lemme suivant. Etant donné un point $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ et $r > 0$ on pose

$$\widehat{B}(\mathcal{S}, r) = \{\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p \mid d(\mathcal{S}, \mathcal{S}') < r\}.$$

**Lemme d'Incompressibilité.** *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle et soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$. Alors pour tout $r > 0$ on a*

$$\widehat{B}(R_*(\mathcal{S}), r) \subset R_*(\widehat{B}(\mathcal{S}, r)).$$

*Si de plus $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ est un point rationnel et $R_*$ est inséparable en $\mathcal{S}$, alors il existe $r_0 > 0$ tel que pour tout $r > 0$,*

$$\widehat{B}(R_*(\mathcal{S}), r + \min\{r, r_0\}) \subset R_*(\widehat{B}(\mathcal{S}, r)).$$

**Preuve.** 1.– Soit $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p - R_*(\widehat{B}(\mathcal{S}, r))$. Par le Lemme 6.2 il existe $\overline{\mathcal{S}} \in R_*^{-1}(\mathcal{S}')$ tel que $R_*((\mathcal{S}, \overline{\mathcal{S}})) = (R_*(\mathcal{S}), \mathcal{S}')$ et tel que $R_*$ soit injective sur $(\mathcal{S}, \overline{\mathcal{S}})$. De plus on a $d(R_*(\mathcal{S}), \mathcal{S}') \geq d(\mathcal{S}, \overline{\mathcal{S}})$.

Comme $\overline{\mathcal{S}} \in R_*^{-1}(\mathcal{S}')$ n'appartient pas à $\widehat{B}(\mathcal{S}, r)$ on a $d(R_*(\mathcal{S}), \mathcal{S}') \geq d(\mathcal{S}, \overline{\mathcal{S}}) \geq r$.

2.– Si $R_*$ est inséparable en $\mathcal{S}$, alors il existe $r_0 > 0$ tel que $\deg_R(\widetilde{\mathcal{S}}) \geq p > 1$ pour tout $\widetilde{\mathcal{S}} \in \mathbb{H}_p$ a distance au plus $r_0$ de $\mathcal{S}$ (Corollaire 8.2).

Donc si $\overline{\mathcal{S}} \in \mathbb{H}_p$ est comme en 1, on a

$$d(R_*(\mathcal{S}), \mathcal{S}') \geq d(\mathcal{S}, \overline{\mathcal{S}}) + \min\{r, r_0\}$$

(cf. Corollaire 4.8) et par conséquent $\widehat{B}(R_*(\mathcal{S}), r + \min\{r, r_0\}) \subset R_*(\widehat{B}(\mathcal{S}, r))$. $\square$

**Preuve de la Proposition 9.1.** Soit $r > 0$ tel que $\widehat{B}(\mathcal{S}, r) \subset \widehat{\mathcal{V}}$ et soit $r_0 > 0$ donné par le lemme précédent. Alors on montre par induction

$$\widehat{B}(\mathcal{S}, r + n \cdot \min\{r, r_0\}) \subset R_*^n(\widehat{B}(\mathcal{S}, r)).\square$$

**Exemple.** *Soit $c \in \mathbb{C}_p$ tel que $|c| = 1$ et considérons la fonction rationnelle $R(z) = \frac{1}{z^d} + c$, où l'entier $d \geq 2$ n'est pas divisible par $p$. Elle a une bonne réduction $\widetilde{R}(z) = \frac{1}{z^d} + \widetilde{c} \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$ satisfaisant, $\widetilde{R}(0) = \infty$, $\widetilde{R}(\infty) = 0$ et $\deg_{\widetilde{R}}(\zeta) = 1$ pour $\zeta \in \overline{\mathbb{F}}_p - \{0\}$.*

*Donc pour tout point $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ tel que $\mathcal{S} \prec \{|z| = 1\}$ on a $d(R_*(\mathcal{S}), \mathcal{S}_{\text{can}}) = d(\mathcal{S}, \mathcal{S}_{\text{can}})$. Par conséquent si l'on choisit $c \in \mathbb{C}_p$ tel que $\widetilde{R}^n(\widetilde{c}) \neq 0$ pour tout $n \geq 1$, alors pour tout voisinage $\widehat{\mathcal{V}}$ de $\mathcal{S}_{\text{can}}$ dans $\mathbb{H}_p$ l'ensemble*

$$\cup_{n \geq 1} R_*^n(\widehat{\mathcal{V}})$$

*est borné. Par exemple on peut choisir $c \in \mathbb{C}_p$ tel que $\widetilde{R}(\widetilde{c})$ soit fixé par $\widetilde{R}$.*

9.2. **Démonstration de la Proposition C.** Soit $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p^{\mathbb{Q}}$ un point périodique inséparable de $R_*$ qui ne soit pas exceptionnel.

1.– Quitte à remplacer $R$ par un itéré on suppose que $\mathcal{S}$ est fixé par $R_*$.

Considérons $r > 0$, qu'on choisira après et posons

$$\widehat{\mathcal{V}}_0 = \{\overline{\mathcal{S}} \in \mathbb{H}_p \mid d(\mathcal{S}, \overline{\mathcal{S}}) < r\}.$$

Pour $k \geq 1$ soit $\widehat{\mathcal{V}}_k$ la composante connexe de $R_*^{-k}(\widehat{\mathcal{V}}_0)$ qui contient $\mathcal{S}$. On choisit $r > 0$ assez petit de telle façon que $\operatorname{diam}(\widehat{\mathcal{V}}_k) \to 0$ quand $k \to \infty$, et tel que la fermeture topologique $\overline{\mathcal{V}}_1$ de $\widehat{\mathcal{V}}_1$ soit contenue dans $\widehat{\mathcal{V}}_0$ (cf. Proposition 8.1). Alors pour tout $k \geq 1$ la fermeture topologique $\overline{\mathcal{V}}_k$ de $\widehat{\mathcal{V}}_k$ est contenue dans $\widehat{\mathcal{V}}_{k-1}$.

De plus on suppose $r > 0$ assez petit tel que $R_*$ soit inséparable en tout point rationnel contenu dans $\widehat{\mathcal{V}}_0$ (Corollaire 8.2).

2.– Comme $\mathcal{S}$ n'est pas exceptionnel il existe une préimage $\mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p$ de $\mathcal{S}$ par $R_*$, différente de $\mathcal{S}$. Par la Proposition 9.1, on a $\cup_{n\geq 1} R_*^n(\widehat{\mathcal{V}}_0) = \mathbb{H}_p$, donc il exsite un point $\mathcal{S}_0 \in \widehat{\mathcal{V}}_0$ et un entier $n \geq 0$ tel que $R_*^n(\mathcal{S}_0) = \mathcal{S}'$. Soit $m \geq 0$ tel que la composante connexe $\widehat{\mathcal{W}}_0$ de $R_*^{-(n+1)}(\widehat{\mathcal{V}}_m)$ qui contient $\mathcal{S}_0$ est contenue dans $\widehat{\mathcal{V}}_0 - \{\mathcal{S}\}$.

On définit par induction une suite d'ensembles ouverts $\widehat{\mathcal{W}}_k \subset \widehat{\mathcal{V}}_k$, pour $k \geq 1$, tel que $\widehat{\mathcal{W}}_{k+1}$ soit une composante connexe de $R_*^{-1}(\widehat{\mathcal{W}}_k) \cap \widehat{\mathcal{V}}_k$ ; voir figure 2.

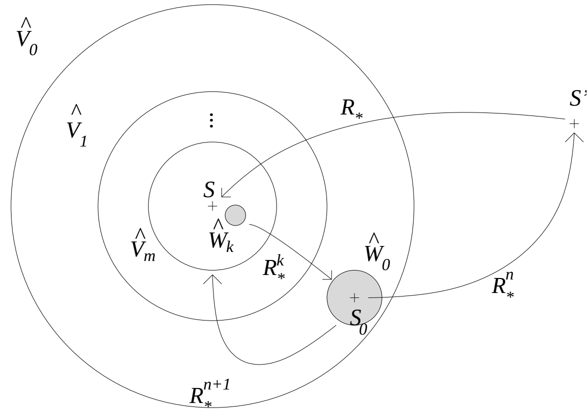


Figure 2

3.– Comme les applications $R_*^k : \widehat{\mathcal{W}}_k \longrightarrow \widehat{\mathcal{W}}_0$ et $R_*^{n+1} : \widehat{\mathcal{W}}_0 \longrightarrow \widehat{\mathcal{V}}_m$ sont propres, l'application $R_*^{k+n+1} : \widehat{\mathcal{W}}_k \longrightarrow \widehat{\mathcal{V}}_m$ est aussi propre (Lemme 6.1). D'autre part, si $k \geq m+1$ on a $\overline{\mathcal{W}}_k \subset \overline{\mathcal{V}}_k \subset \widehat{\mathcal{V}}_m$, où $\overline{\mathcal{W}}_k$ est la fermeture topologique de $\widehat{\mathcal{W}}_k$. Donc chaque ouvert $\widehat{\mathcal{W}}_k$, pour $k \geq m+1$, contient un point périodique rationnel $\mathcal{S}_k$ de $R_*$ (Proposition 6.3) qui est inséparable, car $R_*$ est inséparable en chaque point rationnel contenu dans $\widehat{\mathcal{V}}_m \subset \widehat{\mathcal{V}}_0$. Comme $\mathcal{S}_k \in \widehat{\mathcal{W}}_k \subset \widehat{\mathcal{V}}_k - \{\mathcal{S}\}$ et $\mathrm{diam}(\widehat{\mathcal{V}}_k) \to 0$ quand $k \to 0$, on conclut que $R_*$ a une infinité de points périodiques inséparables. $\square$

## 10. Appendice 1. Fonctions rationnelles en caractéristique positive.

Dans cette section on considère des propriétés de fonctions rationnelles à coefficients dans $\overline{\mathbb{F}}_p$. Comme la caractéristique de $\overline{\mathbb{F}}_p$ est positive, parfois il y a des propriétés assez différents au cas de caractéristique zéro ; par exemple le polynome $z^p \in \overline{\mathbb{F}}_p[z]$ induit une bijection sur $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)$.

Rappelons que pour toute puissance $q$ de $p$ on a $\overline{\mathbb{F}}_p = \cup_{n\geq 1} \mathbb{F}_{q^n}$.

**Lemme 10.1.** *Soit $\widetilde{R} \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$ une fonction rationnelle.*

(1) *Si $\deg(\widetilde{R}) = 1$ alors tout élément de $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ est périodique par $\widetilde{R}$.*
(2) *Si $\deg(\widetilde{R}) > 1$ alors tout élément de $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ est prépériodique par $\widetilde{R}$ et il en a une infinité qui sont périodiques par $\widetilde{R}$.*

**Preuve.** Soit $q \geq 1$ un puissance de $p$ telle que $\widetilde{R} \in \mathbb{F}_q(z)$. Alors chaque $\mathbb{P}(\mathbb{F}_{q^n}) = \mathbb{F}_{q^n} \cup \{\infty\}$ est invariant par $\widetilde{R}$ et comme $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p) = \cup_{n \geq 1} \mathbb{P}(\mathbb{F}_{q^n})$, tout élément de $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ est prépériodique par $\widetilde{R}$.

1.– Si $\deg(\widetilde{R}) = 1$ alors $\widetilde{R}$ induit une bijection sur chaque $\mathbb{P}(\mathbb{F}_{q^n})$ et par conséquent tout élément de $\mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ est périodique par $\widetilde{R}$.

2.– Supposons $\deg(\widetilde{R}) > 1$. Soient $\zeta_1, \ldots, \zeta_k \in \mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ les racines de $\widetilde{R}(z) - z = 0$ et posons $\lambda_i = \widetilde{R}'(\zeta_i)$. Pour chaque $1 \leq i \leq k$ tel que $\lambda_i \neq 0$ soit $n_i \geq 1$ le plus petit entier tel que $\lambda_i^{n_i} = 1$. Si $\lambda_i = 0$ ou si $n_i > 1$, alors $\zeta_i$ est une racine simple de $\widetilde{R}(z) - z$ et en général pour tout entier $r$ qui n'est pas divisible par $n_i$, $\zeta_i$ est une racine simple de $\widetilde{R}^r(z) - z$. D'autre part, si $n_i = 1$ et $p \not| r$ alors la multiplicité de $\zeta_i$ comme racine de $\widetilde{R}^r(z) - z$ est égale à la multiplicité de $\zeta_i$ comme racine de $\widetilde{R}(z) - z$.

Par conséquent, si $r$ est un nombre premier tel que $r > \max\{p, n_1, \ldots, n_k\}$, alors il existe une racine $\zeta_r$ de $\widetilde{R}^r(z) - z$ qui n'est pas une racine de $\widetilde{R}(z) - z$ ; car $\deg(\widetilde{R}^r(z) - z) > \deg(\widetilde{R}(z) - z)$. C'est à dire $\zeta_r$ est un point périodique de $\widetilde{R}$ de période primitive $r$. Comme il y a une infinité de choix pour $r$, on conclut que $\widetilde{R}$ a une infinité de points périodiques. □

**Définition 10.2.** *On dit qu'une fonction rationnelle $\widetilde{R} \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$ est* **inséparable** *s'il existe une fonction rationnelle $\widetilde{Q} \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$ telle que $\widetilde{R}(z) = \widetilde{Q}(z^p)$.*

Notons que l'application $z \longrightarrow z^p$ est un automorphisme de $\overline{\mathbb{F}}_p$. Par conséquent pour toute fonction rationnelle $\widetilde{Q} \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$ il existe une fonction rationnelle $\widetilde{Q}_1 \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$ tel qu'on ait $\widetilde{Q}(z^p) = (\widetilde{Q}_1(z))^p$.

Etant donnée une fonction rationnelle $\widetilde{R} \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$ on dit que $\zeta \in \mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)$ est un *point critique* de $\widetilde{R}$ si $\deg_{\widetilde{R}}(\zeta) > 1$. Dans ce cas on dit que $\deg_{\widetilde{R}}(\zeta) - 1$ est la *multiplicité* de $\zeta$ comme point critique.

La propriété suivante suit de la formule de Riemann-Hurwitz (voir par exemple [Hart], page 301, Collorary 2.4) et elle n'est pas difficile de montrer.

**Proposition 10.3.** *Soit $\widetilde{R} \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$ une fonction rationnelle ayant plus de $2\deg(\widetilde{R}) - 2$ points critiques, comptés avec multiplicité. Alors $\widetilde{R}$ est inséparable.*

Le corollaire suivant est immédiat.

**Corollaire 10.4.** *Soit $\widetilde{R} \in \overline{\mathbb{F}}_p(z)$ une fonction rationnelle qui ne soit pas inséparable. Alors il existe une infinité de points périodiques $\zeta \in \mathbb{P}(\overline{\mathbb{F}}_p)$, tel que $\deg_{\widetilde{R}^n}(\zeta) = 1$, où $n \geq 1$ est la période de $\zeta$.*

## 11. Appendice 2. Remarques sur l'espace hyperbolique.

Notons que l'espace hyperbolique $\mathbb{H}_p$ n'est pas seulement un espace métrique car chaque point rationnel a une structure alébrique, donnée par un paramétrage par le corps résiduel $\widetilde{\mathbb{C}}_p = \overline{\mathbb{F}}_p$ ; voir aussi Appendice 3. On remarque que l'espace métrique $(\mathbb{H}_p, d)$ ne dépend pas du nombre premier $p$ (!).

On peut définir l'espace métrique $(\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}, d)$ (et par conséquent $(\mathbb{H}_p, d)$ comme sa complétion) de façon assez courte comme suit.

Considérons la relation sur $\mathbb{C}_p \times \mathbb{R}$ définie par,

$$(w, r) \sim (w', r') \text{ si et seulement si } r = r' \text{ et } \log_p |w - w'| \leq r.$$

La ultremétricité de la norme $|\cdot|$, montre que cette relation est transitive et par conséquent elle détermine une relation d'équivalence ; voir figure 3. La distance

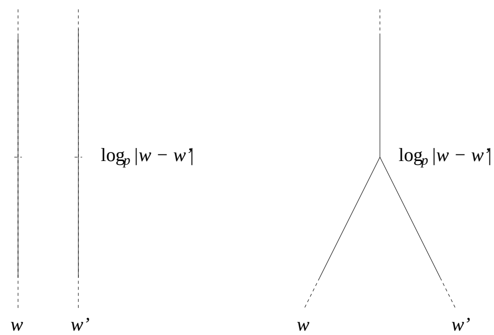


FIGURE 3

usuelle sur $\mathbb{R}$ induit une distance sur $\mathbb{C}_p \times \mathbb{R}/\sim$ ; la distance entre les points répresentes par $(w, r)$ et $(w', r')$ est donnée par

$$2 \max\{r, r', \log_p |w - w'|\} - r - r', \tag{6}$$

quand $w \neq w'$. Si $w = w'$ cette distance est donnée par $|r - r'|$. De plus il n'est pas difficile de voir que l'espace métrique qu'on obtient est un arbre réel.

Considérons la bijection entre $\mathbb{C}_p \times \mathbb{R}/\sim$ et $\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$, qui au point répresenté par $(w, r)$ associe le point de $\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ ayant $\{|z - w| < p^r\}$ comme boule associée. Cette bijection est une isométrie, car la distance entre les points de $\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ ayant

$$\{|z - w| < p^r\} \text{ et } \{|z - w'| < p^{r'}\},$$

comme boules associées est par définition,

$$\log_p \frac{\operatorname{diam}(\{|z - w| < p^r\} \cup \{|z - w'| < p^{r'}\})^2}{\operatorname{diam}(\{|z - w| < p^r\})\operatorname{diam}(\{|z - w'| < p^{r'}\})},$$

qui est égale à (6) ; voir (2) dans la Section 3.

11.1. **Bord à l'infini.** Le bord à l'infini (voir par example [Ca]) de $\mathbb{H}_p$ est définit comme l'ensemble des classes de équivalence de demi-géodésiques, par la relation de équivalence suivante : deux demi-géodésiques sont équivalentes si et seulement si leur intersection est aussi une demi-géodésique. Soient $z, z' \in \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ et $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \in \mathbb{H}_p$. Alors on voit facilement que les demi-géodésiques $[\mathcal{S}, z)$ et $[\mathcal{S}', z')$ sont équivalentes si et seulement si $z = z'$. Donc le bord à l'infini de $\mathbb{H}_p$ est canoniquement identifié à $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$.

La distance sur $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ induite par $\mathbb{H}_p$ (rélative à $\mathcal{S}_{\text{can}}$) est définie par,

$$\operatorname{dist}(z, z') = p^{-d(\mathcal{S}_{\text{can}}, \mathcal{S})},$$

où $\mathcal{S}$ est déterminé par la propriété $[\mathcal{S}_{\text{can}}, z) \cap [\mathcal{S}_{\text{can}}, z') = [\mathcal{S}_{\text{can}}, \mathcal{S}]$ (cf. Lemme 2.11). Cette distance coïncide avec la distance chordale ; voir Préliminaires.

11.2. **L'immeuble de Bruhat-Tits de $SL(2,\mathbb{C}_p)$.** Maintenant on montre que $\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ est isométrique à l'immeuble de Bruhat-Tits associé à $SL(2,\mathbb{C}_p)$ ; voir [BT] et [T].

Soit $K$ un corps munit d'une valuation ultramétrique $w$. Dans notre cas $K=\mathbb{C}_p$ et $w(z)=-\log_p|z|$. On étend $w$ à $K$ en posant $w(0)=\infty$. Posons $G=SL(2,K)$ et pour chaque $r\in\mathbb{R}$ on considère le sous-groupe $G_r$ de $G$ engendre par les matrices de la forme,

$$\begin{pmatrix}1 & u\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ u' & 1\end{pmatrix}\ \text{et}\ \begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & t^{-1}\end{pmatrix},$$

où $w(u)\geq r$, $w(u')\geq r$ et $w(t)=0$ ; cf. [T] pages $385-386$. Notons que $G_0=SL(2,\mathcal{O}_K)$, où $\mathcal{O}_K=\{z\in K\mid w(z)\geq 0\}$ est l'anneau d'entiers de $K$.

De plus considérons le sous-groupe de $G$ :

$$N=\left\{\begin{pmatrix}t & 0\\ 0 & t^{-1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & t^{-1}\\ -t & 0\end{pmatrix}\mid t\in K\right\}$$

et la fonction $\nu$ qui à $n=\left(\begin{smallmatrix}t & 0\\ 0 & t^{-1}\end{smallmatrix}\right)\in N$ associe la translation $\nu(n)(x)=x-2w(t)$ de $\mathbb{R}$ et à $n=\left(\begin{smallmatrix}0 & t^{-1}\\ -t & 0\end{smallmatrix}\right)\in N$ la reflexion $\nu(n)(x)=2w(t)-x$ ; cf. [BT] 6.1.

On considère la relation dans $G\times\mathbb{R}$

$$(g,r)\sim(g',r')\ \text{si et seulement s'il existe} \tag{7}$$

$$n\in N\ \text{tel que}\ r'=\nu(n)(r)\ \text{et}\ g^{-1}g'n\in G_r,$$

qui est une relation d'équivalence ([BT] 7.4.1 et [T] page 386). Notons que dans ce cas on a $G_{r'}=nG_rn^{-1}$. Alors l'*immeuble associé à* $G=SL(2,K)$ est par définiton l'ensemble quotient du produit $G\times\mathbb{R}$ par la relation d'équivalence (7) ; cf. [BT] 7.4.2. La distance usuelle de $\mathbb{R}$ induit une distance sur l'immeuble.

Considérons maintenant $K=\mathbb{C}_p$. L'immeuble de $PGL(2,\mathbb{C}_p)$ est définit de façon analogue et coïncide avec l'immeuble de $SL(2,\mathbb{C}_p)$ ; cf. (7). On identifie $PGL(2,\mathbb{C}_p)$ au groupe des automorphismes de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$. En particulier pour chaque $g\in PGL(2,\mathbb{C}_p)$, $g_*$ note l'action sur $\mathbb{H}_p$ induite par $g$.

Pour $r\in\mathbb{R}$ soit $\mathcal{S}_r\in\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ le point associé à la boule $\{z\in\mathbb{C}_p\mid |z|<p^r\}$. Alors le groupe $G_r$ correspond à le stabilisateur de $\mathcal{S}_r$ et le groupe $N$ correspond au groupe des automorphismes de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ qui préservent $\{0,\infty\}\subset\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, et par conséquent la géodésique $(0,\infty)=\{\mathcal{S}_r\}_{\mathbb{R}}\subset\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$. De plus pour $n\in N$ et $r\in\mathbb{R}$ on a $n_*(\mathcal{S}_r)=\mathcal{S}_{\nu(n)(r)}$.

Considérons l'application $\pi$ de $PGL(2,\mathbb{C}_p)\times\mathbb{R}$ à $\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$, qui au point répresenté par $(g,r)$ associe le point $g_*^{-1}(\mathcal{S}_r)\in\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$. Soient $(g,r)$ et $(g',r')\in PGL(2,\mathbb{C}_p)\times\mathbb{R}$. Alors $g_*^{-1}(\mathcal{S}_r)=(g')_*^{-1}(\mathcal{S}_{r'})$ si et seulement s'il existe $n\in N$ tel que $n_*(\mathcal{S}_r)=\mathcal{S}_{\nu(n)(r)}=\mathcal{S}_{r'}$ et tel que $(g^{-1}g'n)_*$ appartient au stabilisateur de $\mathcal{S}_r$, qui est égale à $G_r$. Par conséquent l'application $\pi$ induit une bijection entre l'immeuble de $SL(2,\mathbb{C}_p)$ et $\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ ; on note cette application encore par $\pi$.

De plus cette bijection est une isométrie. En effet, il suffit de vérifier que si la distance entre les points répresntés par $(g,r)$ et $(g,r')\in G\times\mathbb{R}$ est préservée par $\pi$. Comme $g_*$ est une isométrie de $\mathbb{H}_p^{\mathbb{R}}$ on a,

$$d(g_*^{-1}(\mathcal{S}_r),g_*^{-1}(\mathcal{S}_{r'}))=d(\mathcal{S}_r,\mathcal{S}_{r'})=|r-r'|.$$

11.3. **L'espace analytique de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ au sense de V.G. Berkovich.** Considérons la fonction

$$\|\cdot\| : \mathbb{H}_p \cup \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) \longrightarrow [-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

défini comme suit. Pour $z \in \mathbb{C}_p^*$ on pose $\|z\| = \log_p |z|$ et on pose $\|0\| = -\infty$ et $\|\infty\| = +\infty$. Soit $\pi$ la projection de $\mathbb{H}_p$ sur $(0, \infty) = \{\mathcal{S}_r\}_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{H}_p$, où $\mathcal{S}_r$ est le point associé à la boule $\{|z| < r\}$. Alors pour $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ on pose $\|\mathcal{S}\| = r$ où $r \in \mathbb{R}$ est tel que $\pi(\mathcal{S}) = \mathcal{S}_r$.

L'espace analytique de $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, au sense de [Ber], peut être définit comme $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) \cup \mathbb{H}_p$ munie de la plus petit topologie telle que pour toute fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$ la fonction

$$\mathbb{H}_p \cup \mathbb{P}(\mathbb{C}_p) \longrightarrow [-\infty, +\infty], \; \mathcal{S} \to \|R_*(\mathcal{S})\|$$

est continue. Comme la projection $\pi$ est continue pour la topologie induite par la distance $d$, cette topologie induit une topologie plus petite sur $\mathbb{H}_p$. Il n'est pas difficile de voir que cette topologie sur $\mathbb{H}_p$ ne coïncide pas avec la topologie induite par la distance $d$. En effet l'espace analytique de V.G. Berkovich est localement compact ; voir [Ber]. De plus il n'est pas difficile de vérifier que tous les ouverts pour cette topologie ont un diamètre infini pour la distance $d$.

## 12. Appendice 3. Formule des points fixes.

Chaque fonction rationnelle de degré $d \geq 1$ différente de l'identité a $d+1$ points fixes comptés avec multiplicité. L'objectif de cet appendice est de démontrer une propriété analogue.

Fixons une fonction rationnelle $R \in \mathbb{C}_p(z)$. On comptera les objets suivants, avec une multiplicité définie plus bas.

(1) Les points fixes de $R$ dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ *qui ne sont pas indifférents*.
(2) Les points fixes *répulsifs* de $R_*$ dans $\mathbb{H}_p$.
(3) Les composantes analytiques de $\mathcal{E}(R) \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ qui sont fixées par $R$.

Rappelons que $\mathcal{E}(R) \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ est l'interieur de l'ensemble des points récurrents par $R$ et la notion de composante analytique remplace celle de composante connexe ; voir [R-L] et Section 5.4.

La multiplicité est définie comme suit.

• On assigne multiplicité 1 à chaque point fixe de $R$ dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, qui n'est pas indifférent. On note $F \geq 0$ le nombre de ces points fixes ; clairement $F \leq \deg(R) + 1 < \infty$.

• Si $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ est un point fixe répulsif de $R_*$, alors sa multiplicité $m(\mathcal{S})$ est par définition

$$m(\mathcal{S}) = \deg_R(\mathcal{S}) + 1 - \#(\text{bouts dans } \mathcal{S} \text{ fixés par } R_*).$$

Par la Proposition 4.4 on a $0 \leq m(\mathcal{S}) \leq \deg_R(\mathcal{S})$. On note $\widehat{\mathcal{R}} \subset \mathbb{H}_p$ l'ensemble de points fixes répulsifs de $R_*$ dans $\mathbb{H}_p$.

• Soit $C \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ une composante analytique de $\mathcal{E}(R)$ fixée par $R$.

Si $\deg(R) = 1$ alors on a $C = \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ et alors on pose $m(C) = 2$.

Si $\deg(R) > 1$ alors $C$ est un affinoïde ouvert ; c'est à dire $C$ c'est le complémentaire dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ d'une réunion finie non-vide de boules fermées disjointes $\{B_i\}_I$ (voir Théorème 3 de [R-L] ou le Théorème 1 dans la Section 5.4). Les bouts associes aux boules $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p) - B_i$, pour $i \in I$, sont appelles *bouts de la composante* $C$.

Alors la multiplicité $m(C) \leq 2$ de $C$ est par définition

$$m(C) = 2 - \#(\text{bouts de } C \text{ fixés par } R_*)\ ;$$

(naïvement on considère $C$ comme “un gros point fixe indifférent”, avec $\deg_R(C) = 1$). Notons que $m(C)$ peut être negative. On note $\widehat{\mathcal{E}}$ l'ensemble de composantes analytiques de $\mathcal{E}(R)$ fixées par $R$.

**Formule de Points Fixes.** *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle de degré au moins 1. Alors les ensembles $\widehat{\mathcal{R}}$ et $\widehat{\mathcal{E}}$ sont finies et on a,*

$$F + \sum_{\widehat{\mathcal{R}}} m(\mathcal{S}) + \sum_{\widehat{\mathcal{E}}} m(C) = \deg(R) + 1.$$

Le reste de cet appendice est dédié à la démonstration de cette formule.

La démonstration du lemme suivant est à la fin de cet appendice.

**Lemme 12.1.** *Soit $R \in \mathbb{C}_p(z)$ une fonction rationnelle de degré au moins 1 et soient $\widehat{\mathcal{R}}$ et $\widehat{\mathcal{E}}$ comme au-dessus. Alors les ensembles $\widehat{\mathcal{R}}$ et $\widehat{\mathcal{E}}$ sont finies.*

Si $R$ est de degré 1 on a $\widehat{\mathcal{R}} = \{\emptyset\}$, et soit $F = 2$ et $\widehat{\mathcal{E}} = \emptyset$ ; soit $F = 0$ et $\widehat{\mathcal{E}} = \{\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)\}$. Donc la fomule est verifiée dans ce cas.

On suppose maintenant que $R$ est de degré au moins 2. Etant donné un bout rationnel $\mathcal{P}$ fixé par $R_*$, on note $m(\mathcal{P}) \geq 1$ sa multiplicité comme point fixe de $R_*$ ; voir Proposition 4.4. Notons que $m(\mathcal{P}) > 1$ implique $\deg_R(\mathcal{P}) = 1$.

1.– Soit $\mathcal{S} \in \widehat{\mathcal{R}}$ un point fixe répulsif de $R_*$ et soit $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$ l'ensemble des bouts dans $\mathcal{S}$ fixés par $R_*$. Alors par la Proposition 4.4 on a,

$$\sum_{\mathcal{F}(\mathcal{S})} m(\mathcal{P}) = \deg(\mathcal{S}) + 1,$$

ou de façon équivalente, $\sum_{\mathcal{F}(\mathcal{S})}(m(\mathcal{P}) - 1) = m(\mathcal{S})$.

2.– Etant donné une composante analytique $C \in \widehat{\mathcal{E}}$ de $\mathcal{E}(R)$ fixée par $R$, soit $\mathcal{F}(C)$ l'ensemble des bouts de $C$ qui sont fixés par $R_*$ et soit $I(C)$ le nombre de points fixes indifférents de $R$ contenus dans $C$, comptés avec multiplicité. La Proposition 5.10 de [R-L] dit

$$I(C) - 2 = \sum_{\mathcal{F}(C)} (m(\mathcal{P}) - 2). \tag{8}$$

(Cette formule est une conséquece du Théorème des Résidus). De façon équivalente $I(C) - m(C) = \sum_{\mathcal{F}(C)}(m(\mathcal{P}) - 1)$. De plus notons que

$$\sum_{\widehat{\mathcal{E}}} I(C) = I = \deg(R) + 1 - F$$

est égal au nombre de points fixes indifférents de $R$ dans $\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$, comptés avec multiplicité.

3.– Si $\mathcal{P} \in \mathcal{F}(C)$ est un bout de $C$ fixé par $R_*$, alors le point de $\mathbb{H}_p$ qui contient $\mathcal{P}$ est un point fixe répulsif de $R_*$ (cf. Théorème 1 dans la Section 5.4). D'autre part si $\mathcal{S} \in \widehat{\mathcal{R}}$ est un point fixe répulsif de $R_*$ et $\mathcal{P} \in \mathcal{F}(\mathcal{S}) \subset \mathcal{S}$ est un bout fixé par $R_*$, avec $m(\mathcal{P}) > 1$, alors $\deg_R(\mathcal{P}) = 1$ et par conséquent $\mathcal{P}$ est un bout d'une composante analytique de $\mathcal{E}(R)$ fixée par $R$. Par conséquent on a

$$\begin{aligned}\sum_{\widehat{\mathcal{R}}} m(\mathcal{S}) &= \sum_{\widehat{\mathcal{R}}} \sum_{\mathcal{F}(\mathcal{S})} (m(\mathcal{P}) - 1) \\ &= \sum_{\widehat{\mathcal{E}}} \sum_{\mathcal{F}(C)} (m(\mathcal{P}) - 1) \\ &= \sum_{\widehat{\mathcal{E}}} (I(C) - m(C)), \text{ d'où}\end{aligned}$$

$$\sum_{\widehat{\mathcal{R}}} m(\mathcal{S}) + \sum_{\widehat{\mathcal{E}}} m(C) = \sum_{\widehat{\mathcal{E}}} I(C) = I = \deg(R) + 1 - F.$$

**Preuve du Lemme 12.1.** Notons que si $R$ est l'identité alors $\widehat{\mathcal{R}} = \emptyset$ et $\widehat{\mathcal{E}} = \{\mathbb{P}(\mathbb{C}_p)\}$, donc on peut supposer $R$ différente de l'identitié. Alors l'ensemble $X \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ des points $z_0$ tel que $R(z_0)$ est fixé par $R$, est fini ; soit $\widehat{X} \subset \mathbb{H}_p$ l'enveloppe convexe de $X$.

1.– Soit $\mathcal{S} \in \widehat{\mathcal{R}}$ un point fixe répulsif de $R_*$ et soit $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ un bout fixé par $R_*$. Alors la boule $B_{\mathcal{P}}$ contient un point fixe de $R$ (cf. partie 2 de la Proposition 5.4). S'il existe un bout $\mathcal{P}' \in \mathcal{S}$ différent de $\mathcal{P}$ qui est fixé par $R_*$, alors par le même raisonnement la boule $B_{\mathcal{P}'}$ rencontre $X$ et on a $\mathcal{S} \prec X$. D'autre part, si $\mathcal{P} \in \mathcal{S}$ est le seul bout dans $\mathcal{S}$ qui est fixé par $R_*$, alors $m(\mathcal{P}) > 1$ et par conséquent $\deg_R(\mathcal{P}) = 1$. Comme $\deg_R(\mathcal{S}) > 1$, il existe un bout $\mathcal{P}' \in \mathcal{S}$ différent de $\mathcal{P}$ tel que $R_*(\mathcal{P}') = \mathcal{P}$ ; donc $B_{\mathcal{P}} \subset R(B_{\mathcal{P}'})$ (Lemme 4.2) et par conséquent $B_{\mathcal{P}'}$ rencontre $X$.

Dans les deux cas on a $\mathcal{S} \prec X$, donc $\mathcal{S} \in \widehat{X}$ or $\widehat{\mathcal{R}} \subset \widehat{X}$.

1.1.– Fixons $\mathcal{S} \in \widehat{\mathcal{R}}$ et considérons $z_0 \in X$. Alors il existe un point $\mathcal{S}(z_0) \in (\mathcal{S}, z_0) \subset \mathbb{H}_p$ tel que $(\mathcal{S}, \mathcal{S}(z_0))$ est disjoint de $\widehat{\mathcal{R}}$ (cf. Proposition 4.6). Comme l'ensemble $X$ est fini et $\widehat{\mathcal{R}} \subset \widehat{X}$ on conclut que $\widehat{\mathcal{R}}$ est discret.

1.2.– Pour chaque $z_0 \in X$ il existe une boule $B(z_0) \subset \mathbb{P}(\mathbb{C}_p)$ contenant $z_0$ telle que $\widehat{B}(z_0) = \{\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p \mid \mathcal{S} \prec B(z_0)\}$ soit disjoint de $\widehat{\mathcal{R}}$ (cf. Lemme 4.5). Comme l'ensemble $X$ est fini, l'ensemble $\widehat{X} - \cup_X \widehat{B}(z_0) \subset \mathbb{H}_p$ est compact et comme cet ensemble contient $\widehat{\mathcal{R}}$ (qui est discret par 1.1), on conclut que l'ensemble $\widehat{\mathcal{R}}$ est fini.

2.– Soit $C \in \widehat{\mathcal{E}}$ une composante analytique de $\mathcal{E}(R)$ fixée par $R$.

Par la formule (8) on obtient que si aucun des bouts de $C$ n'est fixé par $R_*$, alors $C$ contient deux points fixes de $R$, comptés avec multiplicité ; voir aussi Corollaire 5.12 de [R-L]. Par conséquent il existe un nombre fini de telles composantes.

2.1.– D'autre part si $\mathcal{P}$ est un bout de $C$ fixé par $R_*$ alors le point $\mathcal{S} \in \mathbb{H}_p$ qui contient $\mathcal{P}$ est un point fixe répulsif de $R_*$ (Théorème 1 dans la Section 5.4). C'est à dire $\mathcal{S} \in \widehat{\mathcal{R}}$. Comme chaque $\mathcal{S} \in \widehat{\mathcal{R}}$ contient un nombre fini de bouts fixés par $R_*$ et comme $\widehat{\mathcal{R}}$ est fini, le nombre de composantes $C \in \widehat{\mathcal{E}}$ ayant un bout fixé par $R_*$ est aussi fini. On conclut que $\widehat{\mathcal{E}}$ est fini. □

## References


[Be1] R. Benedetto. *Hyperbolic maps in p-adic dynamics.* Ergod. Th. Dynam. Syst. **21** (2001), 1 – 11.

[Be2] R. Benedetto. *Reduction, dynamics, and Julia sets of rational functions.* J. Number Theory **86** (2001), 175 – 195.

[Ber] V.G. Berkovich. *Spectral theory and analytic geometry over non-Archimedean fields.* Mathematical Surveys and Monographs **33**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.

[Bou] K. Boussaf. *Images of circular filters.* Int. J. Math. Game Theory Algebra **10** (2000), 365−372.

[BHM] K. Boussaf, M. Hemdaoui, N. Maïnetti. *Tree structure on the set of multiplicative semi-norms of Kranser algebras $H(D)$.* Rev. Mat. Complut. **13** (2000), 85 − 109.

[BT] F. Bruhat, J. Tits. *Groupes réductifs sur un corps local.* Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **41** (1972), 5 − 251.

[Ca] P. Cartier. *Fonctions harmoniques sur un arbre.* Symposia Mathematica, Vol. IX (Convegno di Calcolo delle Probabilità, INDAM, Rome, 1971), 203 − 270. Academic Press, London 1972.

[Ep] A. Epstein. *Infinitesimal Thurston rigidity and the Fatou-Shishikura inequality.* IMS preprint #1999/1.

[Es1] A. Escassut. *Algèbres de Banach ultramétriques et algèbres de Krasner-Tate.* Astérisque **10** (1973).

[Es2] A. Escassut. *Analytic elements in $p$-adic analysis.* World Scientific Publishing, 1995.

[Hart] R. Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.

[Hs] L.C. Hsia. *Closure of periodic points over a non-Archimidean field.* J. London Math. Soc. **62** (2000), 685 − 700.

[Mi] J. Milnor. *Dynamics in one complex variable.* Vieweg, 1999.

[Mu] D. Mumford. *An analytic construction of degenerating curves over complete local rings.* Compositio Math. **24** (1974), 129 − 174.

[MS] P. Morton, J. Silverman. *Periodic points, multiplicities, and dynamical units.* J. Reine Agnew. Math. **461** (1995), 81 − 122.

[P] F. Paulin. *Actions de groupes sur les arbres.* Séminaire Bourbaki, Vol. 1995/96. Astérisque **241** (1997), 97 − 137.

[R-L] J. Rivera-Letelier. *Dynamique des fonctions rationnelles sur des corps locaux.* Thèse, Orsay 2000.

[Ru] R. Rumely. *Capacity theory on algebraic curves.* LNM 1378, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1989.

[Sh] M. Shishikura. *On the Quasiconformal surgery of rational functions.* Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. **20** (1987), 1 − 29.

[T] J. Tits. *A "theorem of Lie-Kolchin" for trees.* Contributions to algebra (collection of papers dedicated to Ellis Kolchin), 377 − 388. Academic Press, New York, 1977.

[Y] J.C. Yoccoz. Notes d'un cours au Collège de France, 2001.

J. Rivera-Leteleir, Mathematics Department, SUNY at Stony Brook, Stony Brook, NY 11794-3660

*E-mail address*: `rivera@math.sunysb.edu`