ЛЕГКОЕ ЧТЕНИЕ ДЛЯ ПРОФЕССИОНАЛА

Предлагаемая статья открывает новую рубрику журнала, предназначенную для своего рода „неформальных обзоров". Этот новый для нас жанр хорошо известен и пользуется возрастающей популярностью за рубежом – достаточно вспомнить увлекательные математические (и околоматематические) „повествования с картинками" в Mathematical Intelligencer, American Mathematical Monthly и некоторых других журналах. Редколлегия надеется, что и Вы, читатель, попробуете себя в этом трудном жанре, чтобы способствовать взаимопониманию математиков, разделенных (увы!) своими узко профессиональными устремлениями.

Публикации этого раздела будут пользоваться статусом обзоров (пусть и неформальных...), т. е. должны быть согласованы с редколлегией на стадии проекта.

Редколлегия пользуется случаем поблагодарить С. Г. Гиндикина, подсказавшего нам открыть эту рубрику.

Редколлегия

О. Я. Виро, Ю. В. Дроботухина

КОНФИГУРАЦИИ СКРЕЩИВАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ

Статья представляет собой обзор недавних результатов о проективных конфигурациях подпространств общего положения, написанный в виде популярного введения в предмет, значительная часть материала дана в форме, доступной ученикам старших классов. Однако в части, относящейся к конфигурациям прямых общего положения в трехмерном пространстве, обзор представляется полным.

Единственный сюжет, публикуемый впервые, – конструкция надстройки для конфигураций подпространств проективного пространства, которая увеличивает размерность объемлющего пространства на 4, а размерности подпространств – на 2 и сохраняет значительную часть алгебро-топологических характеристик конфигурации (см. предпоследнюю страницу статьи).

Недавно мы написали для журнала „Квант" статью. В ней рассказывалось о новых, но вполне элементарных исследованиях. Статья была опубликована в третьем выпуске „Кванта" за 1988 г. При этом она была существенно сокращена. Нам же, конечно, хотелось, наоборот, расширить ее с тем, чтобы охватить или хотя бы упомянуть другие родственные вопросы. Настоящая статья представляет собой расширенный вариант статьи, опубликованной в „Кванте". Ее можно

Ключевые слова: проективные конфигурации, скрещивающиеся прямые, изотопии и жесткие изотопии, зеркальность, джойн.

рассматривать как обзор недавних результатов о топологии конфигураций общего положения. Мы решились сохранить стиль статьи для „Кванта", полагая, что он может показаться привлекательным и читателям-профессионалам. Читателю, которого этот стиль раздражает, мы приносим свои извинения и сообщаем, что материал, содержащийся в первых двух третях этой статьи (до пункта „пятерки прямых" включительно) анонсирован в заметке [1], а стиль последней трети чуть более традиционен.

Статья в „Кванте" называлась *„Сплетения скрещивающихся прямых"*. Этот заголовок кажется несколько странным, не правда ли? Сплетают что-то гибкое. А тут – прямые! В заголовке, правда, говорится не о процессе сплетения, а, скорее, о результате. Но могут ли быть сплетены, зацеплены друг за друга, хитро расположены по отношению друг к другу скрещивающиеся прямые? На первый взгляд, пожалуй, кажется, что не могут. Впрочем, откуда у нас это впечатление? В повседневной жизни мы никогда не имеем дела с чем-либо действительно похожим на прямые: не так существенно то, что не бывает предметов бесконечно тонких, – толщиной мы готовы пренебречь, – существеннее отсутствие неограниченно протяженных объектов. Даже лучи света – эти образцы прямолинейности, – рассеиваясь и слабея, на большом расстоянии становятся неощутимыми. На практике приходится иметь дело лишь с отрезками прямых. Любой набор не пересекающихся друг с другом отрезков можно, двигая отрезки так, чтобы они все время оставались непересекающимися, расположить, как угодно. В этом нас убеждает опыт, да и доказать это нетрудно. Прямые мы изображаем их отрезками. Потому-то нам и кажется, что прямые не могут быть сплетены. Ну а как на самом деле?

Прежде всего давайте более точно сформулируем интересующие нас вопросы. Первый вопрос: могут ли несколько непересекающихся прямых располагаться по-разному? А что значит „располагаться по-разному"? Сейчас нас не интересуют ни углы, ни расстояния между прямыми. Будем считать, что при движении прямых, в процессе которого они остаются непересекающимися, взаимное расположение их не изменяется. Если же один набор прямых нельзя получить из другого таким движением, то условимся считать, что прямые в этих наборах расположены по-разному.

Самыми легкими для нашего пространственного воображения являются наборы параллельных прямых. Ясно, что любые два таких набора, состоящие из одинакового числа прямых, устроены одинаково. Действительно, поворачивая все пространство с „вмороженными" в него прямыми одного набора, можно сделать их параллельными прямым другого набора, после чего, передвигая по очереди прямые первого набора так, чтобы они не наезжали друг на друга и оставались параллельными, легко совместить их с прямыми второго набора.

Обратимся теперь к произвольным наборам прямых. Можно ли произвольный набор непересекающихся прямых превратить в набор параллельных прямых, как бы причесать его? У этой задачи есть простое и неожиданное решение, которое трудно найти, рассматривая конкретные наборы прямых. Взяв такой набор и повозившись с ним, вы, вероятно, сумеете сделать все прямые параллельными. Но это навряд ли приведет к решению задачи в полной общности, потому что вы воспользовались, скорее всего, каким-нибудь специфическим свойством рассмотренного набора прямых. Нельзя ли справиться со всеми наборами одним махом? Можно, и вот как. Возьмем произвольный набор непересекающихся прямых. Выберем две параллельные друг другу плоскости, не параллельные ни одной прямой нашего набора. Зафиксируем точки пересечения первой плоскости с прямыми: поставим там шарниры. Точки пересечения второй плоскости с прямыми тоже зафиксируем, но так, чтобы они были неподвижны только на плоскости, а по прямым могли бы скользить. Другими словами, ограничимся тем, что просверлим во второй плоскости маленькие отверстия в местах ее пересечения с прямыми. Будем теперь отодвигать вторую плоскость от первой в перпендикулярном им обеим направлении. При этом прямые будут поворачиваться на шарнирах. Углы, которые они образуют с плоскостями, будут увеличиваться, и если плоскость за конечное время унесется на бесконечность, они все достигнут 90°, т. е. прямые станут параллельными. Это „причесывание" набора прямых в более привычной для геометрии манере описывается так: мы подвергаем пространство растяжению от первой плоскости в перпендикулярном ей направлении с коэффициентом растяжения, быстро возрастающим и за конечное время достигающим бесконечности. Прямые при этом поворачиваются вокруг точек пересечения с этой плоскостью и в пределе становятся перпендикулярными ей.

Итак, сплетений непересекающихся прямых не бывает: все наборы непересекающихся прямых устроены одинаково. Но в заголовке речь шла о скрещивающихся прямых, так что наборы параллельных прямых были исключены. На то имеются серьезные причины. Параллельные прямые очень близки к пересекающимся: сколь угодно мало повернув одну из двух параллельных прямых вокруг любой ее точки, можно сделать эти прямые пересекающимися. А для скрещивающихся прямых это не так.

Поскольку нам разонравились параллельные прямые, придется пересмотреть представление о том, какие наборы прямых устроены одинаково, а какие – нет. Будем считать, что при движении прямых, в процессе которого они остаются скрещивающимися, взаимное расположение их не изменяется. В дальнейшем нам придется много раз рассматривать такие движения, поэтому удобно будет для их обозначения иметь специальное слово. Будем называть их *изотопиями.* Если один набор прямых нельзя получить из другого изотопией, то условимся считать, что прямые в этих наборах расположены по-разному. О таких наборах будем говорить, что они неизотопны.

Сложность вопроса об изотопности двух наборов прямых зависит прежде всего от числа прямых в этих наборах. Чем больше прямых, тем, по-видимому, хитрее может оказаться изотопия, соединяющая эти наборы. Вначале обратимся к самой легкой ситуации.

Две прямые

Возьмем любые две пары скрещивающихся прямых и попытаемся решить задачу об их изотопности. Слово „задача" звучит, пожалуй, слишком торжественно, ибо изотопность здесь совершенно очевидна. Тем не менее всмотримся в доказательство пристальнее.

Поворотом вокруг общих перпендикуляров прямых наших пар сделаем углы между прямыми в обеих парах одинаковыми, например равными 90°. Отрезок общего перпендикуляра двух прямых, заключенный между ними, является кратчайшим отрезком, соединяющим эти прямые. Сближая прямые в наших парах (или отодвигая их друг от друга), сделаем эти отрезки равными по длине, а затем совместим их. Поворотом вокруг полученного отрезка совместим какую-либо прямую первой пары с одной из прямых второй. Это можно сделать, поскольку прямые перпендикулярны отрезку. При этом те прямые, за которыми мы не следили, тоже совместятся. Действительно, они проходят

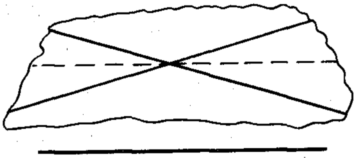


Рис. 1.

Рис. 2.

через одну точку – конец общего перпендикуляра – и перпендикулярны одной плоскости – плоскости, определяемой общим перпендикуляром и теперь уже совпадающими другими прямыми наших пар. Доказательство окончено.

В конце доказательства, после того как мы уравняли расстояния между прямыми, пара прямых двигалась так, как будто прямые были жестко соединены друг с другом – ни расстояние, ни угол между ними не изменялись. Возникает вопрос: пусть у двух пар скрещивающихся прямых одинаковы и расстояние и углы; всегда ли возможно изотопией, в процессе которой не изменяется ни то, ни другое, совместить эти пары? Как показывает предыдущее рассуждение, это можно сделать, если углы между прямыми равны 90°. А вот если углы не равны 90°, то в результате изотопии, описанной выше, вторые прямые пар могут не совместиться. На рис. 1 показано, что получится в этом несчастном случае. Вторые прямые пар образуют угол, биссектриса которого параллельна первым прямым (совмещенным), а плоскость его перпендикулярна плоскости, проходящей через биссектрису и первые прямые. Так что вовсе не случайно в доказательстве изотопности любых двух пар скрещивающихся прямых углы были сделаны равными 90°. При любой другой величине угла эта конструкция доказательства не дает. Более того, дело здесь не в конструкции. Оказывается, две пары скрещивающихся прямых с одинаковыми расстояниями и углами, которые не совмещаются при помощи нашей конструкции, не могут быть совмещены никакой изотопией, в процессе которой расстояние и угол постоянны. Это связано с замечательным явлением, которое нам еще не раз встретится. Его стоит обсудить подробнее.

Ориентации и полуориентации

Ориентировать набор прямых – это значит ориентировать каждую входящую в него прямую. Ориентировать набор из n прямых можно 2^n способами. *Полуориентацией* набора прямых называется пара противоположных ориентаций этого набора (рис. 2).

Каждая пара неперпендикулярных прямых снабжается канонической полуориентацией, которая определяется самой парой, точнее, взаимным расположением входящих в нее прямых. Действительно, ориентируем как-либо одну из прямых такой пары и повернем эту прямую так, чтобы она стала параллельна другой прямой. Такой поворот можно осуществить двумя способами (рис. 3); выберем из них самый экономный, при котором угол поворота наименьший (он единственный, поскольку прямые не ортогональны). Получается ориентированная прямая, она параллельна второй прямой нашей пары, которая тем самым

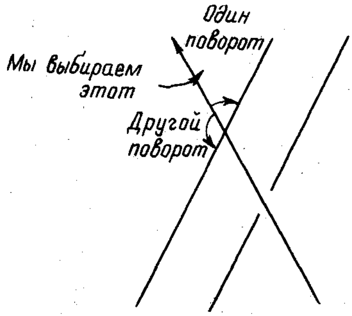


Рис. 3.

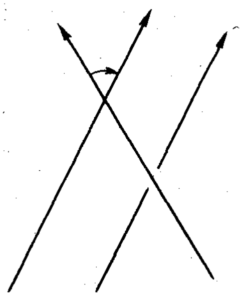


Рис. 4.

приобретает ориентацию (рис. 4). Таким образом, выбор ориентации одной из прямых дает ориентацию пары. Если мы выберем противоположную ориентацию этой прямой, то получим противоположную ориентацию пары. Начав с другой прямой, мы получим те же две противоположные друг другу ориентации пары. Эти две ориентации и составляют обещанную каноническую полуориентацию.

Изотопия, в процессе которой не меняется угол между прямыми, переводит каноническую полуориентацию в каноническую полуориентацию. Это наводит на мысль рассмотреть ещё один тип изотопий – изотопии полуориентированных пар скрещивающихся прямых. Мы допускаем изменения угла и расстояния между прямыми, но обязуемся следить за полуориентацией. Такая изотопность занимает промежуточное положение между наличием произвольной изотопии и наличием изотопии, в процессе которой расстояние и угол ($\neq 90°$) не меняются. Уж если между интересующими нас полуориентированными парами прямых нет такой изотопии, то не может быть и изотопии, при которой расстояние и угол не меняются. Что же может препятствовать изотопности полуориентированных пар прямых?

Коэффициент зацепления прямых

У каждой полуориентированной пары прямых есть характеристика, которая может принимать значения +1 и –1. Эта характеристика называется *коэффициентом зацепления*. Она сохраняется при изотопиях, и поэтому если две полуориентированные пары прямых имеют разные коэффициенты зацепления, то они не изотопны. Вот как определяется коэффициент зацепления. Имеется самый экономный способ совместить одну ориентированную прямую с другой, скрещивающейся с ней: перемещая прямую вдоль общего перпендикуляра и поворачивая ее на наименьший угол, необходимый для совмещения направлений. При этом прямая будет двигаться либо как ручка правого буравчика, либо как ручка левого (рис. 5). В первом случае коэффициент зацепления равен –1, во втором – +1.

Для того чтобы вызвать у читателя, знакомого с алгебраической топологией, подходящие ассоциации, предложим другое равносильное определение коэффициента зацепления пары скрещивающихся ориентированных прямых. Проведем через одну из прямых пары плоскость, пересекающую другую прямую. Расположим правый буравчик так, чтобы его ось совпала со второй прямой и чтобы он протыкал плоскость, двигаясь в направлении, определенном ориентацией прямой

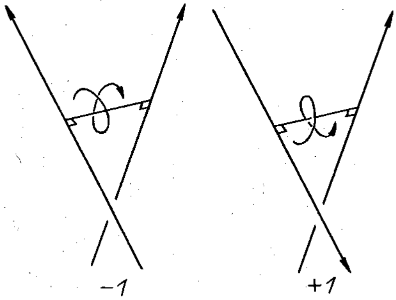


Рис. 5.

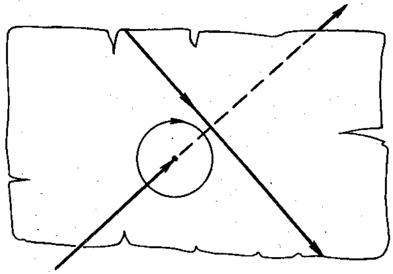


Рис. 6.

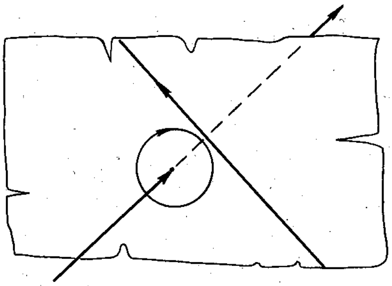


Рис. 7.

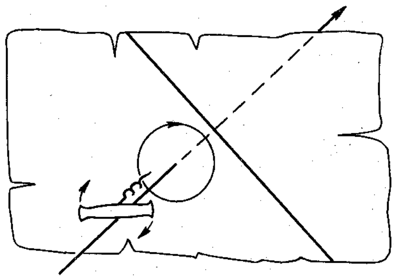


Рис. 8.

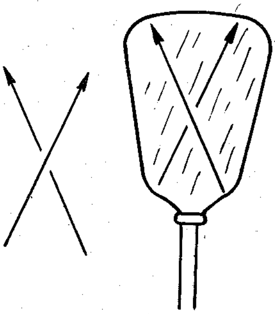


Рис. 9.

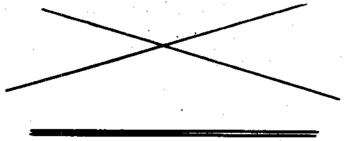


Рис. 10.

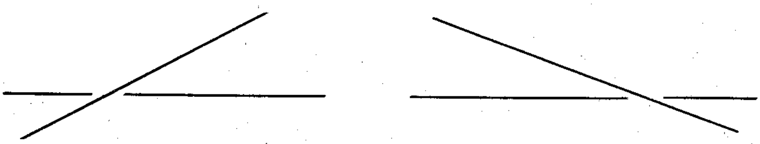


Рис. 11.

(и вращаясь в соответствии со своим устройством). При этом на плоскости мы получим ориентированную окружность, которая зачеркивается крайними точками ручки буравчика. Ориентация такой окружности может оказаться либо согласованной с ориентацией первой прямой (рис. 6), либо нет (рис. 7). В первом случае коэффициент зацепления равен +1, во втором — –1. Рис. 8 поможет читателю увидеть равносильность двух приведенных определений коэффициента зацепления.

Ясно, что переориентация одной из прямых пары влечет за собой изменение коэффициента зацепления. Поэтому при замене ориентации пары на противоположную коэффициент зацепления не меняется и, стало быть, является характеристикой полуориентированной пары и зависит только от полуориентации. При отражении в зеркале коэффициент зацепления пары ориентированных прямых меняется (рис. 9).

Вспомним теперь тот несчастный случай, с которым мы столкнулись в поисках изотопии между двумя парами скрещивающихся прямых, сохраняющей расстояния и углы между прямыми (рис. 10). Тогда мы не смогли ответить на вопрос об изотопности наборов (рис. 11). Но теперь-то мы знаем, что такие пары (со своими каноническими полуориентациями) получаются одна из другой отражением в зеркале и имеют поэтому различные коэффициенты зацепления. Значит, их нельзя соединить изотопией, в процессе которой не меняются расстояния и углы между прямыми. А если у двух пар одинаковы расстояния, углы и коэффициенты зацепления, то эти пары можно соединить такой изотопией.

Впрочем, можно так модифицировать понятие угла между скрещивающимися прямыми, чтобы он включил в себя коэффициент зацепления и сделал бы излишним отдельное упоминание о нем. Углы между прямыми, обсуждавшиеся выше, принимали значения из промежутка (0°, 90°). Модифицированный угол положим равным произведению прежнего угла на коэффициент зацепления, если он определен (т. е. если угол не равен 90°), и прежнему углу (т. е. 90°) в противном случае. Модифицированный таким образом угол принимает значения в интервалах (–90°, 0°), (0°, +90°]. Его знак можно определить, не говоря ни слова о коэффициенте зацепления, только в терминах буравчика.

Итак, с наборами из двух скрещивающихся прямых мы полностью разобрались.

Тройки прямых

Когда мы занимались парами, заметную роль играл общий перпендикуляр пары скрещивающихся прямых. Строго говоря, без него можно было обойтись, но он так естественно связан с прямыми, так надежно соединяет их во что-то целое и обозримое, что было странно им не воспользоваться. Теперь хорошо бы найти что-нибудь столь же присущее тройке скрещивающихся прямых. Имеются два объекта, способные сыграть эту роль. Одним из них мы займемся сейчас, а знакомство с другим отложим. Забегая вперед, скажем только, что им будет гиперболоид.

Объекты эти мы свяжем не со всякой тройкой попарно скрещивающихся прямых. Мы не будем делать это для тройки, прямые которой лежат в трех параллельных плоскостях. Однако такое расположение неустойчиво: чуть пошевелив любую из прямых, мы получим изотопную тройку, к которой наши конструкции применимы.

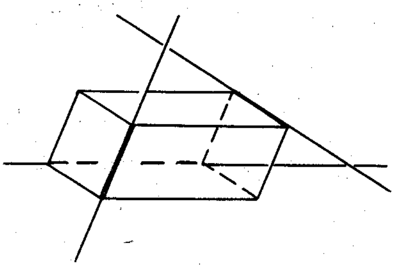


Рис. 12.

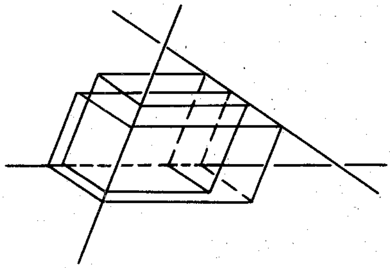


Рис. 13.

Итак, рассмотрим произвольную тройку попарно скрещивающихся прямых, не содержащуюся в трех параллельных плоскостях. Через каждую из этих прямых проведем две плоскости, параллельные двум другим прямым. Так получаются шесть плоскостей. Ясно, что они распадаются на три пары параллельных (каждая пара скрещивающихся прямых содержится в паре параллельных плоскостей). Пересекаясь, плоскости образуют параллелепипед. Наши прямые являются продолжениями трех его попарно скрещивающихся ребер (рис. 12). Таким образом, любые три попарно скрещивающиеся прямые, не лежащие в трех параллельных плоскостях, являются продолжениями ребер некоторого параллелепипеда. Этот параллелепипед и является первым из двух обещанных выше объектов, связанных с тройкой прямых. Чем он замечателен? Прежде всего он единствен. В самом деле, через прямую проходит единственная плоскость, параллельная другой, скрещивающейся с ней прямой, и, если эти прямые – продолжение ребер параллелепипеда, то в этой плоскости лежит одна из его граней. Следовательно, построенная нами шестерка плоскостей однозначно определяется исходной тройкой прямых, и всякий параллелепипед, ребра которого лежат на этих прямых, ограничен этими плоскостями и, значит, тоже однозначно определен.

Мы видим, что параллелепипед соединяет прямые тройки ничуть не хуже, чем общий перпендикуляр соединял прямые в паре. Здесь, как в случае общего перпендикуляра и как в случае полуориентации пары неперпендикулярных прямых, из исходной геометрической конфигурации естественно возникает нечто дополнительное по отношению к ней, но канонически с ней связанное и потому достойное внимания при изучении исходного объекта.

Загадка. На рис. 13 изображены, вопреки доказанному выше, два параллелепипеда с ребрами, лежащими на трех попарно скрещивающихся прямых. В чем дело?

Займемся классификацией троек с точностью до изотопий. Как было показано, можно считать, что прямые, входящие в тройку, являются продолжениями ребер некоторого параллелепипеда. Параллелепипед определяется (с точностью до движений) длинами своих ребер и углами между ними. Непрерывной деформацией мы можем сначала сделать все углы прямыми (получим прямоугольный параллелепипед), а затем все ребра сделать одинаковой длины, например единичной (получим куб) (рис. 14). Эта деформация сопровождается изотопией тройки прямых, являющихся продолжениями ребер параллелепипеда. Таким образом, нам удалось уложить прямые нашей тройки на попарно скрещивающиеся ребра единичного куба. Это замечательное достижение. Действительно, теперь мы знаем, что неизотопных наборов из трех попарно скрещивающихся прямых не так уж много – не больше, чем троек попарно скрещивающихся ребер у куба, а их восемь. Впрочем, восемь – это слишком много. Поворачивая куб, мы можем

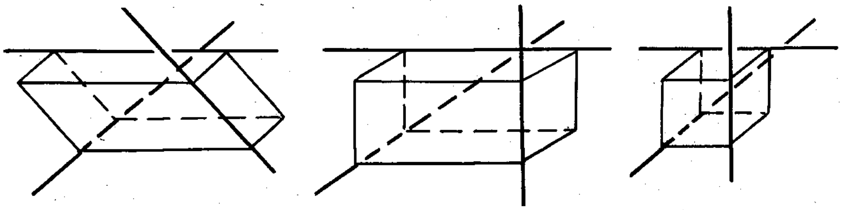


Рис. 14.

перевести любое его ребро в любое другое. Так что возможностей не больше двух; они показаны на рис. 15. Этот успех дает надежду на то, что, действуя таким образом, удастся доказать изотопность и троек прямых, показанных на этом рисунке, а значит, и вообще всех троек попарно скрещивающихся прямых. Попробуйте!

Не получается? Не расстраивайтесь, и не должно получиться! Как и у пар ориентированных прямых, у троек (неориентированных!) прямых есть характеристика, называемая *коэффициентом зацепления,* которая может принимать значения +1 и −1 и которая сохраняется при изотопиях и изменяется при отражении тройки прямых в зеркале. Вот ее определение. В произвольном наборе из трех попарно скрещивающихся прямых ориентируем как попало все прямые. Пары прямых, содержащиеся в нашей тройке, приобретают при этом коэффициенты зацепления (равные ±1). Перемножив их всех, получим некоторое число (тоже +1 или −1), которое и называется коэффициентом зацепления исходной тройки прямых. Оно не зависит от ориентаций прямых: переориентировав любую прямую, мы поменяем знак у двух из трех сомножителей, что не изменит произведения. Сохранение коэффициента зацепления тройки прямых при изотопии и его изменение при отражении тройки в зеркале вытекают из соответствующих свойств коэффициента зацепления пары ориентированных прямых. Поскольку тройки прямых рис. 15 являются зеркальными образами друг друга, их коэффициенты зацепления различны, и, значит, эти тройки действительно не изотопны.

Поскольку всякая тройка попарно скрещивающихся прямых изотопна одной из двух троек, изображенных на рис. 15, две тройки изотопны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые коэффициенты зацепления.

Итак, уже тройки попарно скрещивающихся прямых могут располагаться по-разному. Это оправдывает заголовок статьи, а также то, что в дальнейшем наборы попарно скрещивающихся прямых мы будем называть просто *сплетениями.*

З а д а ч а. Естественно ожидать, то коэффициент зацепления тройки неориентированных прямых окажется равен коэффициенту зацепления какой-нибудь

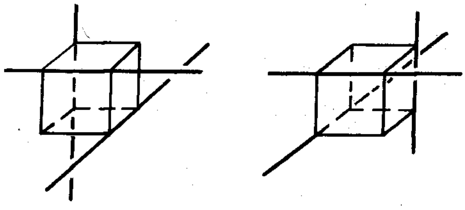


Рис. 15.

пары полуориентированных прямых, канонически строящейся по этой тройке. Так оно и есть, только таких полуориентированных пар – не одна, а три. Докажите, что у всякой тройки попарно скрещивающихся прямых существует единственная полуориентация, при которой коэффициенты зацепления всех пар, содержащихся в этой тройке, равны между собой. Эти коэффициенты зацепления, очевидно, равны коэффициенту зацепления тройки.

Зеркальность и незеркальность

Заметим, что никакая тройка скрещивающихся прямых не изотопна своему зеркальному образу, а всякая пара – изотопна. Набор попарно скрещивающихся прямых назовем *зеркальным*, если он изотопен своему зеркальному образу, и *незеркальным* в противном случае. Таким образом, любая тройка незеркальна, а любая пара зеркальна. Возникают вопросы:

1) бывают ли еще такие p, что любое сплетение из p прямых незеркально?
2) и такие p, что любое сплетение из p прямых зеркально?
3) при каких p существуют незеркальные сплетения p прямых?
4) и при каких p – зеркальные?

Хотя мы еще не очень далеко продвинулись в ответе на самый первый вопрос (какими с точностью до изотопий бывают сплетения p прямых), имеет смысл позаниматься этими вопросами. Они более грубые и поверхностные, но и более качественные. Их грубость и поверхностность сулят легкий успех, который, несомненно, пригодится при классификации.

В нашем распоряжении пока не очень много средств доказательства незеркальности – мы знаем, что всякая тройка незеркальна. Но это не так уж мало. Ведь в каждом сплетении большего числа прямых присутствуют тройки. При зеркальном отражении каждая тройка меняет свой коэффициент зацепления. Значит, если сплетение зеркально, то троек с коэффициентом зацепления +1 должно быть столько же, сколько троек с коэффициентом зацепления –1. Общее количество троек, которые можно выбрать из сплетения, должно быть поэтому четным. Эти нехитрые соображения приведут к следующему неожиданному результату.

Т е о р е м а 1. *Если $p \equiv 3 \bmod 4$, то всякое сплетение из p прямых незеркально.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Число троек, содержащихся в сплетении p прямых (равное $\frac{p(p-1)(p-2)}{6}$), нечетно тогда и только тогда, когда $p \equiv 3 \bmod 4$.

Теорема 1 отвечает (утвердительно) на первый из сформулированных выше вопросов о зеркальности. Ответ на второй вопрос отрицателен: для любого $p \geqslant 3$ можно сконструировать незеркальное сплетение из p прямых. Кстати, это – ответ и на третий вопрос. Простейшие такие сплетения с $p = 4, 5$ и 6 изображены на рис. 16. Эту серию примеров легко продолжить. Все тройки прямых, содержащиеся в сплетениях этой серии, имеют одинаковые коэффициенты зацепления, и именно поэтому такие сплетения незеркальны.

Остался последний вопрос. Мы не знаем еще, существуют ли зеркальные сплетения из p прямых, если $p \not\equiv 3 \bmod 4$. Удобно рассмотреть отдельно два случая: когда p четно и когда $p \equiv 1 \bmod 4$, хотя в обоих случаях ответ утвердителен. Как выглядит простейшее зеркальное сплетение p прямых с четным p, показано на рис. 17 (здесь $p = 4$). Оно состоит из двух наборов прямых (по $p/2$ прямых в каждом), расположенных один за другим. Прямые ближнего к нам набора образуют сплетение из серии незеркальных сплетений, построенной

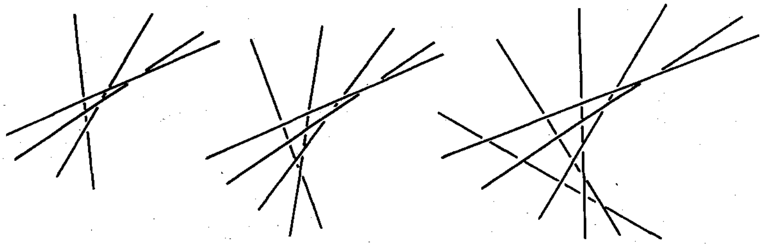


Рис. 16.

выше (рис. 16). Другой набор получается из первого при повороте и последующем отражении в зеркале. Как увидеть зеркальность сплетения, изображенного на рис. 17? Сдвинем ближний к нам набор так, чтобы фрагмент его проекции, содержащий все скрещивания, проехал над проекцией другого набора (рис. 18). Если вы теперь повернете рис. 18 на 90° по часовой стрелке, то увидите, что получился зеркальный образ исходного сплетения.

Теперь обратимся к случаю, когда $p \equiv 1 \bmod 4$, т. е. $p = 4k + 1$. Зеркальное сплетение с $k = 1$ изображено на рис. 19. Четыре прямые этого сплетения образуют две пары, расположенные, как в построенном выше зеркальном сплетении четырех прямых. Пятая прямая разделяет прямые в каждой из пар. Изотопию между этим сплетением и его зеркальным образом можно проделать вот как. Прямые ближней к нам пары повернем вокруг разделяющей прямой почти на 180° – на столько, на сколько позволяют прямые другой пары (рис. 20). Затем разделяющую прямую передвинем так, чтобы ее проекция переместилась через скрещивание тех прямых, которые мы повернули (рис. 21). Осталось взглянуть на полученное сплетение с другой стороны. Для этого повернем его на 180° вокруг какой-нибудь вертикальной прямой (рис. 22). Посмотрите – это и есть зеркальный образ исходного сплетения.

Из этого примера легко изготовить зеркальные сплетения $4k+1$ прямых с $k > 1$. Каждую прямую рис. 19, кроме разделяющей, заменим сплетением k прямых, которое либо само входит в серию, изображенную на рис. 16, либо является зеркальным образом такого сплетения. Причем сделать это нужно так, чтобы сплетения, заменяющие прямые одной пары, составляли сплетение того же типа. См. рис. 23, на котором $k = 2$. Нет нужды доказывать зеркальность изготовленного сплетения: соответствующая изотопия очевидным образом получается из построенной выше.

Четверки прямых

На самом-то деле, со всеми типами сплетений из четырех прямых мы уже знакомы. Их три – они показаны на рис. 24. Слева – сплетение, встречавшееся на рис. 16, в центре – его зеркальный образ, а справа – сплетение рис. 17. Уже было доказано, что они не изотопны друг другу: первое

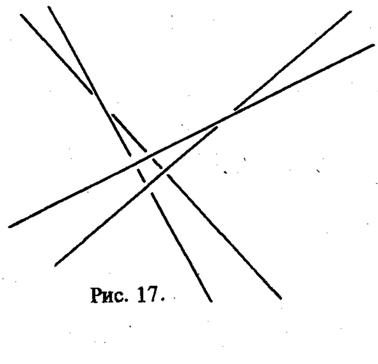


Рис. 17.

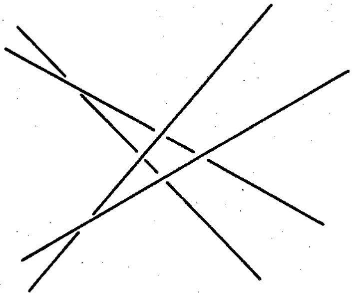


Рис. 18.

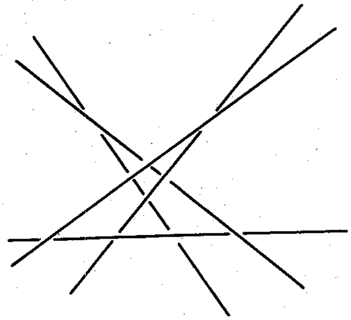


Рис. 19.

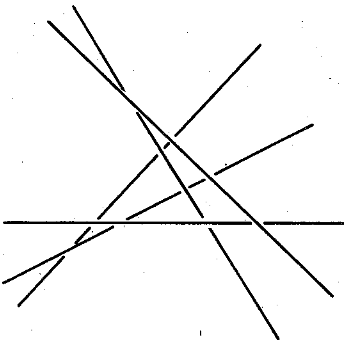


Рис. 20.

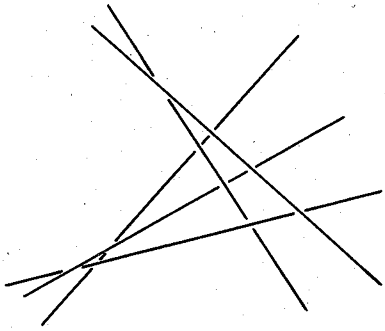


Рис. 21.

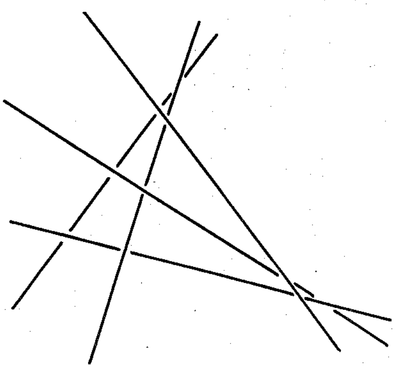


Рис. 22.

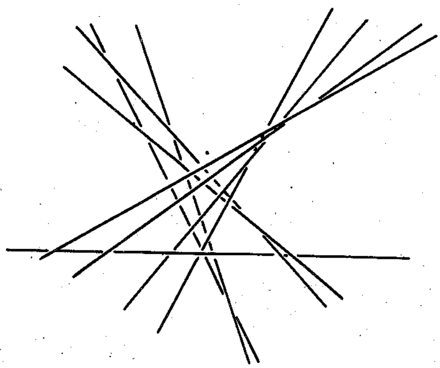


Рис. 23.

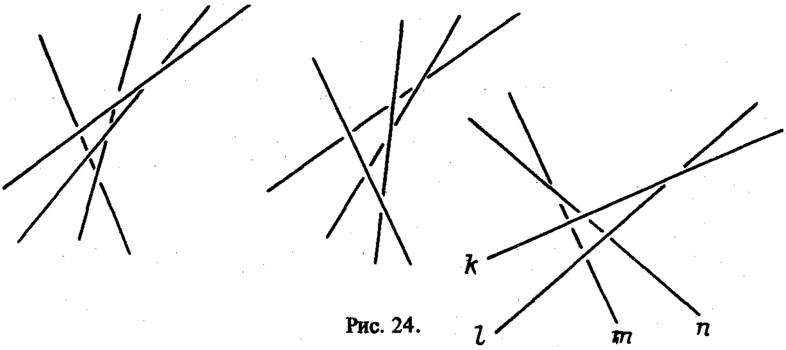


Рис. 24.

не зеркально и потому не изотопно второму, а третье — зеркально и потому не изотопно ни первому, ни второму.

Для того чтобы показать, что любое сплетение четырех прямых изотопно одному из сплетений рис. 24, нам понадобится второй из двух обещанных выше объектов, которые строятся по тройке прямых. Это однополостный гиперболоид, поверхность, обычно изучаемая в аналитической геометрии. Как известно, однополостной гиперболоид (в дальнейшем называемый просто гиперболоидом) составлен из прямых — его образующих. Любые две образующие из одного семейства скрещиваются, любые две образующие из разных семейств либо параллельны, либо пересекаются. Перечислим еще несколько свойств однополостного гиперболоида, которые нам понадобятся:

(1) если прямая имеет с гиперболоидом три общие точки, то она является его образующей;

(2) плоскость, проходящая через образующую гиперболоида, пересекается с ним по двум образующим;

(3) через три попарно скрещивающиеся прямые, не лежащие в параллельных плоскостях, проходит гиперболоид.

Эти свойства — простое следствие того, что гиперболоид является поверхностью второго порядка. Конечно, обо всем этом можно рассказать, не прибегая к аналитической геометрии, тем же языком древних греков, которым мы пользовались до сих пор, но мы не будем понапрасну испытывать терпение читателя.

Итак, чтобы завершить изотопическую классификацию четверок, докажем, что любое сплетение четырех прямых изотопно одному из сплетений рис. 24. Возьмем произвольное сплетение четырех прямых. Чуть пошевелив его, добьемся, чтобы три из четырех прямых (неважно, какие) не лежали в параллельных плоскостях. Через них проведем гиперболоид и посмотрим, как четвертая прямая расположилась относительно него. Имеются только следующие возможности:

(a) прямая не пересекает гиперболоид,

(b) прямая пересекает гиперболоид в одной точке,

(c) прямая пересекает гиперболоид в двух точках,

(d) прямая лежит на гиперболоиде.

В случае (d) все сплетение состоит из четырех образующих гиперболоида и, очевидно, изотопно левому или среднему сплетению рис. 24.

Если четвертая прямая не пересекает гиперболоид, то ее можно притянуть к гиперболоиду так, чтобы она его коснулась, так что из ситуации (a) легко перейти в ситуацию (b).

Случай (b) сводится в свою очередь либо к случаю (c), либо к случаю (d). Чтобы показать это, проведем через точку пересечения четвертой прямой

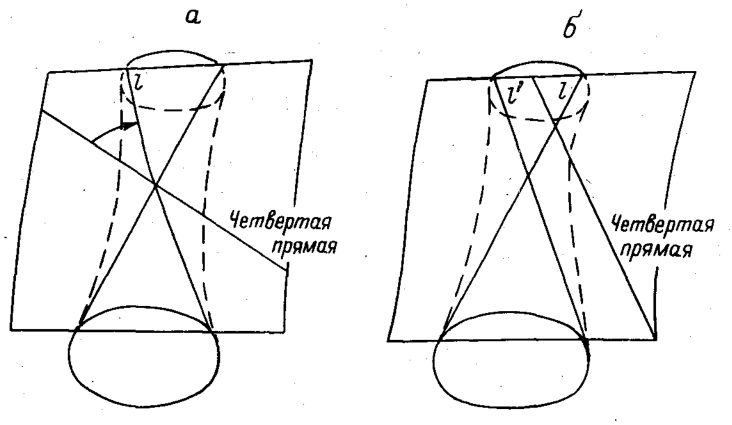


Рис. 25.

с гиперболоидом образующую l гиперболоида, принадлежащую тому же семейству, что и первые три прямые сплетения. В силу свойства (3) плоскость α, проходящая через образующую l и четвертую прямую, пересекает гиперболоид по двум образующим: l и l'. Если l' пересекает образующую l и четвертую прямую в одной и той же точке, то, поворачивая в плоскости α вокруг этой точки четвертую прямую до совпадения ее с l, мы окажемся в ситуации (d) (рис. 25,*а*). В противном случае четвертая прямая сплетения параллельна l' (иначе наблюдался бы случай (c)) (рис. 25,*б*). Но после малого поворота к четвертой прямой в плоскости α вокруг точки пересечения с образующей l она (четвертая прямая) перестает быть параллельной l', пересекает l', а значит, пересекает гиперболоид в двух точках, и мы оказываемся в ситуации (c).

Если же четвертая прямая пересекает гиперболоид в двух точках, то все зависит от того, лежат ли эти точки в одной из трех частей, на которые гиперболоид делится первыми тремя прямыми сплетения, или в разных. Если в одной, то четвертую прямую можно уложить на гиперболоид, не задев по дороге первых трех прямых. Четвертая прямая при этом становится образующей – случай (d). Если четвертая прямая пересекает гиперболоид в разных частях, то сплетение изотопно правому сплетению рис. 24.

Изотопные прямые сплетения

Следующий шаг – классификация сплетений пяти прямых – требует более пристального изучения внутренней структуры сплетений. Вы уже обратили внимание, наверное, на бросающееся в глаза отличие зеркального сплетения от незеркальных – сравните наборы прямых на рис. 24. Левое и среднее сплетения похожи друг на друга тем, что любую прямую сплетения изотопией можно перевести в любую другую прямую. Для зеркального сплетения (правое сплетение рис. 24) это не так. Назовем две прямые сплетения *изотопными*, если существует изотопия сплетения, совмещающая одну из них с другой. Правда, это не совсем изотопия, так как в последний момент две прямые сливаются. Лучше, пожалуй, оставить прежним смысл слова „изотопия" и сформулировать определение изотопных прямых сплетения так: посредством изотопии всего сплетения их можно сблизить так, чтобы их можно было отделить от остальных прямых сплетения гиперболоидом (если мы этого уже добились, ничто не мешает и совместить эти прямые).

Изотопные прямые одинаково располагаются по отношению к другим прямым. Поэтому если прямые a, b изотопны, а c и d – какие-то другие прямые того же сплетения, то коэффициенты зацепления троек a, c, d и b, c, d совпадают. Пользуясь этим необходимым условием изотопности прямых, легко показать, что в правом сплетении рис. 24 прямая l неизотопна прямой m. Действительно, коэффициент зацепления тройки l, n, k равен +1, а коэффициент зацепления тройки m, n, k равен -1.

Ясно, что любые две изотопные прямые можно при помощи некоторой изотопии сплетения поменять местами так, что остальные прямые, подвигавшись в процессе этой изотопии, займут свои прежние положения. Поэтому изотопность прямых сплетения является отношением эквивалентности, и множество всех прямых сплетения распадается на классы изотопных прямых. Левое и среднее сплетения рис. 24 состоят из одного класса каждое; правое сплетение – из двух классов: прямые k и l принадлежат одному классу, m и n – другому.

Если мы выберем из каждого класса изотопных прямых сплетения по одной прямой, то получим сплетение, изотопический тип которого не зависит от выбора. Такое сплетение будем называть *производным сплетением.*

К производному сплетению полезно переходить, если в нем число прямых меньше, чем в исходном сплетении. Для того чтобы по производному сплетению восстановить исходное, нужно совсем немного дополнительной информации: нужно знать, сколько прямых было в каждом классе, и как они были зацеплены друг за друга. Действительно, изотопией исходное сплетение можно привести в такое состояние, чтобы прямые каждого класса расположились как образующие одного семейства на однополостном гиперболоиде и гиперболоиды, на которых располагаются прямые разных классов, не пересекались. Предложите в качестве упражнения какой-нибудь план построения такой изотопии.

Производное сплетение определяет взаимное расположение гиперболоидов. Для восстановления исходного сплетения осталось только указать на каждом гиперболоиде одно из двух семейств образующих. Причем это можно не делать, если в классе одна прямая или класс всего один, а прямых в нем две. В остальных случаях выбор семейства образующих можно задать числовым инвариантом $\epsilon = \pm 1$ класса изотопных прямых сплетения, который определяется как коэффициент зацепления тройки прямых a, b, x, где a и b – прямые рассматриваемого класса, а x – любая отличная от a и b прямая. Докажем, что *этот инвариант зависит только от класса прямых, изотопных a и b.* В доказательстве встретятся формулы, и нам приходится ввести обозначение – коэффициент зацепления тройки прямых a, b, c обозначим через $lk\,(a, b, c)$.

Л е м м а. *Для любых прямых a, b, c, d*

$$lk\,(a, b, c)\, lk\,(a, b, d)\, lk\,(a, c, d)\, lk\,(b, c, d) = 1.$$

Это тождество следует непосредственно из определения коэффициента зацепления тройки прямых, который равен произведению попарных коэффициентов зацепления прямых, снабженных некоторыми ориентациями. Если мы ориентируем прямые a, b, c, d и, пользуясь этими ориентациями, вычислим левую часть доказываемого тождества, то получим произведение квадратов всевозможных попарных коэффициентов зацепления прямых a, b, c, d. ●

Теперь докажем, что $lk\,(a,\ b,\ x)$ не зависит от x, если a и b – изотопные прямые сплетения. Пусть y – произвольная прямая сплетения, отличная от прямых a, b, x. В силу леммы

$$lk\,(a, b, x) = lk\,(a, b, y)\ lk\,(a, x, y)\ lk\,(b, x, y).$$

Прямые a и b изотопны, поэтому $lk\,(a, x, y) = lk\,(b, x, y)$ и, значит, $lk\,(a, b, x) = lk\,(a, b, y)$.

Осталось показать, что $lk\,(a,\ b,\ x)$ не зависит от выбора представителей a и b класса изотопных прямых. В самом деле, если c – отличная от b прямая, изотопная a, то, как уже было доказано,

$$lk\,(a, b, x) = lk\,(a, b, c) = lk\,(a, c, b) = lk\,(a, c, x). \bullet$$

Класс изотопных прямых сплетения, для которого описанный инвариант равен $\epsilon\ (=\pm 1)$, будем называть *ϵ-классом.*

Некоторые сплетения последовательным взятием производных превращаются в сплетения из одной прямой. Такие сплетения называются *вполне разложимыми.* Вполне разложимые сплетения описываются, с точностью до изотопии, характеристиками каждого перехода от производного сплетения к следующему производному. Для такого описания введем обозначения. Сплетение p образующих гиперболоида, составляющее ϵ-класс изотопных прямых, обозначим через $<\epsilon p>$.

Рассмотрим теперь p гиперболоидов, охватывающих непересекающиеся области, осями которых служат прямые сплетения $<\epsilon p>$. Сплетение, которое состоит из p подсплетений $A_1, \dots, A_p$, каждое из которых лежит в области, ограниченной своим гиперболоидом, обозначим символом $<+A_1, \dots, A_p>$, если $\epsilon = +1$, и символом $<-A_1, \dots, A_p>$, если $\epsilon = -1$. В случаях, когда знаки несущественны, будем их опускать. Например, сплетения рис. 24 описываются символами $<+4>$, $<-4>$ и $<<+2>, <-2>>$. Сплетения рис. 16 – символами $<+4>$, $<+5>$, $<+6>$. Зеркальные сплетения из четного числа p прямых, построенные выше, обозначаются $<<+p/2>, <-p/2>>$. В частности, сплетение рис. 17: $<<+2>, <-2>>$.

Не всякое сплетение является вполне разложимым. Например, сплетение рис. 19 совпадает со своим производным и не укладывается на гиперболоид (иначе оно не было бы зеркальным). Это простейший пример такого сплетения.

Пятерки прямых

Можно показать (хотя это уже не так просто, как в случае четверок), что любое сплетение из пяти прямых изотопно одному из семи сплетений, изображенных на рис. 26. Шесть из них незеркальны, вполне разложимы и описываются следующими символами:

$$<+5>, <-5>, <<+3>, <-2>>, <<-3>, <+2>>,$$
$$<+<1>, <-2>, <-2>>, <-<1>, <+2>, <+2>>.$$

Седьмое уже встречалось на рис. 19. Доказать, что эти семь сплетений не изотопны друг другу, можно, и вычислив у каждого из них сумму коэффициентов зацепления всех 10 троек, которые содержатся в этом сплетении. Ответы указаны под изображениями сплетений на рис. 26. Ясно, что такая сумма сохраняется при изотопии, а ответы получались попарно различные.

Шестерки прямых

Совсем уже не легко показать, что имеется всего 19 типов сплетений из шести прямых (эта теорема была доказана в 1987 г. В. Ф. Мазуровским [2]). Некоторые из этих сплетений уже нельзя отличить друг от друга при помощи только коэффициентов зацепления входящих в них троек прямых. Чтобы доказать их неизотопность, пришлось при помощи ЭВМ вычислять более сложные характеристики сплетений. Более подробной формулировке основных результатов В. Ф. Мазуровского о сплетениях шести прямых предпошлем несколько определений.

Для описания сплетений нам понадобится предложенная В. Ф. Мазуровским конструкция, которая по каждой подстановке σ строит сплетение прямых, определенное с точностью до изотопий. Пусть l и m – ориентированные скрещивающиеся прямые, коэффициент зацепления которых равен -1.

Отметим на l и m по k точек и обозначим их символами $A_1, \dots, A_k$ и $B_1, \dots, B_k$ так, чтобы возрастание индексов отвечало передвижению по прямой в направлении, заданном ее ориентацией. Теперь, задавшись подстановкой σ степени k, построим сплетение k прямых, соединив точку A_i с точкой $B_{\sigma(i)}$. Получившееся сплетение k прямых $A_1B_{\sigma(1)}, \dots, A_kB_{\sigma(k)}$ будем обозначать, следуя В. Ф. Мазуровскому, символом $hc(\sigma)$. Сплетения, изотопные сплетениям такого вида, называются *изотопически горизонтальными*. Происхождение этого названия объясняется тем, что такие сплетения изотопны сплетениям, составленным из прямых, лежащих в параллельных (скажем, в горизонтальных) плоскостях.

Упражнение. Какие из сплетений, встречавшихся выше, являются изотопически горизонтальными? Покажите, что все сплетения $\leqslant 5$ прямых изотопически горизонтальны.

Для доказательства неизотопности сплетений шести прямых и для определения, к какому изотопическому классу относится любое наперед заданное сплетение шести прямых, оказывается достаточно, как показал В. Ф. Мазуровский [8], полиномиального инварианта оснащенных зацеплений в $\mathbf{R}P^3$, недавно введенного Ю. В. Дроботухиной. Этот инвариант обобщает скобочный многочлен Кауффмана зацеплений в $\mathbf{R}^3$. Мы не будем давать здесь определение этого инварианта, ограничимся лишь ссылкой на один из ближайших номеров настоящего журнала, где будет опубликована статья Ю. В. Дроботухиной.

Вернемся к классификации сплетений шести прямых. Из девятнадцати их типов пятнадцать состоят из изотопически горизонтальных сплетений. Оставшиеся четыре – это типы сплетений M и L, показанных на рис. 27 и 28, и типы их зеркальных образов M' и L'. Сплетение M и его зеркальный образ M' невозможно различить при помощи коэффициентов зацепления троек входящих в него прямых. Они различаются полиномиальным инвариантом Дроботухиной, который у M равен

$$-A^{15}+6A^{11}+6A^{9}-5A^{7}-6A^{5}+10A^{3}+16A+$$
$$+A^{-1}-10A^{-3}+10A^{-7}+5A^{-9},$$

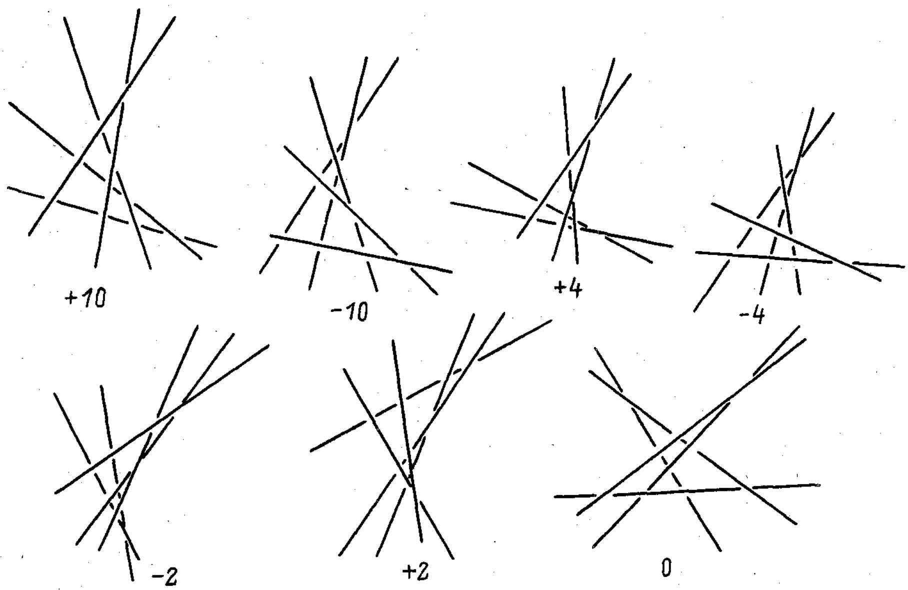


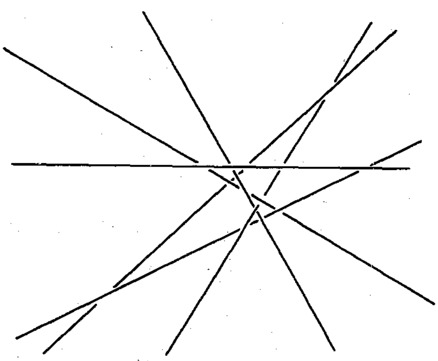
Рис. 26.

а у M' равен

$$5A^{9}+10A^{7}-10A^{3}+A+16A^{-1}+10A^{-3}-6A^{-5}-$$
$$-5A^{-7}+6A^{-9}+6A^{-11}-A^{-15}.$$

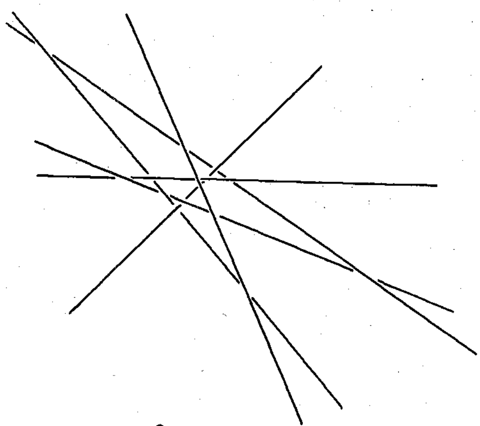
Точно так же сплетение L невозможно при помощи коэффициентов зацепления отличить от сплетения $hc\,(1,2,5,6,3,4)$, однако эти два сплетения различаются полиномиальным инвариантом, равным в случае L многочлену

$$3A^{11}+8A^{9}+A^{7}-12A^{5}-A^{3}+22A+15A^{-1}-12A^{-3}-$$
$$-13A^{-5}+10A^{-7}+15A^{-9}-5A^{-13}+A^{-17}$$



Сплетение M

Рис. 27.



Сплетение L

Рис. 28.

и в случае $hc\ (1, 2, 5, 6, 3, 4)$ – многочлену

$$A^{13}+3A^{11}+2A^{9}+3A^{5}+5A^{3}+2A+3A^{-3}+7A^{-5}+4A^{-7}+A^{-11}+A^{-13}.$$

Сплетение L совпадает со своим производным сплетением. Кроме L, этим свойством обладают еще его зеркальный образ L', сплетения M и M', а также зеркальное сплетение $hc\ (1,\ 3,\ 5,\ 2,\ 6,\ 4)$. Сплетения $hc\ (1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 3,\ 5)$ и $hc\ (5,\ 3,\ 6,\ 4,\ 2,\ 1)$ (являющиеся зеркальными образами друг друга) имеют одно и то же производное сплетение – зеркальную пятерку прямых (которая, как мы упоминали, уже совпадает со своим производным). Остальные сплетения шести прямых вполне разложимы. Они составляют 12 изотопических типов, из которых типы сплетений $\ll +3>, <-3 \gg\ = hc\ (1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 5,\ 4)$ и $\ll -<1>, <+2\gg, <+<1>, <-2\gg> = hc\ (1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 5,\ 3)$ зеркальны, а остальные 10 распадаются на пары типов незеркальных сплетений, получающихся друг из друга отражением в зеркале:

$$<+6> = hc\ (1,2,3,4,5,6),\ <-6> = hc\ (6,5,4,3,2,1);$$

$$\ll +4>, <-2\gg\ = hc\ (1,2,3,4,6,5),$$
$$\ll +2>, <-4\gg\ = hc\ (5,6,4,3,2,1);$$

$$<-<+3>,<+2>,<1\gg\ = hc\ (1,2,3,5,6,4),$$
$$<+<-3>,<-2>,<1\gg\ = hc\ (4,6,5,3,2,1);$$

$$<+<+2>,<-2>,<-2\gg\ = hc\ (1,2,4,3,6,5),$$
$$<-<+2>,<+2>,<-2\gg\ = hc\ (5,6,3,4,2,1);$$

$$<-<+2>,<+2>,<+2\gg\ = hc\ (1,2,5,6,3,4),$$
$$<+<-2>,<-2>,<-2\gg\ = hc\ (4,3,6,5,2,1).$$

Семерки прямых

О числе типов сплетений семи прямых известно только, что оно большое (уже изотопически горизонтальных сплетений имеется, как показал В. Ф. Мазуровский, 48 типов) и четное. Четное потому, что любая семерка незеркальна.

Сплетать можно не только прямые

Вернемся к определению сплетения прямых. Так мы назвали конечный набор попарно скрещивающихся прямых трехмерного пространства. Тем самым из всевозможных наборов мы выделили наборы общего положения, составляющие в пространстве всех наборов открытое всюду плотное множество.

То же самое можно сделать с конфигурациями других типов. Например, рассмотрим конечные наборы точек трехмерного пространства. Такой набор назовем *неособым*, если никакие k его точек с $k \leqslant 4$ не лежат в одном подпространстве размерности $k-2$ (четверки не лежат в плоскостях, тройки – на прямых, и все точки попарно различны). Изотопией такого набора точек назовем его движение, в процессе которого эти условия не нарушаются. Неособый набор точек назовём *зеркальным*, если он изотопен своему зеркальному образу.

Не касаясь задачи классификации неособых наборов точек трехмерного пространства, обратимся к проблеме зеркальности.

Теорема. *Неособый набор q точек трехмерного пространства незеркален, если $q \equiv 6 \bmod 8$ или $q \equiv 3 \bmod 4$ и $q \geqslant 7$.*

Доказательство. Для неособого набора точек определим число s как сумму коэффициентов зацеплений всевозможных троек попарно скрещивающихся прямых, определяемых парами точек нашего набора. Если число точек набора равно q, то число таких троек равно $C_q^2 C_{q-2}^2 C_{q-4}^2/6$. При $q \equiv 6, 7 \bmod 8$ оно нечетно, а вместе с ним нечетно и число s – сумма такого количества слагаемых, каждое из которых равно ± 1. Ясно, что s сохраняется при изотопиях набора точек и умножается на -1 при отражении набора в зеркале. Следовательно, у зеркального набора $s = 0$. Таким образом, при $q \equiv 6, 7 \bmod 8$ неособый набор из q точек не может быть зеркальным. Для того чтобы справиться со случаем $q \equiv 3 \bmod 8$, $q \geqslant 11$, введем другую числовую характеристику неособого набора точек. Заметим сначала, что для любых двух точек A, B нашей конфигурации имеются два противоположных друг другу выделенных циклических порядка в множестве остальных $q-2$ точек – порядки, в которых они проходятся вращающейся плоскостью, содержащей A и B. Тройку прямых, первая из которых соединяет A и B, а две другие соединяют соседние в этих циклических порядках 4 точки (первую со второй и третью с четвертой), назовем *циклической*. Обещанная числовая характеристика неособого набора точек есть сумма коэффициентов зацепления всевозможных циклических троек прямых с отмеченными первыми прямыми. Если $q \geqslant 7$, то в этой сумме $(q-2)C_q^2$ слагаемых, и потому она нечетна при $q \equiv 3 \bmod 4$, $q \geqslant 7$. С другой стороны, если набор точек зеркален, то она, очевидно, равна нулю.

Естественно, возникают вопросы о зеркальности неособых наборов точек, аналогичные четырем вопросам, обсуждавшимся выше в связи с зеркальностью сплетений прямых. Исчерпывающих ответов на них мы не знаем.

В том же духе можно рассмотреть и смешанную ситуацию: конфигурации, в которые входят и прямые и точки. Неособость такой конфигурации можно определять по-разному, но наиболее естественное определение состоит в том, что прямые, входящие в конфигурацию, должны быть попарно скрещивающимися, точки не должны лежать на прямых, и никакие две точки конфигурации не должны лежать в одной плоскости с какой бы то ни было прямой. О классификации и о зеркальности таких смешанных конфигураций известно еще меньше.

При решении многих задач относительно геометрических объектов евклидова пространства полезно расширить пространство до проективного. Проективное пространство даже наделили титулом „великий упроститель". Выход в проективное пространство, как правило, позволяет выделить из первоначальной классификационной задачи более легкую проективную часть, которая обычно интересна и сама по себе. Случай сплетений прямых является, однако, исключением из этого правила. При переходе из $\mathbf{R}^3$ в проективное пространство $\mathbf{R}P^3$ сплетению прямых отвечает набор попарно не пересекающихся проективных прямых, причем таким образом получается всякая конфигурация попарно не пересекающихся прямых пространства $\mathbf{R}P^3$, в которой ни одна из прямых не лежит целиком в бесконечно удаленной плоскости. Изотопность сплетений равносильна существованию изотопии между соответствующими конфигурациями прямых пространства $\mathbf{R}P^3$, в процессе которой прямые остаются попарно не пересекающимися *прямыми.*[1]

[1] Это объясняется тем, что в пространстве всех конфигураций, составленных из n попарно не пересекающихся прямых пространства $\mathbf{R}P^3$, конфигурации, содержащие прямую, которая лежит в бесконечно удаленной плоскости, образуют подмножество коразмерности 2.

Здесь можно не обращать внимания на бесконечно удаленную плоскость. Так что действительно, задача классификации сплетений с точностью до изотопий оказывается равносильна соответствующей задаче о конфигурациях прямых проективного пространства.[2] Никакого выделения более простой задачи не происходит. Однако уже в задачах о неособых наборах точек трехмерного пространства переход из $\mathbf{R}^3$ в $\mathbf{R}P^3$ приводит к расщеплению задачи, но мы не будем здесь обсуждать это явление.

Переход в $\mathbf{R}P^3$ в случае сплетений прямых все же не бесполезен. Он позволяет увидеть топологические причины неизотопности сплетений. Как мы показали еще в самом начале этой статьи, любое сплетение можно продеформировать в набор параллельных прямых, и, значит, существует гомеоморфизм пространства $\mathbf{R}^3$, переводящий любое сплетение в любое другое наперед заданное сплетение такого же числа прямых. В $\mathbf{R}P^3$ это уже не так. Введенный выше коэффициент зацепления скрещивающихся ориентированных прямых можно интерпретировать через обычный, известный из алгебраической топологии, коэффициент зацепления соответствующих прямых в $\mathbf{R}P^3$. (Последний мы только умножили на 2, поскольку он принимает значения $\pm 1/2$, а значения ± 1 нам удобнее). Более того, во всех известных нам случаях неизотопность сплетений прямых доказана посредством топологических инвариантов соответствующих наборов проективных прямых в $\mathbf{R}P^3$, хотя, вероятно, бывают неизотопные сплетения прямых, для которых соответствующие наборы проективных прямых переводятся друг в друга гомеоморфизмом объемлющего пространства.

Быть может, нам следовало бы, соблюдая бóльшую предусмотрительность, учитывать общепринятую топологическую терминологию: изотопными называть такие сплетения прямых, что соответствующие им наборы проективных прямых переводятся один в другой гомеоморфизмом пространства $\mathbf{R}P^3$, изотопным тождественному (напомним, что изотопия гомеоморфизма $h: X \to Y$ – это семейство гомеоморфизмов $h_t: X \to Y$ с $t \in [0, 1]$, $h_0 = h$ и такое, что определяемое им отображение $X \times [0, 1] \to Y : (x, t) \mapsto h_t(x)$ непрерывно). А то, что мы называли изотопиями сплетений, называть *жесткими изотопиями.* Такое легкомыслие допустимо лишь при нынешнем уровне развития, когда неизвестны примеры сплетений, показывающие, что эти два вида изотопий приводят к действительно различным отношениям эквивалентности. В некоторых родственных ситуациях такие примеры известны, и мы сейчас обсудим одну из них.

Плоские конфигурации прямых

На первый взгляд, может показаться, что мир конфигураций прямых плоскости должен быть похож на мир конфигураций прямых трехмерного пространства, в который мы пытались проникнуть выше. В самом деле, легко дать определения, относящиеся к плоским конфигурациям и аналогичные основным определениям этой статьи. Против ожидания, однако, у этих двух миров очень мало сходных черт.

---

[2] Укажем еще две задачи, равносильные этим: задачу классификации наборов попарно трансверсальных двумерных подпространств пространства $\mathbf{R}^4$ относительно движений, при которых они остаются попарно трансверсальными двумерными подпространствами, и задачу классификации зацеплений в сфере S^3, составленных из больших окружностей сферы, относительно изотопий, при которых окружности остаются попарно не пересекающимися большими окружностями сферы S^3.

Несомненно, аналогами сплетений скрещивающихся прямых в мире плоских конфигураций прямых являются конфигурации, составленные из прямых, никакие три из которых не проходят через одну точку и никакие две не параллельны, а аналогами изотопий – движения, в процессе которых прямые остаются прямыми и ограничения на их расположения остаются в силе.

Переход из плоскости в проективную плоскость изменяет задачу, и при этом, как всегда, проективная задача оказывается проще и привлекательнее. В ней объектами служат наборы проективных прямых, лежащих в $\mathbf{R}P^2$ и удовлетворяющих только одному условию: никакие три из них не могут проходить через одну точку. Будем называть их *неособыми* плоскими конфигурациями прямых. Эти конфигурации можно воспринимать и как наборы плоскостей пространства $\mathbf{R}^3$, проходящих через начало координат и таких, что никакие три из них не проходят через одну прямую.

Для неособых плоских конфигураций прямых приходится различать изотопии и жесткие изотопии. Две такие конфигурации изотопны или, что то же, имеют один топологический тип, если одна из них переводится в другую гомеоморфизмом $\mathbf{R}P^2 \longrightarrow \mathbf{R}P^2$. Конфигурации называются жестко изотопными, если их можно соединить путем в пространстве, точками которого служат неособые плоские конфигурации прямых.

В задачах изотопической и жесткой изотопической классификации плоских конфигураций отсутствует проблема зеркальности. Дело в том, что зеркальный образ любой конфигурации изотопен этой конфигурации, поскольку зеркальная симметрия проективной плоскости изотопна тождественному отображению посредством изотопии, которая состоит из проективных преобразований. (И вообще группа проективных преобразований плоскости $\mathbf{R}P^2$ связна).

Задачи изотопической и жесткой изотопической классификации неособых плоских конфигураций прямых решены обе для конфигураций с числом прямых $\leqslant 7$, и в этой ситуации ответы оказались одинаковыми (см. работу С. М. Финашина [5]). Для числа прямых $\leqslant 5$ изотопический тип определяется числом прямых. Имеются 4 типа неособых плоских конфигураций 6 прямых и 11 типов неособых плоских конфигураций 7 прямых. Однако для конфигураций большого числа прямых изотопическая и жесткая изотопическая классификации резко расходятся. Н. Е. Мнев [6] доказал удивительную теорему, согласно которой, грубо говоря, множество неособых плоских конфигураций прямых, изотопных друг другу, может иметь гомотопический тип любого аффинного открытого полуалгебраического множества и, в частности, может состоять из любого числа компонент связности, т. е. из любого числа классов жестко изотопных конфигураций. (Неточность этой формулировки состоит в том, что следуя Мневу, нужно было бы рассматривать упорядоченные конфигурации, в которых четыре первые прямые занимают фиксированное положение, либо же необходимо профакторизовать по действию группы проективных преобразований).

Простейший известный пример изотопных, но жестко неизотопных плоских неособых конфигураций прямых см. в работе П. Ю. Суворова [7]. Конфигурации этого примера содержат по 14 прямых.

Многомерные обобщения сплетений прямых

Итак, теория неособых плоских конфигураций прямых не очень похожа на теорию сплетений прямых. Это вполне соответствует картине, наблюдаемой в топологии многообразий: известно, что топология многообразий соседних размерностей имеет гораздо меньше общих черт, чем топология многообразий, размерности которых отличаются на 4. В топологии многомерных многообразий есть даже точные конструкции, вкладывающие отдельные фрагменты n-мерной топологии в $(n+4)$-мерную топологию. В хирургии это – умножение на комплексную проективную плоскость, в теории узлов – двукратная надстройка Бредона, в теории особенностей – добавление к функции суммы квадратов двух новых переменных. Нечто похожее, по-видимому, имеется и в теории проективных конфигураций. Сплетения скрещивающихся прямых трехмерного пространства, по-видимому, родственны конфигурациям попарно скрещивающихся $(2k-1)$-мерных подпространств $(4k-1)$-мерного пространства. Для $(2k-1)$-мерных скрещивающихся ориентированных подпространств $(4k-1)$-мерного пространства определен коэффициент зацепления. Поэтому все результаты о незеркальности сплетений, основанные на коэффициентах зацепления, переносятся на эту многомерную ситуацию. Более того, имеется простая конструкция, которая каждой такой конфигурации ставит в соответствие конфигурацию того же типа, но с k, бо́льшим на единицу.

Эта конструкция сохраняет коэффициенты зацепления, изотопные конфигурации переводит в изотопные и, возможно, до некоторой степени осуществляет вложение теории конфигураций $(2k-1)$-мерных подпространств $(4k-1)$-мерного пространства в теорию конфигураций $(2k+1)$-мерных подпространств $(4k+3)$-мерного пространства. Возникает возможность построения стабильной теории проективных конфигураций.[3]

Мы приведем здесь только описание этой конструкции. Насколько нам известно, она никогда не публиковалась и представляет собой единственный оригинальный результат настоящей статьи. Конструкция надстройки, о которой пойдет речь, применима не только к конфигурациям $(2k-1)$-мерных подпространств $(4k-1)$-мерного пространства. Она применима к любой конфигурации конечного набора подпространств проективного пространства, увеличивает размерности подпространств на 2 и размерность объемлющего пространства на 4.

Предварительно введем конструкцию джойна упорядоченных конфигураций. Пусть $L_1, \dots, L_r$ – подпространства пространства $\mathbf{R}P^p$ и $M_1, \dots, M_r$ – подпространства пространства $\mathbf{R}P^q$. В пространство $\mathbf{R}P^{p+q+1}$ вложим $\mathbf{R}P^p$ и $\mathbf{R}P^q$ в качестве скрещивающихся подпространств и обозначим через $K_1, \dots, K_r$ подпространства пространства $\mathbf{R}P^{p+q+1}$ такие, что K_i зачерчивается прямыми, пересекающими L_i и M_i. Конфигурацию подпространств $K_1, \dots, K_r$ назовем *джойном* исходных конфигураций.[4]

Надстройку произвольной конфигурации $L_1, \dots, L_r$ подпространств пространства $\mathbf{R}P^p$ определим как ее джойн с конфигурацией, составленной из r образующих (однополостного) гиперболоида пространства $\mathbf{R}P^3$ с положительными коэффициентами зацепления (т. е. с конфигурацией прямых пространства $\mathbf{R}P^3$, отвечающей сплетению, которое мы обозначали выше через $<+r>$). Так как

[3] Примечание при корректуре. Эта возможность начинает реализовываться: как показал В. Ф. Мазуровский, любая конфигурация $\leqslant 2k+4$ попарно непересекающихся $(2k+1)$-мерных подпространств пространства $\mathbf{R}P^{4k+3}$ жестко изотопна надстройке над конфигурацией $(2k-1)$-мерных подпространств пространства $\mathbf{R}P^{4k-1}$, и если число подпространств в рассматриваемых конфигурациях $\leqslant 2k+2$, то жесткая изотопность надстроек равносильна жесткой изотопности исходных конфигураций $(2k-1)$-мерных подпространств пространства $\mathbf{R}P^{4k-1}$.

[4] Эта конструкция уже встречалась. Изотопически горизонтальные сплетения, введенные выше при рассмотрении сплетений шести прямых, по существу являются джойнами наборов точек прямой.

любые две прямые сплетения $<+r>$ изотопны, то изотопией этого сплетения его прямые можно произвольным образом переставлять. Поэтому джойн с упорядоченной конфигурацией подпространств $L_1, \ldots, L_r$ пространства $\mathbf{R}P^p$ не зависит от порядка, так что операция надстройки определена (с точностью до жестких изотопий) для неупорядоченных конфигураций.

Связь с вещественными алгебраическими поверхностями степени 4. Почти все о сплетениях прямых, изложенное в первых двух третях этой статьи, и все, изложенное выше о неособых наборах точек трехмерного пространства, было опубликовано в заметке [1] О. Я. Виро 1985 г. Интерес к этому предмету был вызван работами В. М. Харламова по классификации неособых проективных вещественных алгебраических поверхностей степени 4 с точностью до жестких изотопий (так называют изотопии, составленные из неособых алгебраических поверхностей). К тому времени более грубая классификация таких поверхностей с точностью до зеркальных отражений и жестких изотопий была найдена В. В. Никулиным [4], и В. М. Харламов доказал при помощи весьма сложной техники с выходом в комплексную область, что некоторые поверхности незеркальны в том смысле, что они не являются жестко изотопными своим зеркальным образам. Хотелось найти элементарное доказательство.

Некоторые из рассматривавшихся поверхностей располагаются в объемлющем трехмерном пространстве как однополостный гиперболоид с ручками и какое-то количество отдельно лежащих сфер (сумма числа ручек и числа сфер не превосходит 10, имеются и другие ограничения, но не будем останавливаться на них). Как следует из теоремы Харнака о числе компонент плоской кривой, каждая плоскость пересекает не более трех из сфер этой поверхности. Поэтому если выбрать на каждой сфере по точке, то получится неособый набор точек, изотопический тип которого определяется поверхностью, и жесткую изотопию поверхности можно сопроводить изотопией набора точек. Таким образом, если число сфер равно 6 или 7, то поверхность не может быть зеркальной. Аналогичным образом В. М. Харламов доказал незеркальность и многих других поверхностей степени 4 и завершил классификацию неособых поверхностей степени 4 (см. [3]). Однако незеркальность некоторых поверхностей удалось доказать только с использованием выхода в комплексную область и всей теории К3-поверхностей.

Список литературы

[1] *Виро О. Я.* Топологические задачи о прямых и точках трехмерного пространства // ДАН СССР. *1985*. Т. 284, № 5. С. 1049–1052. English translation: O. Ya. Viro. Topological problems concerning lines and pointe of three-dimensional space // Soviet Math. Dokl. Vol. 32, N 2 (1985), 528–531.

[2] *Мазуровский В. Ф.* Конфигурации шести скрещивающихся прямых // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. *1988*. Т. 167. С. 121–134.

[3] *Kharlamov V. M.* Non-amphicheiral surfaces of degree 4 in $\mathbf{R}P^3$ // Topology and Geometry-Rohlin seminar. Lect. Notes in Math. 1346, 1988. P. 349–356.

[4] *Никулин В. В.* Целочисленные симметрические билинейные формы и некоторые их геометрические приложения // Изв. АН СССР. Сер. мат. *1979*. Т. 43, № 1. С. 111–177.

[5] *Finashin S. M.* Configurations of seven points in $\mathbf{R}P^3$ // Topology and Geometry-Rohlin seminar. Lect. Notes in Math. 1346, *1988*. P. 501–526.

[6] *Mnev N. E.* The universality theorems on the classification problem of configuration varieties and convex polytopes // Topology and Geometry-Rohlin seminar. Lect. Notes in Math. 1346, *1988*. P. 527–544.
[7] *Suvorov P. Yu.* Isotopic but not rigidly isotopic plane systems of straight lines // Topology and Geometry-Rohlin seminar. Lect. Notes in Math. 1346, *1988*. P. 545–556.
[8] *Мазуровский В. Ф.* Многочлены Кауффмана неособых конфигураций проективных прямых // УМН. *1989*.

Ленинградское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова АН СССР

Поступило 15 февраля 1989 г.