Алгебра и анализ
Том 4 (1992), вып. 3



# НЕРАВЕНСТВО ДЛЯ ЧИСЛА НЕПУСТЫХ ОВАЛОВ КРИВОЙ НЕЧЕТНОЙ СТЕПЕНИ

О. Я. Виро, В. И. Звонилов

**В настоящей статье доказываются ограничения на топологию неособых плоских проективных вещественных алгебраических кривых нечетной степени, сформулированные в [1], неравенство (11) и [2], теоремы 3.10, 3.11. В доказательстве существенную роль играют результаты о гомологиях разветвленных накрытий, представляющие и самостоятельный интерес: мы указываем гомологическую конструкцию, связывающую гомологический класс циклического разветвленного накрывающего, построенный по перепонке, которая натянута в базе, и гомологический класс границы этой перепонки в подмногообразии ветвления.**

## Введение

Пусть $A$ — неособая плоская проективная вещественная алгебраическая кривая степени $m$, пусть $\mathbb{R}A \subset \mathbb{R}P^2$ — множество ее вещественных точек. Напомним, что его компоненты гомеоморфны окружности и что если $m$ нечетно, то имеется ровно одна односторонняя компонента. Двусторонние компоненты называются *овалами.* Число всех овалов кривой обозначается через $l$.

Каждый овал ограничивает извне компоненту множества $\mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}A$. Овалы, ограничивающие извне компоненту с положительной (отрицательной, нулевой) эйлеровой характеристикой, называются *эллиптическими (гиперболическими, параболическими)*; число эллиптических овалов обозначается через $l^+$, число гиперболических — через $l^-$, параболических — через $l^0$. Гиперболические и параболические овалы охватывают в $\mathbb{R}P^2$ области, содержащие другие овалы, и потому называются *непустыми.*

**Теорема 1. Оценка числа гиперболических овалов.** *Для любого нечетного $m$*

$$l^- \leqslant \frac{(m-3)^2}{4}. \tag{1}$$

Если кривая обладает овалами, но не имеет овала, охватывающего все остальные овалы, то имеет место на 1 более сильное неравенство

$$l^- \leqslant \frac{(m-5)(m-1)}{4}. \tag{2}$$

---

*Ключевые слова:* вещественная алгебраическая кривая, циклическое разветвленное накрытие, вещественные перепонки и гомологические классы накрывающего, последовательности Смита.

**Переформулировка теоремы 1.** *Число компонент дополнения кривой нечетной степени $m$, имеющих отрицательную эйлерову характеристику, не превосходит $\frac{(m-3)^2}{4}$.*

**Теорема 2. Оценка числа непустых овалов.** *Для любого нечетного $m$*

$$l^- + l^0 \leqslant \frac{(m-3)^2}{4} + \frac{m^2-h^2}{4h^2}, \tag{3}$$

*где $h$ — наибольшая степень простого числа, делящая $m$.*

При четных $m \neq 4$ неравенство (1) тоже выполняется. Выполняется даже более сильное неравенство

$$l^- + l^0 \leqslant (m-2)(m-4)/4,$$

являющееся следствием неравенств В. И. Арнольда [3], подробности см. в [1].

Неравенство (3) допускает усиление и для некоторых нечетных $m$: согласно неравенству Звонилова (см. [1], (9) и [4]), для любого нечетного $m$

$$l^- + l^0 \leqslant (m-1)(m-3)/4. \tag{4}$$

Неравенство (4) во многих случаях слабее неравенства (3), но бывает и сильнее. Наименьшее значение $m$, для которого (4) сильнее, равно 693.

Точными неравенства (1), (2) и (3) являются при $m = 3$ и $m = 5$. При $m \geqslant 7$ им далеко до точности. Простейшие следствия теоремы Безу (см. [2], неравенства 3.19 и 3.20) и несложные построения показывают, что максимальное значение числа $l^- + l^0$ при $m = 7$ и $m = 9$ равно соответственно 2 и 4, тогда как правая часть неравенства (3) равна соответственно 4 и 9.

Следуя Клейну, говорят, что кривая $A$ принадлежит типу I, если $\mathbb{R}A$ разбивает множество $\mathbb{C}A$ комплексных точек кривой $A$, и принадлежит типу II, если $\mathbb{R}A$ не разбивает $\mathbb{C}A$. В первом случае естественные ориентации двух половин, на которые $\mathbb{R}A$ разбивает $\mathbb{C}A$, определяет на $\mathbb{R}A$, как на общем крае этих половин, две взаимно противоположные ориентации. Следуя Рохлину [1], их называют *комплексными*.

Обозначим через $A_1, \dots, A_l$ овалы кривой $A$, через $A_0$ — ее одностороннюю компоненту, через $B_1, \dots, B_l$ — компоненты множества $\mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}A$, ограничиваемые овалами $A_1, \dots, A_l$ извне, и через $B_0$ — компоненту множества $\mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}A$, примыкающую к $A_0$. Пусть $p$ — простое число, степенью которого является $h$. Обозначим через $b_j$ класс, определяемый в $H_2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}A; \mathbb{Z}_p)$ множеством $B_j$, наделенным некоторой ориентацией. Ясно, что классы $b_j$ образуют базис пространства $H_2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}A; \mathbb{Z}_p)$.

**Теорема 3. Экстремальное свойство неравенства (3).** *Пусть в неравенстве (3) достигается равенство. Тогда кривая $A$ принадлежит типу I и существуют такие $x_0, \dots, x_l \in \mathbb{Z}_p$, что образ класса $x = \sum x_j b_j$ при граничном гомоморфизме*

$\partial : H_2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}A; \mathbb{Z}_p) \to H_1(\mathbb{R}A; \mathbb{Z}_p)$ *есть фундаментальный класс* $[\mathbb{R}A]$ *кривой* $\mathbb{R}A$, *наделенной комплексной ориентацией, причем* $\chi(B_j) = 0$ *для всех* $j$ *с* $x_j \neq 0$.

Для кривых степени 5 любые две теоремы из теорем 1, 2 и 3 вместе с неравенством Харнака $l \leqslant 6$ (см., например,[1]) составляют полную систему ограничений на топологию кривой. Приводимое ниже доказательство теорем 1–3 опирается только на основополагающие топологические свойства алгебраических кривых. Оно применимо и к гибким кривым (т.е. к топологическим объектам, имитирующим неособые плоские проективные алгебраические кривые, см.[2], § 1), а поскольку и неравенство Харнака справедливо для гибких кривых, отсюда следует совпадение изотопической классификации алгебраических и гибких кривых степени 5 (ср. [2]).

Общая схема нашего доказательства теоремы 1 та же, что у Арнольда [3] в его доказательстве упоминавшихся выше аналогичных неравенств для кривых четной степени. Главное отличие: вместо двулистного мы работаем с $m$- или $h$-листным накрытием комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$, разветвленным над $\mathbb{C}A$. Как и в доказательстве Арнольда, мы строим по компонентам множества $\mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}A$ гомологические классы разветвленного накрывающего, занимающие определенное положение относительно формы пересечений, и замечаем, что структура формы пересечений (зависящая только от степени кривой) налагает ограничение на количество таких классов.

Теоремы 1-3 доказываются в § 1. Доказательства существенно опираются на результаты § 2, который посвящен проблеме линейной независимости гомологических классов циклического разветвленного накрывающего, конструируемых по перепонкам, натянутым на поверхность ветвления в базе. Мы вынесли обсуждение этих вопросов в отдельный параграф, имея в виду его самостоятельную ценность. В частности, результаты § 2 доставляют базу для дальнейшего усиления теорем 1-3, основанного на разнообразных геометрических конструкциях, дающих дополнительные перепонки. (Заметим, впрочем, что конструкции этого типа, известные к настоящему времени, так или иначе опираются на теорему Безу и потому не применимы к гибким кривым.)

## § 1. Доказательство теорем 1, 2 и 3

При $l = 0$ и при $m = 1$ теорема 1 очевидна, а неравенство (3) справедливо и не обращается в равенство. Поэтому в приводимом ниже доказательстве теорем 1 и 2, не теряя общности, мы полагаем $l > 0$ и $m > 1$, а в доказательстве теоремы 3 полагаем $m > 1$.

Обозначим через $q$ делитель числа $m$. Объекты, определяемые в п. 1.1, 1.2 и зависящие от $q$, мы используем лишь при $q = m$ (в п. 1.4) и $q = h$ (в остальном тексте), поэтому, чтобы не усложнять обозначения этих объектов, мы опускаем в них индекс $q$.

**1.1. Разветвленные накрытия плоскости $\mathbb{C}P^2$ с ветвлением над $\mathbb{C}A$.** Пусть кривая $A$ задается уравнением $f(x_0, x_1, x_2) = 0$. Тогда уравнение $f(x_0, x_1, x_2) = x_3^m$ определяет неособую поверхность $Z$ степени $m$ в трехмерном проективном пространстве. Формула $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (x_0 : x_1 : x_2)$ определяет

$m$-листное циклическое накрытие $\mathbb{C}Z \longrightarrow \mathbb{C}P^2$, разветвленное над $\mathbb{C}A$. Группа его автоморфизмов состоит из преобразований $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (x_0 : x_1 : x_2 : \exp(2\pi k/m)x_3)$ и содержит подгруппу порядка $m/q$, состоящую из преобразований $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \mapsto (x_0 : x_1 : x_2 : \exp(2\pi kq/m)x_3)$. Обозначим пространство орбит этой подгруппы через $Y$. Очевидная проекция $\nu : Y \longrightarrow \mathbb{C}P^2$ является циклическим $q$-листным накрытием, разветвленным над $\mathbb{C}A$.

Проекция $\nu$ определяет диффеоморфизм множества $\nu^{-1}(\mathbb{C}A)$ на $\mathbb{C}A$, и в дальнейшем мы отождествляем $\nu^{-1}(\mathbb{C}A)$ с $\mathbb{C}A$. Группа автоморфизмов накрытия $\nu : Y \longrightarrow \mathbb{C}P^2$ (изоморфная $\mathbb{Z}_q$) действует в слоях нормального расслоения поверхности $\mathbb{C}A \subset Y$ как группа поворотов плоскости на углы, кратные $2\pi/q$. Обозначим через $\tau$ какой-либо из двух автоморфизмов, действующих в слоях как поворот на $2\pi/q$.

В $H_2(Y;\mathbb{C})$ рассмотрим подпространство $M = \ker(\tau_* - \xi^{-1}\mathrm{id})$, где id — тождественный гомоморфизм и $\xi = \exp(\pi(q-1)\sqrt{-1}/q)$. Из вычислений Рохлина ([5], п. 5.4, 5.6) вытекает, что $\dim M = 1+(m-1)(m-2)$, а сигнатура $\mathrm{sign} Q$ сужения $Q$ на $M$ эрмитовой формы пересечений многообразия $Y$ равна $1-m^2(q^2-1)/2q^2$.

**1.2. Классы $\beta_0, \dots, \beta_l$.** Обозначим через conj одну из антиголоморфных инволюций многообразия $Y$, накрывающих инволюцию комплексного сопряжения многообразия $\mathbb{C}P^2$. Пусть $C_0, \dots, C_l$ — компоненты связности множества $\mathrm{fix}(\mathrm{conj}) \setminus \mathbb{R}A$, переводящиеся проекцией $\nu$ в $B_0, \dots, B_l$ соответственно. Напомним, что перед формулировкой теоремы 3, определяя классы $b_i$, мы наделили поверхности $B_i$ некоторыми ориентациями. Поверхности $C_i$ наделим индуцированными ориентациями.

Обозначим через $\gamma_{ij}$ класс, определяемый в $H_2(Y;\mathbb{C})$ поверхностью $\mathrm{Cl}(C_i \cup \tau^j C_i)$, ориентированной в соответствии с ориентацией компоненты $C_i$. Для $i = 0, \dots, l$ положим $\beta_i = \sum_{j=1}^{h-1} \xi^j \gamma_{ij}$. Несложное вычисление показывает, что $\beta_i \in M$.

**1.3. Индексы пересечения классов $\beta_0, \dots, \beta_l$.** Вычислим сначала $\gamma_{ij} \circ \gamma_{rs}$. Пусть $u$ — какое-нибудь касательное векторное поле на $\mathrm{Cl}\, C_i$ с конечным числом нулей, сужение которого на границу $\mathrm{Fr}\, C_i$ множества $C_i$ не имеет нулей и является касательным к $\mathrm{Fr}\, C_i$. Поле $\sqrt{-1}u$, очевидно, нормально к $C_i$ и касательно к $\mathbb{C}A$ на $\mathrm{Fr}\, C_i$. Поэтому дифференциал преобразования $\tau^j$ переводит поле $\sqrt{-1}u$ в нормальное векторное поле $v$ на $\mathrm{Cl}\, \tau^j C_i$, совпадающее с $\sqrt{-1}u$ на $\mathrm{Fr}\, C_i$. В результате стандартного вычисления индекса пересечения с помощью малого сдвига множества $\mathrm{Cl}(C_i \cup \tau^j C_i)$ вдоль поля $\sqrt{-1}u \cup v$ получаем, что

$$(i)\gamma_{ij} \circ \gamma_{rs} = 0 \quad \text{при} \quad r \neq i,$$
$$(ii)\gamma_{ij} \circ \gamma_{is} = -\chi(C_i) \quad \text{при} \quad j \neq s,$$
$$(iii) \quad \gamma_{ij}^2 = -2\chi(C_i)$$

(ср.[3]). Заметим, что $\chi(C_i)$ в (ii) и (iii), очевидно, можно заменить на $\chi(B_i)$.

Из этих равенств нетрудно вывести, что $\beta_i \circ \beta_r = 0$ при $i \neq r$ и что

$$\beta_i^2 = -\chi(B_i)q. \tag{5}$$

**1.4. Доказательство теоремы 1.** В этом пункте мы полагаем $q = m$, так что подпространство $M$, содержащее классы $\beta_i$, лежит в $H_2(\mathbb{C}Z;\mathbb{C})$. Построим подмножество набора $\beta_0,\dots,\beta_l$, порождающее пространство, на котором форма пересечений неотрицательна. Поскольку классы $\beta_i$ попарно ортогональны, в такое подмножество можно включить классы $\beta_i$ с $\beta_i^2 > 0$, и эти классы линейно независимы. В силу формулы (5) из классов $\beta_1,\dots,\beta_l$ это условие выделяет $l^-$ классов, а если кривая обладает овалами, но не имеет овала, охватывающего все остальные овалы, то и класс $\beta_0$. Размерность подпространства, порожденного этими классами, равна их числу. Она не превосходит $(\dim M + \operatorname{sign} Q)/2$, поскольку $\beta_i \in M$. Сопоставим это с информацией об $M$ из п. 1.1, получаем утверждение теоремы 1. $\bullet$

**1.5. Ранг системы $\beta_0,\dots,\beta_l$.** Обозначим через $d_i$ гомологический класс в $H_1(\mathbb{C}A;\mathbb{Z}_p)$, реализуемый границей компоненты $B_i$. Ясно, что $d_i$ есть образ класса $b_i$ при композиции

$$H_2(\mathbb{R}P^2,\mathbb{R}A;\mathbb{Z}_p) \to H_1(\mathbb{R}A;\mathbb{Z}_p) \to H_1(\mathbb{C}A;\mathbb{Z}_p)$$

граничного гомоморфизма и гомоморфизма включения.

Пусть всюду далее $q = h$.

Следующие две леммы доказываются в § 2.

**1.5.A. Лемма.** *Ранг системы $\beta_0,\dots,\beta_l \in H_2(Y;\mathbb{C})$ не меньше ранга системы $d_0,\dots,d_l \in H_1(\mathbb{C}A;\mathbb{Z}_p)$.*

Обозначим через $\mu$ кольцевой гомоморфизм $\mathbb{Z}[\xi] \to \mathbb{Z}_p$, переводящий $\xi$ в 1. (Существование такого гомоморфизма следует из того, что сумма коэффициентов минимального целочисленного многочлена числа $\xi$ равна $p$. Заметим, что здесь существенно, что $q$ — степень простого числа. Действительно, если $q$ не есть степень простого, то сумма коэффициентов минимального многочлена любого первообразного корня $\zeta$ степени $q$ из единицы равна 1, и потому не существует нетривиальных кольцевых гомоморфизмов кольца $\mathbb{Z}[\zeta]$ в кольцо $\mathbb{Z}_p$).

**1.5.Б. Лемма.** *Если $\lambda_0\beta_0+\ldots+\lambda_l\beta_l = 0$ — нетривиальное линейное соотношение, коэффициенты которого принадлежат $\mathbb{Z}[\xi]$ и взаимно просты в $\mathbb{Z}[\xi]$, то $\mu(\lambda_0)d_0 + \ldots + \mu(\lambda_l)d_l = 0$.*

В соотношении $\mu(\lambda_0)d_0 + \ldots + \mu(\lambda_l)d_l = 0$ леммы 1.5.Б не все $\mu(\lambda_i)$ равны нулю. Действительно, нетрудно проверить, что $\ker\mu$ есть идеал, порожденный $1-\xi$. Поэтому если бы все $\lambda_i$ принадлежали $\ker\mu$, то они не были бы взаимно просты.

**1.5.В. Следствие.** *Ранг системы $\beta_0,\dots,\beta_l$ не меньше $l$, и если он равен $l$ (т.е. если классы $\beta_0,\dots,\beta_l$ линейно зависимы), то кривая $A$ принадлежит типу I.*

**Доказательство.** Очевидно, классы $b_0,\dots,b_l$ составляют базис пространства $H_2(\mathbb{R}P^2,\mathbb{R}A;\mathbb{Z}_p)$. Граничный гомоморфизм переводит его в базис пространства $H_1(\mathbb{R}A;\mathbb{Z}_p)$. Гомоморфизм включения $H_1(\mathbb{R}A;\mathbb{Z}_p) \to H_1(\mathbb{C}A;\mathbb{Z}_p)$, как известно, инъективен, если кривая принадлежит типу II, и имеет одномерное ядро, если кривая принадлежит типу I. Поэтому ранг системы классов $d_0, \dots, d_l$ (которые являются образами классов $b_0, \dots, b_l$ при композиции этих гомоморфизмов) равен $l$ в случае кривой типа I и $l+1$ в случае кривой типа II. Леммы 1.5.А и 1.5.Б позволяют превратить эту информацию в доказываемую формулировку.

**1.6. Доказательство теоремы 2.** Рассмотрим максимальное подмножество набора $\beta_0, \dots, \beta_l$, порождающее пространство, на котором формула пересечений неотрицательна. Поскольку классы $\beta_i$ попарно ортогональны, оно состоит из $\beta_i$ с $\beta_i^2 \geqslant 0$. В силу формулы (5) из классов $\beta_1, \dots, \beta_l$ в него входят $l^- + l^0$ классов и, кроме того, класс $\beta_0$ (последнее обеспечивается предположением $l > 0$, из которого следует, что $\chi(B_0) \leqslant 0$). Обозначим через $d$ размерность подпространства, порожденного этими классами. Она не превосходит $(\dim M + \operatorname{sign} Q)/2$, поскольку $\beta_i \in M$, как было отмечено в п. 1.2, и согласно [5], п. 4.2 форма $Q$ невырождена. С другой стороны, в силу 1.5.В число классов не больше $d+1$. Соединяя эти два неравенства и информацию об $M$ из п. 1.1, получаем

$$l^0 + l^- + 1 \leqslant (\dim M + \operatorname{sign} Q)/2 + 1 = (m-3)^2/4 + (m^2 - h^2)/4h^2 + 1,$$

что равносильно доказываемому неравенству.

**1.7. Доказательство теоремы 3.** Пусть в неравенстве (3) достигается равенство. Рассуждения предыдущего пункта показывают, что в этом случае $\operatorname{rk}(\beta_0, \dots, \beta_l) = \operatorname{rk}(d_0, \dots, d_l) = l$ и кривая $A$ принадлежит типу I. Наделим $\mathbb{R}A$ комплексной ориентацией. Поскольку $H_1(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_p) = H_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}_p) = 0$, граничный гомоморфизм $H_2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}A; \mathbb{Z}_p) \to H_1(\mathbb{R}A; \mathbb{Z}_p)$ является изоморфизмом. Поэтому существует класс $x = \sum x_i b_i \in H_2(\mathbb{R}P^2, \mathbb{R}A; \mathbb{Z}_p)$ с $\partial x = [\mathbb{R}A]$.

Ясно, что классы $\beta_0, \dots, \beta_l$ принадлежат образу гомоморфизма $\lambda_\star$: $H_2(Y; \mathbb{Z}[\xi]) \to H_2(Y; \mathbb{C})$, индуцированного включением $\lambda : \mathbb{Z}[\xi] \to \mathbb{C}$. Так как $H_1(Y) = 0$, то в силу двойственности и формул универсальных коэффициентов $H_3(Y) = 0$ и $\operatorname{Tors} H_2(Y) = 0$, а следовательно, и $H_3(Y; \mathbb{C}/\mathbb{Z}[\xi]) = 0$. Поэтому $\lambda_\star$ — мономорфизм. Следовательно, из линейной зависимости классов $\beta_0, \dots, \beta_l$ в $H_2(Y; \mathbb{C})$ вытекает существование нетривиального линейного соотношения

$$\lambda_0 \beta_0 + \dots + \lambda_l \beta_l = 0 \tag{6}$$

с $\lambda_i$, принадлежащими $\mathbb{Z}[\xi]$ и взаимно-простыми в $\mathbb{Z}[\xi]$. В силу 1.5.Б $\mu(\lambda_0)d_0 + \ldots + \mu(\lambda_l)d_l = 0$, а в силу определения комплексной ориентации числа $x_0, \dots, x_l$ пропорциональны числам $\mu(\lambda_0), \dots, \mu(\lambda_l)$. Поэтому если $x_i \neq 0$, то и $\lambda_i \neq 0$. Наконец, умножая равенство (6) на $\beta_j$ и учитывая, что классы $\beta_0, \dots, \beta_l$ попарно ортогональны и $\beta_j^2 = -\chi(B_j)h$ (см. п. 1.3), мы получаем, что $\chi(B_j) = 0$ для всех $j$ с $x_j \neq 0$.

## § 2. Гомологические классы разветвленного накрывающего и гомологические классы множества ветвления

**2.1. Постановка вопроса.** Пусть $\nu : Y \to X$ — циклическое $h$-листное накрытие гладкого замкнутого $n$-мерного многообразия $X$, разветвленное над его гладким замкнутым $(n-2)$-мерным подмногообразием $A$. Пусть $\tau : Y \to Y$ — образующая группы автоморфизмов накрытия $\nu$.

Гладкое компактное подмногообразие $B$ многообразия $X$ называется *перепонкой на подмногообразии* $A$, если $\partial B = A \cap B$, и вдоль $\partial B$ оно не касается $A$ в том смысле, что нормальное расслоение края $\partial B$ в $B$ пересекается с касательным расслоением подмногообразия $A$ только по нулевым векторам. Если накрытие $\nu$ тривиально над $B$, то говорят, что $B$ *поднимается в* $Y$. В этом случае $\nu^{-1}(B)$ состоит из $h$ копий $C, C_1, \dots, C_{h-1}$ перепонки $B$ с $\tau^j(C) = C_j$, гомеоморфно отображающихся посредством $\nu$ на $B$.

Пусть теперь перепонка $B$ ориентирована, поднимается в $Y$ и имеет размерность $k$. Обозначим через $\gamma_j$ класс, определяемый в $H_k(Y;\mathbb{C})$ циклом $C \cup C_j$, ориентированным в согласии с $C$. Пусть $\zeta$ — какой-либо корень степени $h$ из единицы. Положим $\beta^\zeta = \sum_{j=1}^{h-1} \zeta^j \gamma_j$. Обозначим через $M^\zeta$ подпространство $\ker(\tau_* - \zeta^{-1}\mathrm{id})$ пространства $H_k(Y;\mathbb{C})$. Легко проверить, что $\beta^\zeta \in M^\zeta$. Это наиболее естественная конструкция, дающая элементы пространства $M^\zeta$. Ею мы воспользовались в предыдущем параграфе для построения классов $\beta_0, \dots, \beta_l$.

Поскольку гомологии множества ветвления $A$ доступнее, как правило, гомологий накрывающего $Y$, возникает желание получить как можно более полную информацию о классе $\beta^\zeta$ по гомологическому классу, реализуемому в $A$ многообразием $\partial B$. В частности, информацию о линейной независимости классов вида $\beta^\zeta$, ср. § 1.

В этом параграфе мы указываем два способа достижения этой цели. К сожалению, они применимы только в случае, когда $h$ есть степень простого числа. Это условие, несколько ослабляющее результаты, нам так и не удалось исключить (ср. [1]). В обоих способах оно оказалось существенным, хотя на первый взгляд и по разным причинам. Быть может наиболее глубокая из этих причин — наличие гомоморфизма $\mu : \mathbb{Z}[\zeta] \to \mathbb{Z}_p$ (см. п. 1.5). Она позволяет перейти к гомологиям с коэффициентами в $\mathbb{Z}_p$.

**2.2. Гомоморфизм $v_r$.** Ориентируем многообразие $A$. Для этого заметим, что в слое его нормального расслоения в $Y$ преобразование $\tau^r$ действует как поворот, отличный от поворота на угол $\pi$. Ориентируем это расслоение так, чтобы преобразование $\tau^r$ действовало как поворот на угол из промежутка $(0, \pi)$ в положительном направлении. Ориентируем теперь $A$ так, чтобы его индекс пересечения с каждым слоем его нормального расслоения был равен $+1$.

Обозначим через $\rho$ обратный гомоморфизм Хопфа (называемый также гомоморфизмом высечения) $H_{k+1}(Y;\mathbb{Z}_p) \to H_{k-1}(A;\mathbb{Z}_p)$. Напомним, что $\rho$ можно определить как композицию изоморфизмов двойственности Пуанкаре и когомологического гомоморфизма включения:

$$H_{k+1}(Y;\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{D^{-1}} H^{n-k-1}(Y;\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\mathrm{in}^*} H^{n-k-1}(A;\mathbb{Z}_p) \xrightarrow{D} H_{k-1}(A;\mathbb{Z}_p),$$

и что он относит гомологическому классу, реализованному гладким подмногообразием, трансверсальным $A$, гомологический класс пересечения этого подмногообразия с $A$.

Обозначим через $H_k^r$ ядро гомоморфизма $1-\tau_*^r : H_k(Y;\mathbb{Z}_p) \to H_k(Y;\mathbb{Z}_p)$.

В этом пункте мы определим для любого натурального $r$ гомоморфизм

$$v_r : H_k^r \to H_{k-1}(A;\mathbb{Z}_p)/_{\operatorname{im}\rho}.$$

Опишем $v_r$ сначала в геометрических терминах (циклы, их трансверсальные пересечения с подмногообразиями и т.п.), а затем — более формально, на языке гомологий и когомологий.

Пусть $\beta \in H_k^r$, и пусть $x$ — цикл, представляющий класс $\beta$ и находящийся в общем положении относительно $A$. (Мы не вдаемся в обсуждение точного смысла слов ≪ общее положение ≫, поскольку это всего лишь неформальное описание. Укажем только, что в случае, когда $x$ есть фундаментальный цикл гладкого подмногообразия многообразия $Y$, они означают трансверсальность этого подмногообразия подмногообразию $A$). Поскольку $\beta-\tau_*^r\beta=0$, существует такая цепь $c$, что $\partial c = x-\tau^r x$. Пусть $c$ тоже находится в общем положении относительно $A$. Рассмотрим пересечение $c\circ[A]$ цепи $c$ с фундаментальным циклом $[A]\in C_{n-2}(A;\mathbb{Z}_p)$ многообразия $A$. Так как $\partial A=\emptyset$ и $\tau(A)=A$, то

$$\partial(c\circ[A]) = (\partial c)\circ[A] = (x-\tau^r x)\circ A = x\circ[A]-\tau^r x\circ[A] = x\circ[A] - x\circ\tau^{-r}[A]=0.$$

Таким образом, $c\circ[A]$ — цикл. Если $c_1$ — другая цепь с $\partial c_1 = x-\tau^r x$, то $c\circ[A]-c_1\circ[A]=(c-c_1)\circ[A]$ — цикл, представляющий образ класса цикла $c-c_1$ при гомоморфизме $\rho$. Наконец, если цикл $x$ гомологичен нулю, т.е. существует цепь $z$ с $\partial z = x$, то в качестве $c$ можно взять цепь $z-\tau^r z$, и тогда, очевидно, $c\circ[A] = z\circ[A]-z\circ\tau^{-r}[A]=0$. Следовательно, образ класса, представляемого циклом $c\circ[A]$, при естественной проекции $H_{k-1}(A;\mathbb{Z}_p)\to H_{k-1}(A;\mathbb{Z}_p)/_{\operatorname{im}\rho}$ однозначно определяется классом $\beta$. Положим $v_r(\beta)$ равным этому образу.

Отметим, что имеется очевидный когомологический вариант этой конструкции. Нужно только заменить цепи коцепями, граничный гомоморфизм $\partial$ — кограничным $\delta$ и операцию $\circ[A]$ пересечения с $[A]$ — операцией сужения коцепи на $A$. Это дает гомоморфизм

$$\ker\left(\tau^{*r}-1 : H^k(Y;\mathbb{Z}_p)\to H^k(Y;\mathbb{Z}_p)\right) \to H^{k+1}(A;\mathbb{Z}_p)/_{\operatorname{in}^*H^{k+1}(Y;\mathbb{Z}_p)}.$$

Без обращения к циклам класс $v_r(\beta)$ проще определить при условии, что $\beta$ принадлежит образу гомоморфизма включения $i_* : H_k(Y\setminus A;\mathbb{Z}_p)\to H_k(Y;\mathbb{Z}_p)$. (В ситуации, описанной в п. 2.1, это условие выполнено, см. доказательство леммы 2.2.A). Рассмотрим действие гомоморфизма $1-\tau^r$ в гомологической последовательности пары $(Y, Y\setminus A)$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}_p$ (в диаграмме обозначение группы коэффициентов опущено):

$$\begin{tikzcd}
& H_{k+1}(Y,Y\setminus A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "0"'] & H_k(Y\setminus A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "1-\tau_*^r"'] & H_k(Y) \arrow[d, "1-\tau_*^r"'] \\
H_{k+1}(Y) \arrow[r] & H_{k+1}(Y,Y\setminus A) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "{[A]\circ}"'] & H_k(Y\setminus A) \arrow[r, "i_*"] & H_k(Y) \\
& H_{k-1}(A) & &
\end{tikzcd}$$

Поскольку $1-\tau^r=0$ в $H_{k+1}(Y, Y\setminus A;\mathbb{Z}_p)$, определен гомоморфизм $(1-\tau_\star^r)i_\star^{-1}:$ $\operatorname{im} i_\star \to H_k(Y\setminus A;\mathbb{Z}_p)$. Образ пересечения $H_k^r\cap \operatorname{im} i_\star$ при этом гомоморфизме лежит в образе граничного гомоморфизма $\partial: H_{k+1}(Y, Y\setminus A;\mathbb{Z}_p)\to H_k(Y\setminus A;\mathbb{Z}_p)$. Ясно, что пересечение $[A]\circ\partial^{-1}(1-\tau_\star^r)i_\star^{-1}(\beta)$ гомологических классов $[A]$ и $\partial^{-1}(1-\tau_\star^r)i_\star^{-1}(\beta)$ (см., например, [6], гл.VIII, § 13) определено по модулю $\operatorname{im}\rho$. Положим

$$v_r(\beta)=[A]\circ\partial^{-1}(1-\tau_\star^r)i_\star^{-1}(\beta)\ \operatorname{mod}\operatorname{im}\rho. \tag{7}$$

Ясно, что $v_r$ — гомоморфизм.

Область определения этого гомоморфизма расширяется до всей $H_k^r$ следующим образом. Ядро гомоморфизма $1-\tau^r: C(Y;\mathbb{Z}_p)\to C(Y;\mathbb{Z}_p)$, где $C(Y;\mathbb{Z}_p)$ — цепной комплекс многообразия $Y$, содержит, очевидно, $C(A;\mathbb{Z}_p)$. Поэтому существует цепной гомоморфизм $z_r: C(Y,A;\mathbb{Z}_p)\to C(Y;\mathbb{Z}_p)$ такой, что $z_rj=1-\tau^r$, где $j$ — гоморфизм, индуцированный включением $(Y,\emptyset)\to(Y,A)$. Положим

$$v_r(\beta)=[A]\circ\partial^{-1}Dz_{h-r}^\star D_Y^{-1}\beta \operatorname{mod}\operatorname{im}\rho, \tag{8}$$

где $D: H^{n-k}(Y,A;\mathbb{Z}_p)\to H_k(Y\setminus A;\mathbb{Z}_p)$, $D_Y: H^{n-k}(Y;\mathbb{Z}_p)\to H_k(Y;\mathbb{Z}_p)$ — изоморфизм двойственности. Нетрудно проверить, что при $\beta\in H_k^r\cap\operatorname{im} i_\star$ правые части равенств (7) и (8) совпадают.

**2.2.A Лемма.** *Пусть $B$ — ориентированная $k$-мерная перепонка, которая поднимается в $Y$, и пусть $\beta$ — класс, определяемый в $H_k(Y;\mathbb{Z}_p)$ циклом $\nu^{-1}(B)$, ориентированным в согласии с $B$. Тогда $\beta\in H_k^1$, и класс $v_1\beta$ совпадает с классом $d$, реализуемым в $A$ многообразием $\partial B$.*

**Доказательство.** Ясно, что $\tau_\star\beta=\beta$, так что $\beta\in H_k^1$. Пусть $T$ — инвариантная относительно $\tau$ трубчатая окрестность многообразия $A$ в $Y$. Рассмотрим компоненты множества $\operatorname{pr}^{-1}(\partial C)\setminus(C\cup C_1\cup\ldots\cup C_{h-1})$, где $\operatorname{pr}:\partial T\to A$ — проекция. Обозначим через $T_1$ ту компоненту, граница которой содержится в $C\cup C_1$; ясно, что остальные компоненты получаются из $T_1$ под действием степеней автоморфизма $\tau$. Положим $\widetilde\beta=\sum_{j=1}^{h-1}\widetilde\gamma_j$, где $\widetilde\gamma_j$ — класс в $H_k(Y\setminus A;\mathbb{Z}_p)$, определяемый множеством $\left(\bigcup_{s=0}^{j-1}\tau^s\operatorname{Cl}T_1\right)\cup(C\setminus T)\cup(C_j\setminus T)$, ориентированным в соответствии с ориентацией множества $C_j$. Ясно,что $i_\star\widetilde\beta=\beta$, где $i$, как и в п. 2.2, — включение $Y\setminus A\to Y$. Согласно п. 2.2, $v_1\beta=[A]\circ\partial^{-1}(1-\tau_\star)\widetilde\beta$. Нетрудно проверить, что класс $(1-\tau_\star)\widetilde\beta$ реализуется многообразием $\operatorname{pr}^{-1}(\partial C)$, и потому $[A]\circ\partial^{-1}(1-\tau_\star)\widetilde\beta$ совпадает с $d$. •

### 2.3. Другой подход: применение теории Смита.

Теорией Смита называют небольшой набор гомологических фактов относительно пространств с действием группы $\mathbb{Z}_p$ (см. [7], гл.III, § 3). Нетрудно проверить, что эта теория обобщается со случая пространств с действием группы $\mathbb{Z}_p$ на случай пространств с действием группы $\mathbb{Z}_h$ ( каким является $Y$); при этом коэффициенты всех рассматриваемых групп гомологий и когомологий по-прежнему берутся из $\mathbb{Z}_p$, что и предполагается в этом пункте.

В обозначениях п. 2.1 пусть $B$ — ориентированная $k$-мерная перепонка, которая поднимается в $Y$, $b$ — класс, определяемый в $H_k(X,A)$ перепонкой $B$, $\beta$ — класс, определяемый в $H_k(Y)$ циклом $\nu^{-1}(B)$, ориентированным в согласии с $B$. Рассмотрим гомоморфизм $\alpha_k$ из гомологической последовательности Смита([7], гл.III, п. 3.3, 3.4)

$$\ldots \to H^{1-\tau}_{k+1}(Y) \xrightarrow{\partial} H_k(X,A) \oplus H_k(A) \xrightarrow{\alpha_k} H_k(Y) \xrightarrow{1-\tau_*} H^{1-\tau}_k(Y) \to \ldots \tag{9}$$

**2.3.A Лемма.** *Сужение $\widetilde{\alpha}_k$ гомоморфизма $\alpha_k$ на $H_k(X,A)$ переводит $b$ в $\beta$. Гомоморфизм $\alpha_{n-1}$ является мономорфизмом, если $H^{1-\tau}_n(Y) = 0$; $\widetilde{\alpha}_{n-2}$ является мономорфизмом, если $X$ связно и $H_{n-1}(Y) = 0$; $\alpha_k$, где $[(n+1)/2] \leqslant k < n-2$, является мономорфизмом, если $X$ и $A$ связны и $H_i(Y) = 0$ для $k+1 \leqslant i \leqslant n-1$.*

**Доказательство.** Равенство $\widetilde{\alpha}_k b = \beta$ сразу следует из определения гомоморфизма $\alpha_k$. Если $H^{1-\tau}_n(Y) = 0$, то мономорфность $\alpha_{n-1}$ следует из точности последовательности (9).

При $[(n+1)/2] \leqslant k \leqslant n-2$ воспользуемся коммутативной диаграммой гомологических последовательностей Смита, включающей последовательность (9) и получаемой из следующей диаграммы коротких точных последовательностей цепных комплексов:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^{\sigma}(Y) \oplus C(A) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{in}\oplus 1"] & C(Y) \arrow[r, "1-\tau"] \arrow[d, "1"] & C^{1-\tau}(Y) \arrow[r] \arrow[d, "(1-\tau)^{h-2}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^{1-\tau}(Y) \oplus C(A) \arrow[r] \arrow[d, "(1-\tau)^{h-2}\oplus 0"] & C(Y) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "(1-\tau)^{h-2}"] & C^{\sigma}(Y) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{in}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^{\sigma}(Y) \oplus C(A) \arrow[r] & C(Y) \arrow[r, "1-\tau"] & C^{1-\tau}(Y) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

где $\sigma = \sum\limits_{i=0}^{h-1} \tau^i$, $\quad C^{\rho}(Y) = \mathrm{im}(\rho : C(Y) \to C(Y))$, $\quad$ in — включение (см.[7], гл. III, п. 3.6). Докажем сначала мономорфность $\widetilde{\alpha}_{n-2}$. Ясно, что она следует из мономорфности составляющей $H^{1-\tau}_{n-1}(Y) \to H_{n-2}(X,A)$ гомоморфизма $\partial$ последовательности (9). Эта составляющая в силу [7] гл. III, п. 3.4, 3.5, 3.7 есть композиция

$$H^{1-\tau}_{n-1}(Y) \xrightarrow{(1-\tau)^{h-2}} H^{\sigma}_{n-1}(Y) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}(X,A) \xrightarrow{\partial} H_{n-2}(A),$$

в которой $\partial$ —мономорфизм, так как по условию $H_{n-1}(X) = 0$. Докажем, что $(1-\tau)^{h-2} : H^{1-\tau}_{n-1}(Y) \to H^{\sigma}_{n-1}(Y)$ — изоморфизм. Рассмотрим квадрат

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^{\sigma}_n(Y) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{in}"] & H_n(Y) \arrow[d, "1"] \\
0 \arrow[r] & H^{1-\tau}_n(Y) \arrow[r] & H_n(Y)
\end{tikzcd}$$

указанной гомологической диаграммы. Так как $H_n^\sigma(Y) \cong H_n(X, A)$ (см. [7], гл. III, п. 3.4), $H_n(X, A) \cong H_n(X)$ (в силу точности гомологической последовательности пары $(X, A)$) и $H_n(X) \cong H_n(Y) \cong \mathbb{Z}_p$ (в силу связности многообразия $X$), то этот квадрат состоит из изоморфизмов. Поэтому в квадрате

$$\begin{array}{ccc} H_n^\sigma(Y) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}^{1-\tau}(Y) \\ \Big\downarrow \text{in} & & \Big\downarrow (1-\tau)^{h-2} \\ H_n^{1-\tau}(Y) & \xrightarrow{\partial} & H_{n-1}^\sigma(Y) \end{array}$$

той же диаграммы гомоморфизмы $\partial$ являются мономорфизмами, а так как по условию $H_{n-1}(Y) = 0$, то и изоморфизмами. Следовательно, $(1-\tau)^{h-2}$ — изоморфизм.

Докажем теперь, что $\alpha_k$ — мономорфизм (при $[(n+1)/2] \leqslant k < n-2$). Благодаря точности горизонтальных отрезков

$$H_{n-1}(Y) \to H_{n-1}^{1-\tau}(Y) \xrightarrow{\partial} H_{n-2}^\sigma(Y) \oplus H_{n-2}(A) \to H_{n-2}(Y),$$
$$H_{n-1}(Y) \to H_{n-1}^\sigma(Y) \xrightarrow{\partial} H_{n-2}^{1-\tau}(Y) \oplus H_{n-2}(A) \to H_{n-2}(Y),$$

указанной диаграммы получаем, что $H_{n-2}^\sigma(Y) = H_{n-2}^{1-\tau}(Y) = 0$, так как по условию $H_{n-1}(Y) = H_{n-2}(Y) = 0$, $H_{n-2}(A) \cong \mathbb{Z}_p$ в силу связности многообразия $A$ и $H_{n-1}^{1-\tau}(Y) \cong H_{n-1}^\sigma(Y) \cong \mathbb{Z}_p$ в силу сказанного выше. Двигаясь вправо по горизонталям той же диаграммы и используя равенства $H_{n-3}(Y) = \ldots = H_{k+1}(Y) = 0$, последовательно получаем, что $H_{n-3}^\sigma(Y) = H_{n-3}^{1-\tau}(Y) = \ldots = H_{k+1}^\sigma(Y) = H_{k+1}^{1-\tau}(Y) = 0$. Поэтому $\alpha_k$ является мономорфизмом в силу точности последовательности (9).

**2.4. Доказательство лемм 1.5.А и 1.5.Б.** Как было отмечено в п. 1.6, классы $\beta_1, \ldots, \beta_l$ лежат в образе мономорфизма $\lambda_*$. Пусть $\beta_i' = \mu_* \lambda_*^{-1} \beta_i$. Так как $\operatorname{Tors} H_2(Y) = 0$, то $\mathbb{Z}[\xi]$-модуль $H_2(Y, \mathbb{Z}[\xi])$ свободен. Поэтому можно выбрать базис пространства $H_2(Y; \mathbb{C})$, переходящий под действием $\mu_*\lambda_*^{-1}$ в базис $\mathbb{Z}_p$-пространства $H_2(Y; \mathbb{Z}_p)$. При этом $\mu_*\lambda_*^{-1}$ переводит координаты вектора $\beta_i$ в соответствующие координаты вектора $\beta_i'$. Рассматривая ранг системы векторов как наибольший порядок ненулевых миноров матрицы, составленной из координат этих векторов, получаем, что $\operatorname{rk}(\beta_0, \ldots, \beta_l) \geqslant \operatorname{rk}(\beta_0', \ldots, \beta_l')$.

Закончить доказательство можно теперь двумя способами–либо с помощью леммы 2.2.А, применив к классам $\beta_j'$ гомоморфизм $v_1$, либо с помощью леммы 2.3.А, применив к этим классам композицию $\partial \circ \widetilde{\alpha}_2^{-1}$, где $\partial : H_2(\mathbb{C}P^2, \mathbb{C}A; \mathbb{Z}_p) \to H_1(\mathbb{C}A; \mathbb{Z}_p)$ — граничный гомоморфизм.

## Список литературы

[1] Рохлин В .А., *Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых*, Успехи мат. наук **33**, вып. 5 (1978), 77-89.

[2] Виро О .Я., *Успехи в топологии вещественных алгебраических многообразий за последние шесть лет*, Успехи мат. наук **41**, вып. 3 (1986), 45-67.
[3] Арнольд В .И., *О расположении овалов вещественных плоских алгебраических кривых, инволюциях четырехмерных гладких многообразий и арифметике целочисленных квадратичных форм*, Функцион. анализ и его прил. **5**, вып. 3 (1971), 1-9.
[4] Звонилов В .И., *Усиленные неравенства Петровского и Арнольда для кривых нечетной степени*, Функцион. анализ и его прил. **13**, вып. 4 (1979), 31-39.
[5] Рохлин В .А., *Двумерные подмногообразия четырехмерных многообразий*, Функцион. анализ и его прил. **5**, вып. 1 (1971), 48-60.
[6] Дольд А., *Лекции по алгебраической топологии*, Мир, М., 1976.
[7] Бредон Г., *Введение в теорию компактных групп преобразований*, Наука, М., 1980.

Поступило 13 октября 1991 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191011, Санкт-Петербург, наб. р. Фонтанки, 27
Сыктывкарский государственный
университет