

УДК 513.6

ВИРО О. Я.

**ПЛОСКИЕ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ КРИВЫЕ СТЕПЕНЕЙ 7 и 8:
НОВЫЕ ЗАПРЕТЫ**

Вопрос о том, как могут располагаться по отношению друг к другу компоненты неособой плоской проективной вещественной алгебраической кривой степени m , был включен Д. Гильбертом в его известную шестнадцатую проблему [3]. Полный ответ был известен тогда лишь для $m \leq 5$. В конце шестидесятых годов Д. А. Гудков [4] завершил исследование случая $m=6$. Для $m=7$ окончательный ответ вместе с некоторыми результатами, относящимися к случаю $m=8$, был анонсирован в моей заметке [2]. Результаты этой заметки можно разделить на теоремы существования и теоремы несуществования кривых заданных изотопических типов. Основная цель настоящей статьи — подробное изложение анонсированных в [2] результатов второй группы. Их формулировка и обсуждение, требующие некоторой подготовки, откладываются до § 2 (при желании читатель может обратиться к § 2, ознакомившись лишь с п. 1.1).

С технической точки зрения настоящая работа относится к теории комплексных ориентаций вещественных алгебраических кривых, начало которой было положено работами В. А. Рохлина [8], [9]. Главным техническим новшеством этой работы является применение вспомогательных кривых степеней > 1 .

Кроме результатов, анонсированных в [2], статья содержит:

- (1) новый запрет для вещественных схем $(M-2)$ -кривых степени 8 (теорема 2.2. F);
- (2) новое достаточное условие принадлежности вещественной схемы кривой степени 8 типу II (теорема 5.1. B);
- (3) новое ограничение для комплексных ориентаций кривой четной степени с тремя глубокими гнездами (теорема 4.2).

§ 1. Предварительные сведения

1.1. Вещественные схемы. В этой статье *кривой степени m* называется плоская проективная вещественная алгебраическая кривая степени m . Как известно, компоненты неособой кривой степени m гомеоморфны окружности и если m четно, то все они расположены в $\mathbb{R}P^2$: двусторонне, а если m нечетно, то имеется ровно одна односторонняя компонента. Двусторонние компоненты называются *овалами*.

1.1.A. Неравенство Харнака [12]. Число компонент неособой кривой степени m не превосходит $(m^2 - 3m + 4)/2$.

Неособая кривая степени m называется *M -кривой*, если она состоит

из $(m^2 - 3m + 4)/2$ компонент; если же число ее компонент равно $(m^2 - 3m + 4)/2 - i$, то она называется $(M - i)$ -кривой.

Овал называется *четным*, если он охватывается четным числом других овалов, и *нечетным* в противном случае. Число четных овалов кривой обозначается через p , число нечетных — через n .

Говорят, что два овала образуют *инъективную пару*, если один из них охватывается другим. Совокупность h овалов кривой, любые два из которых образуют инъективную пару, называется *гнездом глубины h* .

Изотопический тип неособой кривой степени m определяется схемой взаимного расположения ее овалов, которую называют также вещественной схемой этой кривой. Вещественные схемы неособых кривых степени m подчиняются многочисленным запретам. Доказательство нескольких новых таких запретов является основной целью настоящей работы. Обзор известных запретов см. в [9] (к нему следует добавить результаты более поздних работ [10] и [11]). Ограничусь здесь формулировкой одного известного запрета. Он наиболее элементарен и понадобится в дальнейшем. Это очевидное следствие теоремы Безу, согласно которой трансверсальные друг другу кривые степеней m и q пересекаются не более, чем в mq точках.

1.1.В. Неравенство Гильберта. *Число овалов, входящих в объединение двух гнезд неособой кривой степени m , не превосходит $[m/2]$. (В частности, глубина одного гнезда не превосходит $[m/2]$, и если есть гнездо глубины $[m/2]$, то нет овалов, не входящих в это гнездо.)*

Для описания вещественной схемы неособой кривой в литературе имеются три системы обозначений, введенные Л. Брюзотти [1], Г. М. Полотовским [6] и автором [2]. В настоящей статье применяется система обозначений, совпадающая по существу с системой автора и отличающаяся от системы Полотовского лишь начертанием основных символов и более удобной их компановкой.

Связная односторонняя кривая кодируется символом $\langle J \rangle$. Кривая, состоящая из одного овала, — символом $\langle 1 \rangle$. Пустая кривая — символом $\langle 0 \rangle$. Если символом $\langle A \rangle$ кодируется некоторая двусторонняя кривая, то кривая, получающаяся из нее добавлением нового овала, охватывающего все старые, кодируется символом $\langle 1 \langle A \rangle \rangle$. Кривая, представляющаяся в виде объединения двух непересекающихся кривых, которые кодируются символами $\langle A \rangle$ и $\langle B \rangle$ и таковы, что ни один овал одной кривой не охватывается овалом другой, кодируется символом $\langle A \parallel B \rangle$. Кроме того, допускаются два сокращения: во-первых, если $\langle A \rangle$ — код некоторой кривой, то фрагмент другого кода, имеющий вид $A \parallel \dots \parallel A$, где A повторяется n раз, сокращенно обозначается через $n \times \langle A \rangle$, и, во-вторых, фрагменты кода, имеющие вид $n \times \langle 1 \rangle$ и $n \langle 1 \langle A \rangle \rangle$, сокращенно обозначаются через n и $n \langle A \rangle$.

1.2. Комплексные схемы (подробности см. в [9]). Если A — неособая кривая степени m , то через SA обозначается ее комплексификация, т. е. комплексная плоская проективная кривая, определяемая тем же (неприводимым) уравнением. С топологической точки зрения SA является двумерным псевдомногообразием; A располагается в его

неособой части и может разбивать или не разбивать SA . В первом случае кривая A называется *разбивающей* или кривой *типа I*, во втором случае — *неразбивающей* или кривой *типа II*. В первом случае A разбивает SA на две связные половины, естественные ориентации которых определяют на A , как на их общем крае, две противоположные ориентации. Эти ориентации называются *комплексными*.

Инъективная пара овалов разбивающей кривой называется *положительной*, если ориентации овалов, определяемые комплексной ориентацией, индуцируются ориентацией ограничиваемого ими в RP^2 кольца, и называется *отрицательной* в противном случае. Число положительных пар обозначается через Π^+ , число отрицательных — через Π^- .

Овалы разбивающей кривой нечетной степени делятся на положительные и отрицательные. Именно, рассмотрим топологическую ленту Мёбиуса, остающуюся от RP^2 после удаления внутренности овала. Если целочисленные гомологические классы, реализуемые в ней этим овалом и удвоенной односторонней компонентой с ориентациями, определяемыми комплексной ориентацией, различаются знаком, то овал называется *положительным*; в противном случае он называется *отрицательным*. Число положительных овалов обозначается через Λ^+ , число отрицательных — через Λ^- .

В случае разбивающей кривой четной степени на положительные и отрицательные делятся только внешние овалы. Именно, внешний овал положителен, если он составляет с охватывающим его внешним овалом положительную пару, и отрицателен в противном случае.

Вещественная схема кривой, обогащенная комплексными характеристиками, т. е. типом и, если это тип I, то и разделением овалов на положительные и отрицательные (охватывающим все овалы в случае нечетной степени и внешние овалы в случае четной степени), называется *комплексной схемой* кривой. Как и вещественные схемы, комплексные схемы неособых кривых степени m подчиняются некоторым запретам. Несколько новых таких запретов доказываются ниже в § 4. Обзор известных запретов см. в [9] (к нему нужно добавить результаты более поздних работ [5] и [11]). Сформулирую здесь только запреты, которые понадобятся в дальнейшем.

1.2.A. *Всякая M -кривая принадлежит типу I.*

1.2.B. Сравнение Харламова [9, п. 3.4]. (См. также Марэн [5].) *Всякая $(M-2)$ -кривая степени $2k$, удовлетворяющая сравнению*

$$p-n \equiv k^2 + 4 \pmod{8},$$

принадлежит типу I.

1.2.C. Формулы комплексных ориентаций [9, пп. 2.3, 2.4]. Пусть l — число овалов неособой кривой типа I степени m . Если $m=2k$, то

$$2(\Pi^+ - \Pi^-) = l - k^2.$$

Если $m=2k+1$, то

$$(\Lambda^+ - \Lambda^-) + 2(\Pi^+ - \Pi^-) = l - k(k+1).$$

Следующая теорема позволяет в некоторых случаях найти комплексную схему неособой кривой, получающейся в результате малого возмущения распадающейся кривой.

1.2.D. ТЕОРЕМА ФИДЛера [9, п. 3.7]. (См. также Марэн [5].) Пусть A_1, \dots, A_s — такие неособые кривые типа I степеней m_1, \dots, m_s , что никакие три из них не проходят через одну точку и что A_i трансверсально пересекается с A_j в $m_i m_j$ (вещественных) точках для любых i, j . Пусть A — неособая кривая, получающаяся в результате малого возмущения объединения A_1, \dots, A_s . Тогда для принадлежности кривой A типу I необходимо и достаточно, чтобы способ устранения особенностей, превращающий $A_1 \cup \dots \cup A_s$ в A , был согласован с некоторыми комплексными ориентациями кривых A_1, \dots, A_s и, если последнее условие выполнено, то возникающая ориентация кривой A является одной из ее комплексных ориентаций.

Введенная в п. 1.1 система кодировки вещественных схем легко преобразуется в систему кодировки комплексных схем. Для описания комплексной ориентации вводятся два новых символа: коды положительных овалов снабжаются верхним индексом $+$, а коды отрицательных — верхним индексом $-$. Кроме того, весь код снабжается индексом c . В частности, комплексная схема кривой типа II с вещественной схемой $\langle A \rangle$ кодируется символом $\langle A \rangle_c$.

1.3. Комплексные ориентации и пучки прямых (по Т. Фидлеру [11]). Пучок вещественных прямых, проходящих через точку пересечения вещественных прямых L_0, L_1 , разбивается этими прямыми на два отрезка, каждый из которых при надлежащем выборе уравнений $\lambda_0(x) = 0$ и $\lambda_1(x) = 0$, определяющих прямые L_0 и L_1 , можно представить в виде $\{L_t\}_{t \in [0,1]}$, где

$$L_t = \{x \in \mathbb{R}P^2 \mid (1-t)\lambda_0(x) + t\lambda_1(x) = 0\}.$$

Такое семейство $\{L_t\}_{t \in [0,1]}$ мы и будем иметь в виду, говоря об отрезке пучка прямых, соединяющем L_0 с L_1 .

Точка касания двух ориентированных кривых называется *положительной*, если ориентации кривых определяют одну ориентацию общей касательной в этой точке, и *отрицательной* в противном случае.

Следующая теорема является специальным случаем основной теоремы работы Т. Фидлера [11]. Я привожу ее вместе с доказательством, которое отличается от доказательства Фидлера меньшей общностью, но, как мне кажется, большей наглядностью.

1.3.A. ТЕОРЕМА. Пусть A — неособая кривая типа I. Пусть вещественные прямые L_0, L_1 касаются ее в точках τ_0, τ_1 , не являющихся ее точками перегиба. Пусть $\{L_t\}_{t \in I}$ — отрезок пучка прямых, соединяющий L_0 с L_1 . Ориентируем прямые L_0, L_1 так, чтобы ориентации переходили друг в друга при изотопии L_t . Если существует такой путь $s: I \rightarrow SA$, соединяющий точки τ_0, τ_1 , что для $t \in (0, 1)$ точка $s(t)$ является мнимой неособой точкой кривой SA и точкой трансверсального пересечения кривой SA с CL_t , то относительно одной из комплексных ориентаций кривой A точки τ_0, τ_1 обе являются положительными точками касания.

Доказательство. В силу условий, наложенных на s , вся ситуация, описанная в теореме, устойчива относительно малых перемещений точки $P=L_0 \cap L_1$. Точнее, существует такая окрестность U точки P , что для всякой точки $P' \in U$ существуют близкие к L_0, L_1 проходящие через P' прямые L'_0, L'_1 , касающиеся кривой A в точках τ'_0, τ'_1 , близких к τ_0, τ_1 ; существует отрезок $\{L'_t\}_{t \in I}$ пучка прямых, соединяющий L'_0 с L'_1 и состоящий из прямых, близких к L_t , и, наконец, существует такой близкий к s путь $s': I \rightarrow CA$, соединяющий точки τ'_0, τ'_1 , что $s'(t) \in CA \cap CL'_t$.

Выберем точку $P' \in U \setminus \bigcup_{t \in I} L_t$. Поскольку, очевидно, A касается в точках τ_0, τ_1 границы угла $\bigcup_{t \in I} L_t$ извне, новые точки касания τ'_0, τ'_1 будут сдвинуты по отношению к старым: одна — в направлении, определяемом ориентациями прямых L_t , а другая — в противоположном направлении (см. рис. 1).

Так как $P' \notin \bigcup_{t \in I} L_t$, то ни одна прямая семейства $\{L_t\}_{t \in I}$ не входит в семейство $\{L'_t\}_{t \in I}$ и потому

$$s(\text{int } I) \cap s'(\text{int } I) \subset \left(\bigcup_{t \in I} (CL_t \setminus L_t) \right) \cap \left(\bigcup_{t \in I} (CL'_t \setminus L'_t) \right) = \emptyset.$$

Таким образом, дуги $s(I)$ и $s'(I)$ не пересекаются и вместе с дугами $\tau_0\tau'_0$ и $\tau'_1\tau_1$ кривой A ограничивают в CA ленту, соединяющую дуги $\tau_0\tau'_0, \tau'_1\tau_1$ и расположенную в одной из половин, на которые A разбивает CA (см. рис. 1). Ориентация, получаемая от этой ленты дугами $\tau_0\tau'_0$ и $\tau'_1\tau_1$, совпадает с комплексной ориентацией, из чего, очевидно, следует доказываемое утверждение. ■

Пусть A — неособая кривая типа I и $P \in \mathbb{R}P^2 \setminus A$. Пусть $\mathcal{L} = \{L_t\}_{t \in I}$ — отрезок пучка вещественных прямых, проходящих через P , который не содержит ни касательных перегиба кривой A , ни прямых, комплексификации которых касались бы CA в мнимых точках или проходили бы через особые точки кривой CA . Обозначим $\bigcup_{t \in I} L_t$ через C .

Фиксируем одну из комплексных ориентаций кривой A и переходящие друг в друга при естественной изотопии ориентации прямых $L_t, t \in I$. Ориентируем часть C проективной плоскости так, чтобы эта ориентация индуцировала на L_0 , как на части своей границы, выделенную ориентацию. Овал кривой A , лежащий в C , называется *положительным относительно \mathcal{L}* , если его комплексная ориентация и ориентация C индуцируют одну и ту же ориентацию его вну-

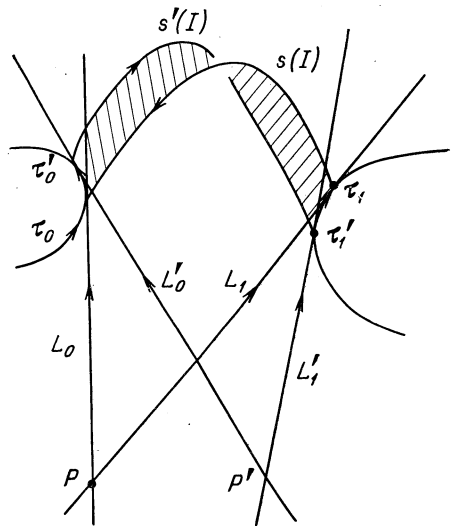


Рис. 1

тренности; в противном случае говорят, что он отрицателен относительно \mathcal{L} .

Точка касания кривой A с прямой из \mathcal{L} является невырожденной критической точкой функции $A \cap C \rightarrow I$, относящей точке x такое $t \in I$, что $x \in L_t$. Индексом точки касания будем называть ее морсовский индекс по отношению к этой функции. Пару точек касания кривой A с прямыми из \mathcal{L} , в которой первая точка имеет индекс 0, а вторая — индекс 1, назовем *существенной*, если одна из этих точек положительна, а другая отрицательна, и *несущественной* в противном случае.

1.3.B [11, лемма 2]. Пусть Γ — компонента пересечения $A \cap C$ и M — множество ее точек касания с прямыми из \mathcal{L} . Если $\Gamma \cap \partial C = \emptyset$, то M можно разбить на пары, из которых одна — существенная, а остальные — несущественные. Если $\Gamma \cap \partial C \neq \emptyset$, то множество M , быть может за вычетом одной точки, можно разбить на несущественные пары. ■

Обозначим замыкание множества $(CA \setminus A) \cap (\bigcup_{t \in I} CL_t)$ через S . Фиксируем одно из существующих в силу 1.3.B разбиений множества точек касания прямых из \mathcal{L} с компонентами пересечения $A \cap C$. Цепью точек касания называется последовательность точек касания, в которой любые две соседние точки либо принадлежат одной из выделенных пар, либо лежат в одной компоненте множества S . Последовательность, составленная из овалов, на которых лежат выделенные существенные пары точек касания, участвующие в одной цепи, называется *цепью овалов*. Множество овалов кривой A , лежащих в C , оказывается разбито, таким образом, на цепи овалов. Следующая теорема легко выводится из 1.3.A.

1.3.C. Знаки относительно \mathcal{L} овалов одной цепи чередуются (т. е. за положительным относительно \mathcal{L} овалом следует овал, отрицательный относительно \mathcal{L} , а за ним — снова овал, положительный относительно \mathcal{L}). ■

Из 1.3.C очевидным образом получается следующая теорема, в которой речь идет уже не о знаках овалов относительно \mathcal{L} , а о знаках, которые определялись в п. 1.2.

1.3.D [11, теорема 3]. Если степень кривой A нечетна и овалы некоторой цепи располагаются в одной компоненте множества $C \setminus$ (односторонняя компонента кривой A), то знаки овалов этой цепи чередуются. Если степень кривой A четна и овалы некоторой цепи располагаются в одной компоненте пересечения множества C с внутренностью охватывающего эти овалы внешнего овала, то знаки овалов этой цепи чередуются. ■

1.4. Комплексные ориентации и пучки прямых. Альтернативный подход. В ситуациях, которые будут рассматриваться в § 4, изложенную в предыдущем пункте теорию можно заменить следующей теоремой 1.4.A. Хотя эта теорема может быть получена как следствие теоремы 1.3.C, здесь она выводится из теорем 1.2.C и 1.2.D*, и ни в ее формулировке, ни в доказательстве не фигурируют цепи овалов.

* Я благодарю В. А. Рохлина, указавшего мне на возможность подобного применения этих теорем.

1.4.A. Пусть A — неособая разбивающая кривая степени t , пусть $L_0, L_1 \subset \mathbb{R}P^2$ — прямые, C — одна из двух компонент дополнения $\mathbb{R}P^2 \setminus (L_0 \cup L_1)$, и пусть L_0 и L_1 ориентированы так, что проекция $L_0 \rightarrow L_1$ с центром в точке, лежащей в $\mathbb{R}P^2 \setminus (C \cup L_0 \cup L_1)$, переводит ориентацию одной прямой в ориентацию другой. Пусть овалы u_0, u_1 кривой A лежат в $\mathbb{R}P^2 \setminus C$ и овал u_i касается прямой L_1 в одной точке ($i=0, 1$). Если пересечение $A \cap C$ состоит из $t-2$ компонент, каждая из которых представляет собой дугу, соединяющую L_0 с L_1 , то относительно одной из комплексных ориентаций кривой A точки касания овала u_0 с L_0 и овала u_1 с L_1 положительны.

Доказательство. Предположим противное: допустим, что относительно некоторой комплексной ориентации кривой A касание овала u_0 с L_0 положительно, а касание овала u_1 с L_1 отрицательно. Повернем прямые L_0 и L_1 вокруг точки $L_0 \cap L_1$ в направлении от C на достаточно малые углы так, чтобы полученные прямые L_0' и L_1' трансверсально пересекали кривую A в t точках каждая. Возмутим объединения $A \cup L_0'$ и $A \cup L_1'$ способами, согласованными с имеющимися ориентациями. Полученные неособые кривые B_0 и B_1 принадлежат, в силу 1.2.D, типу I. Их комплексные схемы, как легко видеть, можно получить одну из другой в результате пересадки овала, возникшего из u_0 , из одной компоненты дополнения объединения остальных компонент кривой в соседнюю ком-

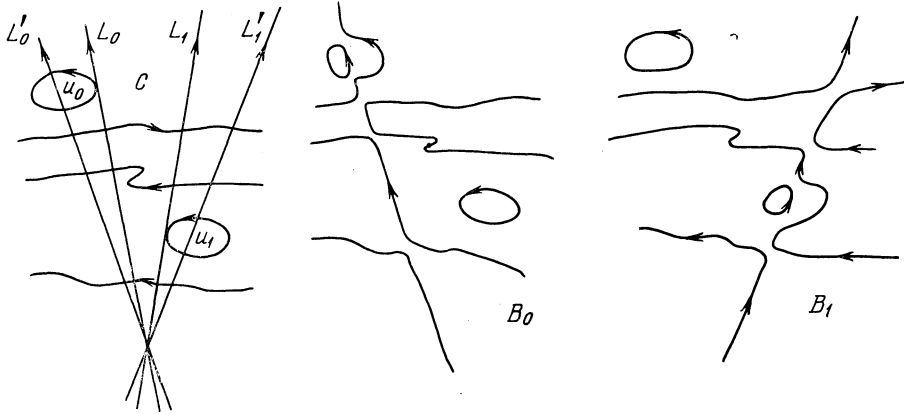


Рис. 2

поненту (см. рис. 2). Такая операция изменяет одно из чисел $\Pi^+ - \Pi^-$ и $\Lambda^+ - \Lambda^-$ на 1, поэтому комплексные схемы кривых B_0 и B_1 не могут обе удовлетворять формуле комплексных ориентаций (см. 1.2.C). Это показывает, что наше допущение не верно. ■

§ 2. Вещественные результаты

2.1. Кривые степени 7. Изотопическая классификация неособых кривых степени 7 дается следующей теоремой.

2.1.A [2, теорема 1]. Существуют неособые кривые степени 7 со следующими вещественными схемами:

- (i) $\langle J \parallel \alpha \parallel 1 \langle \beta \rangle \rangle$ с $\alpha + \beta \leq 14$, $0 \leq \alpha \leq 13$, $1 \leq \beta \leq 13$;

(ii) $\langle J \parallel \alpha \rangle$ с $0 \leq \alpha \leq 15$;

(iii) $\langle J \parallel 1 \langle 1 \rangle \rangle$.

Любая неособая кривая степени 7 имеет одну из этих 121 вещественных схем.

Ко времени выполнения работы [2] оставалось неизвестным, существуют ли кривые степени 7 со схемами $\langle J \parallel 1 \langle 14 \rangle \rangle$, $\langle J \parallel 10 \parallel 1 \langle 4 \rangle \rangle$ и $J \parallel \alpha \parallel 1 \langle \beta \rangle$ с $13 \leq \alpha + \beta \leq 14$, $3 \leq \alpha$, $6 \leq \beta$. Таким образом, для доказательства теоремы 2.1.A достаточно было доказать следующие две теоремы.

2.1.B. Не существует неособой кривой степени 7 с вещественной схемой $\langle J \parallel 1 \langle 14 \rangle \rangle$.

2.1.C. Существуют неособые кривые степени 7, имеющие вещественные схемы $\langle J \parallel \alpha \parallel 1 \langle \beta \rangle \rangle$ с $6 \leq \alpha + \beta \leq 14$, $1 \leq \alpha$, $2 \leq \beta$.

Наброски доказательств этих теорем даны в [2]. Подробное доказательство теоремы 2.1.B излагается ниже в § 3. Подробное доказательство теоремы 2.1.C будет изложено в другой статье.

2.2. Кривые степени 8. Вещественные схемы неособых кривых степени 8 удовлетворяют следующим ограничениям.

2.2.A. Следствие теоремы Безу. Вещественная схема неособой кривой степени 8 имеет вид $\langle \alpha \rangle$ или $\langle \alpha \parallel 1 \langle \beta \rangle \rangle$ или $\langle \alpha \parallel 1 \langle \beta \rangle \parallel 1 \langle \gamma \rangle \rangle$ или $\langle \alpha \parallel 1 \langle \beta \rangle \parallel 1 \langle \gamma \rangle \parallel 1 \langle \delta \rangle \rangle$ или $\langle 4 \langle 1 \rangle \rangle$ или $\langle \alpha \parallel 1 \langle \beta \parallel 1 \langle \gamma \rangle \rangle \rangle$ или $\langle 1 \langle 1 \langle 1 \rangle \rangle \rangle$.

2.2.B. Неравенство Харнака. $p + n \leq 22$.

2.2.C. Экстремальные сравнения. Если $p + n = 22$, то $p - n \equiv 0 \pmod{8}$ и, значит, $p \equiv n \equiv 3 \pmod{4}$. Если $p + n = 21$, то $p - n \equiv \pm 1 \pmod{8}$.

2.2.D. Следствие неравенства Петровского. Не существует неособой кривой степени 8 с вещественной схемой $\langle 20 \rangle$.

2.2.E. Если $\langle \alpha \parallel 1 \langle \beta \rangle \parallel 1 \langle \gamma \rangle \parallel 1 \langle \delta \rangle \rangle$ — вещественная схема M -кривой степени 8 с отличными от нуля β , γ и δ , то числа β , γ и δ нечетны.

2.2.F. Если $\langle \alpha \parallel 1 \langle \beta \rangle \parallel 1 \langle \gamma \rangle \parallel 1 \langle \delta \rangle \rangle$ — вещественная схема неособой $(M-2)$ -кривой степени 8 с отличными от нуля β , γ и δ и $\beta + \gamma + \delta \equiv 0 \pmod{4}$, то из чисел β , γ и δ два нечетны, а одно четно.

Теоремы 2.2.A—2.2.D представляют собой следствия общих теорем топологии вещественных алгебраических кривых, см., например, [9, п. 1.3]. Теорема 2.2.E была анонсирована в моей заметке [2], теорема 2.2.F формулируется здесь впервые. Их доказательства излагаются ниже в § 5.

Специальный случай теоремы 2.2.E, в котором $\alpha = 0$ и $\beta = 1$, принадлежит Т. Фидлеру [11]. В качестве гипотезы теорема 2.2.E была сформулирована А. Б. Корчагиным в связи с моими результатами по реализации вещественных схем M -кривыми степени 8. Она запрещает 40 вещественных схем, которые не запрещаются теоремами 2.2.A—2.2.D (из этих сорока четыре запрещаются специальным случаем теоремы 2.2.E, доказанным Фидлером). Теорема 2.2.F запрещает 9 вещественных схем, которые не запрещаются теоремами 2.2.A—2.2.D.

Как известно, особый интерес представляют M -кривые: с одной стороны, к случаю M -кривых относятся наиболее интересные ограничения на топологию кривых, с другой стороны, вещественные схемы с мень-

шим числом компонент обычно легко реализуются, если построены соответствующие M -кривые. Ограничениям 2.2.A—2.2.C, 2.2.E удовлетворяют 104 вещественные схемы с числом овалов, равным 22. Из них 52 реализованы и перечислены в таблице 1. Соответствующие построения будут изложены в другой статье (вместе с доказательством теоремы, 2.1.C).

Таблица 1

$p = 19, n = 3$	$p = 15, n = 7$	$p = 11, n = 11$	$p = 7, n = 15$	$p = 3, n = 19$
$\langle 18 \parallel 1 \langle 3 \rangle \rangle$	$\langle 14 \parallel 1 \langle 7 \rangle \rangle$	$\langle 10 \parallel 1 \langle 11 \rangle \rangle$	$\langle 6 \parallel 1 \langle 15 \rangle \rangle$	$\langle 2 \parallel 1 \langle 19 \rangle \rangle$
$\langle 17 \parallel 1 \langle 1 \rangle \parallel 1 \langle 2 \rangle \rangle$	$\langle 13 \parallel 1 \langle 1 \rangle \parallel 1 \langle 6 \rangle \rangle$ $\langle 13 \parallel 1 \langle 2 \rangle \parallel 1 \langle 5 \rangle \rangle$ $\langle 13 \parallel 1 \langle 3 \rangle \parallel 1 \langle 4 \rangle \rangle$	$\langle 9 \parallel 1 \langle 1 \rangle \parallel 1 \langle 10 \rangle \rangle$ $\langle 9 \parallel 1 \langle 2 \rangle \parallel 1 \langle 9 \rangle \rangle$ $\langle 9 \parallel 1 \langle 3 \rangle \parallel 1 \langle 8 \rangle \rangle$ $\langle 9 \parallel 1 \langle 4 \rangle \parallel 1 \langle 7 \rangle \rangle$ $\langle 9 \parallel 1 \langle 5 \rangle \parallel 1 \langle 6 \rangle \rangle$	$\langle 5 \parallel 1 \langle 1 \rangle \parallel 1 \langle 14 \rangle \rangle$ $\langle 5 \parallel 1 \langle 2 \rangle \parallel 1 \langle 13 \rangle \rangle$ $\langle 5 \parallel 1 \langle 3 \rangle \parallel 1 \langle 12 \rangle \rangle$ $\langle 5 \parallel 1 \langle 4 \rangle \parallel 1 \langle 11 \rangle \rangle$ $\langle 5 \parallel 1 \langle 5 \rangle \parallel 1 \langle 10 \rangle \rangle$ $\langle 5 \parallel 1 \langle 6 \rangle \parallel 1 \langle 9 \rangle \rangle$ $\langle 5 \parallel 1 \langle 7 \rangle \parallel 1 \langle 8 \rangle \rangle$?
$\langle 16 \parallel 3 \langle 1 \rangle \rangle$	$\langle 12 \parallel 2 \langle 1 \rangle \parallel 1 \langle 5 \rangle \rangle$ $\langle 12 \parallel 1 \langle 1 \rangle \parallel 2 \langle 3 \rangle \rangle$	$\langle 8 \parallel 2 \langle 1 \rangle \parallel 1 \langle 9 \rangle \rangle$ $\langle 8 \parallel 1 \langle 1 \rangle \parallel 1 \langle 3 \rangle \parallel 1 \langle 7 \rangle \rangle$ $\langle 8 \parallel 1 \langle 1 \rangle \parallel 2 \langle 5 \rangle \rangle$ $\langle 8 \parallel 2 \langle 3 \rangle \parallel 1 \langle 5 \rangle \rangle$?	?
$\langle 1 \parallel 1 \langle 2 \rangle \parallel 1 \langle 17 \rangle \rangle$	$\langle 1 \parallel 1 \langle 6 \rangle \parallel 1 \langle 13 \rangle \rangle$	$\langle 1 \parallel 1 \langle 10 \rangle \parallel 1 \langle 9 \rangle \rangle$	$\langle 1 \parallel 1 \langle 14 \rangle \parallel 1 \langle 5 \rangle \rangle$	$\langle 1 \parallel 1 \langle 18 \rangle \parallel 1 \langle 1 \rangle \rangle$
?	?	$\langle 3 \parallel 1 \langle 10 \rangle \parallel 1 \langle 7 \rangle \rangle$	$\langle 3 \parallel 1 \langle 14 \rangle \parallel 1 \langle 3 \rangle \rangle$	
$\langle 9 \parallel 1 \langle 2 \rangle \parallel 1 \langle 9 \rangle \rangle$	$\langle 5 \parallel 1 \langle 6 \rangle \parallel 1 \langle 9 \rangle \rangle$	$\langle 5 \parallel 1 \langle 10 \rangle \parallel 1 \langle 5 \rangle \rangle$	$\langle 5 \parallel 1 \langle 14 \rangle \parallel 1 \langle 1 \rangle \rangle$	
$\langle 11 \parallel 1 \langle 2 \rangle \parallel 1 \langle 7 \rangle \rangle$	$\langle 7 \parallel 1 \langle 6 \rangle \parallel 1 \langle 7 \rangle \rangle$	$\langle 7 \parallel 1 \langle 10 \rangle \parallel 1 \langle 3 \rangle \rangle$		
?	$\langle 9 \parallel 1 \langle 6 \rangle \parallel 1 \langle 5 \rangle \rangle$	$\langle 9 \parallel 1 \langle 10 \rangle \parallel 1 \langle 1 \rangle \rangle$		
$\langle 17 \parallel 1 \langle 2 \rangle \parallel 1 \langle 1 \rangle \rangle$	$\langle 11 \parallel 1 \langle 6 \rangle \parallel 1 \langle 3 \rangle \rangle$ $\langle 13 \parallel 1 \langle 6 \rangle \parallel 1 \langle 1 \rangle \rangle$			

2.3. Гипотезы о вещественных схемах неособых кривых степени 8. В [9, п. 3.9] В. А. Рохлин высказал гипотезу, согласно которой любая кривая данной степени с данной вещественной схемой является разбивающей тогда и только тогда, когда эта схема не является частью большей вещественной схемы кривой той же степени. Г. М. Полотовский [7] заметил, что из справедливости этой гипотезы вытекают бы новые ограничения на вещественные схемы кривых степени 8. Эти гипотетические ограничения формулируются следующим образом.

2.3.A. (Гипотеза). Пусть $\langle \alpha \parallel 1 \langle \beta \rangle \parallel 1 \langle \gamma \rangle \parallel 1 \langle \delta \rangle \rangle$ — вещественная схема неособой $(M-i)$ -кривой степени 8 с отличными от нуля β, γ и δ . Если $\beta + \gamma + \delta \equiv 3 \pmod{4}$ и $i \leq 2$, то числа β, γ и δ нечетны. Если $\beta + \gamma + \delta \equiv 2 \pmod{4}$ и $1 \leq i \leq 3$, то из чисел β, γ и δ два нечетны и одно четно.

Вывод этого ограничения из гипотезы Рохлина состоит в применении теорем 2.2.Е и 5.1.В настоящей работы и известных условий принадлежности вещественной схемы типу I (см. [9, § 3]).

В [2] я сформулировал следующую гипотезу, запрещающую 25 из 104 вещественных M -схем степени 8, удовлетворяющих ограничениям 2.2.А, 2.2.С и 2.2.Е. Схемы таблицы 1 удовлетворяют ей.

2.3.В (Гипотеза). Если $\langle \alpha \parallel 1 \langle \beta \parallel 1 \langle \gamma \rangle \rangle \rangle$ — вещественная схема M -кривой степени 8 и $\gamma \neq 0$, то числа α и γ нечетны.

Г. М. Полотовский [7] показал, что эта гипотеза и сформулированная выше гипотеза Рохлина противоречат друг другу. Гипотеза 2.3.В возникла вследствие безуспешных попыток реализовать запрещаемые ею схемы. Несмотря на значительные усилия, контрпример к ней так и не удалось построить.

§ 3. Доказательство теоремы 2.1.В

Предположим противное — допустим, что существует неособая кривая X степени 7 с вещественной схемой $\langle J \parallel 1 \langle 14 \rangle \rangle$.

3.1. Комплексная ориентация. Как M -кривая, кривая X принадлежит типу I (см. 1.2.А) и, значит, обладает комплексной ориентацией.

3.1.А. Кривая X не может иметь комплексной схемы, отличной от $\langle J \parallel 1^+ \langle 6^+ 8^- \rangle \rangle_c$.

Доказательство. Пусть ε — знак внешнего овала, т. е.

$$\varepsilon = \begin{cases} +1, & \text{если внешний овал положителен,} \\ -1 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ясно, что

$$\Lambda^+ = \begin{cases} \Pi^- + 1, & \text{если } \varepsilon = +1, \\ \Pi^+, & \text{если } \varepsilon = -1, \end{cases} \quad \Lambda^- = \begin{cases} \Pi^+, & \text{если } \varepsilon = +1, \\ \Pi^- + 1, & \text{если } \varepsilon = -1. \end{cases}$$

Следовательно, $\Lambda^+ - \Lambda^- = \varepsilon(\Pi^- + 1 - \Pi^+)$. С другой стороны, в силу 1.2.С, $\Lambda^+ - \Lambda^- = 2(\Pi^- - \Pi^+) + 3$. Из этих двух равенств получаем

$$\varepsilon = 2 + \frac{1}{\Pi^- + 1 - \Pi^+},$$

и, так как $|\varepsilon| = 1$, то $\varepsilon = +1$ и $\Pi^- + 1 - \Pi^+ = -1$, т. е. $\Pi^+ - \Pi^- = 2$. Наконец, так как $\Pi^+ + \Pi^- = 14$, то $\Pi^+ = 8$ и $\Pi^- = 6$, что дает доказываемый результат. ■

3.2. Расположение внутренних овалов. Среди внутренних овалов кривой X должны найтись такие четыре, что один из них располагается внутри охватываемого внешним овалом треугольника с вершинами, лежащими во внутренностях трех других овалов.

Доказательство. Пусть p_1, p_2, p_3 — точки, лежащие во внутренностях трех положительных внутренних овалов; пусть L_1, L_2, L_3 — прямые, определяемые парами точек $(p_2, p_3), (p_1, p_3), (p_1, p_2)$. Каждая из этих прямых пересекается с односторонней компонентой, внешним овалом и двумя внутренними овалами, причем пересечения с овалами состоят из двух точек каждое. В самом деле, пересечение овала с пря-

мой, проходящей через внутреннюю точку овала, состоит не менее чем из двух точек, а в силу теоремы Безу число точек пересечения кривой X с прямой не превосходит семи.

Следовательно, прямые L_1, L_2, L_3 делят внутренность внешнего овала на 7 частей: треугольник U , три области V_1, V_2, V_3 , прилегающие к его сторонам, и три области W_1, W_2, W_3 , содержащие углы, вертикальные внутренним углам треугольника U . Для доказательства утверждения 3.2, очевидно, достаточно показать, что одна из областей U, W_1, W_2, W_3 содержит овал кривой X (см. рис. 3). Ориентируем прямые $L_1,$

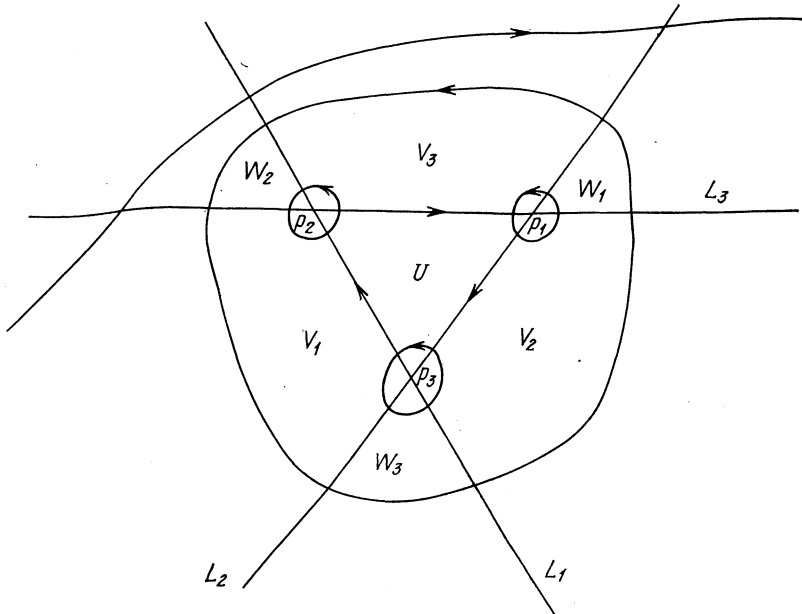


Рис. 3

L_2, L_3 так, чтобы образованный их отрезками контур треугольника U стал отрицателен относительно односторонней компоненты кривой X . Возмутим в соответствии с ориентациями объединение $X \cup L_1 \cup L_2 \cup L_3$ (см. рис. 4) и обозначим получившуюся неособую кривую степени 10 через Y . В силу 1.2.D кривая Y принадлежит типу I и ее комплексная ориентация определяется ориентациями кривой X и прямыми L_1, L_2, L_3 . Число овалов кривой Y равно 21. Поэтому, в силу 1.2.C,

$$\Pi^+ - \Pi^- = \frac{1}{2} (21 - 25) = -2.$$

С другой стороны, ясно, что если бы в областях U, W_1, W_2, W_3 не было овалов кривой X , то у кривой Y было бы всего три инъективные пары овалов и число $\Pi^+ - \Pi^-$ равнялось бы -3 . ■

3.3. Вспомогательные коники. Пусть q_0, q_1, q_2, q_3 — такие точки, расположенные внутри внешнего овала кривой X , что q_0 лежит внутри охватываемого внешним овалом треугольника с вершинами q_1, q_2, q_3 и что продолжение каждой стороны этого треугольника пересекает внешний овал в двух точках, а одностороннюю компоненту — в одной.

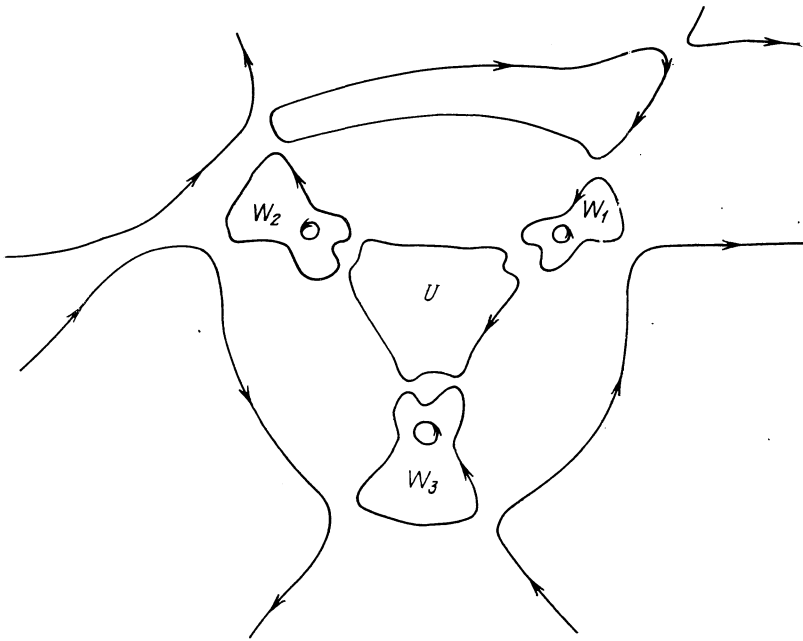


Рис. 4

Тогда любая неособая коника, проходящая через q_0, q_1, q_2, q_3 , пересекает внешний овал не менее, чем в четырех точках, а одностороннюю компоненту — не менее, чем в двух.

Доказательство. Выберем такую систему координат, чтобы точки q_0, q_1, q_2, q_3 имели в ней координаты $(1:1:1), (1:0:0), (0:1:0),$

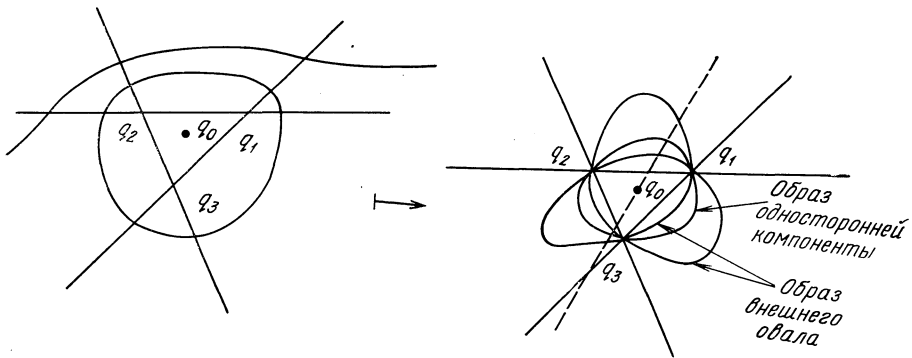


Рис. 5

$(0:0:1)$, и произведем стандартное треугольное преобразование, определяемое формулой $(x_0 : x_1 : x_2) \mapsto (x_1 x_2 : x_0 x_2 : x_0 x_1)$. Односторонняя компонента под действием этого преобразования превратится в овал, проходящий через q_1, q_2, q_3 ; внешний овал превратится в кривую с простыми двойными точками в q_1, q_2, q_3 , дважды обходящую вокруг треугольника $q_1 q_2 q_3$ и устроенную, как стандартная проекция трилистника (см. рис. 5). Неособая коника, проходящая через q_0, q_1, q_2, q_3 , превратится в прямую, проходящую через q_0 и не содержащую ни одной из точек q_1, q_2, q_3 .

Ясно, что такая прямая должна пересекать образы односторонней компоненты и внешнего овала по меньшей мере в двух и в четырех точках, из чего немедленно следует доказываемое утверждение. ■

3.4. **Завершение доказательства теоремы 2.1.В.** В силу 3.2 точки q_0, q_1, q_2, q_3 , удовлетворяющие условиям утверждения 3.3, можно выбрать так, чтобы они лежали во внутренностях четырех внутренних овалов. Выберем точку q_4 из внутренности одного из 10 оставшихся внутренних овалов и проведем через точки q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 конику. Поскольку никакие три из точек q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 не лежат на одной прямой, эта коника неособа. В силу утверждения 3.3 она пересекает одностороннюю компоненту не менее, чем в двух точках, и внешний овал — не менее, чем в четырех. Кроме того, она пересекает каждый из пяти внутренних овалов, охватывающих точки q_i , не менее, чем в двух точках. Таким образом, она пересекает кривую X не менее, чем в 16 точках, что противоречит теореме Безу, так как степень кривой X равна семи. Это противоречие и показывает, что сделанное нами допущение о существовании неособой кривой X степени 7 с вещественной схемой $\langle J \parallel \langle 14 \rangle \rangle$ не верно. ■

§ 4. Экстремальные свойства неравенства Гильберта

Введенные Фидлером [11] (см. п. 1.3) разбиения овалов на цепи обычно не определяются вещественной схемой кривой. Однако, в некоторых случаях, экстремальных с точки зрения неравенства Гильберта 1.1.В, при специальном выборе центра пучка прямых, пользуясь теоремой Безу, можно сделать более или менее определенные выводы о распределении овалов данной вещественной схемы по цепям. В таких случаях теорема 1.3.Д может накладывать ограничения на комплексные ориентации кривых, имеющих данную вещественную схему. Двум таким ограничениям посвящен этот параграф.

4.1. **Первое экстремальное свойство.** Пусть неособая разбивающая кривая A степени t обладает гнездами X и Y , самые внутренние овалы которых лежат вне друг друга. Пусть объединение $X \cup Y$ состоит из $[t/2] - 1$ овалов, самый внутренний овал гнезда X охватывает r^+ положительных и r^- отрицательных овалов, и пусть, кроме этих овалов, овалов гнезд X и Y и овалов, входящих в непересекающиеся с X и Y инъективные пары, кривая A содержит ровно s овалов. Тогда $|r^+ - r^-| \leq s + 1$.

В самом деле, если центр пучка прямых выбрать внутри самого внутреннего овала гнезда Y , а отрезок пучка выбрать так, чтобы его прямые покрывали внутренность самого внутреннего овала гнезда X , то все овалы, охватываемые самым внутренним овалом гнезда X , будут входить в одну цепь и между ними в этой цепи могут встречаться только овалы, не входящие в $X \cup Y$ и в непересекающиеся с X и Y инъективные пары. Отсюда, пользуясь теоремой 1.3.Д, получаем доказываемое утверждение. ■

Сопоставление теоремы 4.1 с формулами комплексных ориентаций 1.2.С и с достаточными условиями 1.2.А и 1.2.В принадлежности веще-

ственной схемы типу I приводит к запрету некоторых вещественных схем. Именно таким образом, хотя и без явного выделения теоремы 4.1, доказывались запреты в работе Фидлера [11]. В частности, так была доказана нереализуемость M -кривыми степени 8 вещественных схем $\langle 1 \langle 1 \rangle \parallel 1 \langle \alpha \rangle \parallel 1 \langle \beta \rangle \rangle$ с четными ненулевыми α и β .

4.2. Второе экстремальное свойство. Пусть неособая разбивающая кривая A четной степени $t=2k$ обладает такими гнездами X , Y и Z , что:

- (i) внешние овалы гнезд X , Y , и Z лежат вне друг друга;
- (ii) глубина гнезда Y равна глубине гнезда Z и больше единицы;
- (iii) число овалов, входящих в $X \cup Y$, равно $k-1$;
- (iv) самый внутренний овал гнезда X охватывает r^+ положительных и r^- отрицательных овалов;
- (v) кроме этих $r^+ + r^-$ овалов, внешний овал гнезда X охватывает ровно s овалов, не входящих в непересекающиеся с X инъективные пары.

Тогда $|r^+ - r^-| \leq s + 1$.

Условиям теоремы 4.2 удовлетворяют, например, разбивающие кривые степени 8 со схемами вида $\langle \alpha \parallel 1 \langle \beta \rangle \parallel 1 \langle \gamma \rangle \parallel 1 \langle \delta \rangle \rangle$, где β , γ и δ отличны от нуля. В этом случае в качестве X можно взять гнездо, состоящее из одного непустого овала, а в качестве Y и Z — инъективные пары овалов, в которые входят два других непустых овала.

Теорема 4.2 является усилением специального случая теоремы 4.1, и ее доказательство отличается от доказательства теоремы 4.1 только применением следующей леммы, основу доказательства которой составляет построение вспомогательной коники и применение теоремы Безу.

4.3 ЛЕММА. Пусть неособая кривая A степени $t=2k$ обладает тремя гнездами X , Y и Z , которые удовлетворяют условиям (i), (ii), (iii) теоремы 4.2. Если L — прямая, пересекающая самые внутренние овалы гнезд X и Y и разбивающая область, охватываемую самым внутренним овалом гнезда X , на две части, каждая из которых содержит овалы кривой A , то L не пересекает овалов кривой A , не входящих в Y и не охватываемых внешним овалом гнезда X .

Доказательство. Предположим противное, т. е. допустим, что L пересекает овал u , который не входит в Y и лежит вне внешнего овала гнезда X . Пусть P — точка прямой L , лежащая внутри самого внутреннего овала гнезда Y . Овал u должен быть пустым и не может принадлежать гнезду Z , поскольку иначе прямую L , очевидно, можно было бы повернуть вокруг точки P так, чтобы она пересекалась с A не менее, чем в $t+2$ точках, что невозможно в силу теоремы Безу.

Поворачивая L вокруг P , можно добиться, чтобы L пересекала область, охватываемую овалом u . Пусть Q — точка, охватываемая овалом u и лежащая на L . Выберем точки R_1 и R_2 из внутренностей овалов v_1 и v_2 , охватываемых самым внутренним овалом гнезда X и лежащих в нем по разные стороны от L . Наконец, выберем точку S , расположенную внутри самого внутреннего овала гнезда Z . Проведем конику C через точки P , Q , R_1 , R_2 и S . Малым шевелением точек R_1 , R_2 и S добьемся, чтобы C была неособа.

Коники C пересекает прямую L в точках P и Q , которые лежат внешнего овала гнезда X . С другой стороны, C проходит через точки R_1 и R_2 , лежащие внутри самого внутреннего овала гнезда X . Поэтому C пересекает каждый из овалов гнезда X не менее, чем в четырех точках. Кроме того, C пересекает не менее, чем в двух точках, каждый из овалов гнезд Y и Z и каждый из овалов u, v_1, v_2 , поскольку C проходит через расположенные в них точки P, S, Q, R_1 и R_2 . Следовательно, число точек пересечения коники C с A не меньше, чем $4h(X) + 2h(Y) + 2h(Z) + b$, где через h обозначается глубина гнезда. Но, в силу условий (ii) и (iii), $h(Y) = h(Z)$ и $h(X) + h(Y) = k - 1$, откуда получаем, что $4h(X) + 2h(Y) + 2h(Z) + 6 = 4k + 2 = 2m + 2$. Таким образом, C пересекается с A не менее, чем в $2m + 2$ точках, что противоречит теореме Безу. Следовательно, наше допущение не верно. ■

4.4. Доказательство теоремы 4.2. Рассмотрим пучок прямых с центром внутри самого внутреннего овала гнезда Y . По отношению к отрезку этого пучка, прямые которого покрывают внутренности самого внутреннего овала гнезда X , все овалы, охватываемые самым внутренним овалом гнезда X , входят в одну цепь и между ними в этой цепи, в силу леммы 4.3, могут встречаться только овалы, охватываемые внешним овалом гнезда X , причем, в силу теоремы Безу, эти овалы не могут входить в непересекающиеся с X инъективные пары. Отсюда, пользуясь теоремой 1.3.D, получаем доказываемое утверждение. ■

§ 5. Кривые степени 8

В этом параграфе результаты предыдущего параграфа применяются к кривым степени 8. Через A здесь обозначается неособая кривая степени 8 с вещественной схемой $\langle \alpha \parallel 1 \langle \beta \rangle \parallel 1 \langle \gamma \rangle \parallel 1 \langle \delta \rangle \rangle$, где β, γ, δ не равны нулю.

5.1. Комплексные ориентации. Следующая теорема является очевидным следствием теоремы 4.2.

5.1.A. Если кривая A принадлежит типу I, то вклад в число $\Pi^+ - \Pi^-$, вносимый инъективными парами с одним внешним овалом, равен ± 1 в случае, если овал охватывает нечетное число овалов, и равен 0, если он охватывает четное число овалов. ■

Сопоставление теоремы 5.1.A с формулами комплексных ориентаций 1.2.C дает следующий результат.

5.1.B. Пусть A есть $(M-i)$ -кривая (т. е. пусть $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 19 - i$), и пусть A принадлежит типу I. Если $i = 0$ или 12, то каждое из чисел β, γ, δ нечетно; если $i = 2$ или 10, то из чисел β, γ, δ два нечетны, а одно четно. ■

5.2. Вещественные схемы. Сопоставление теоремы 5.1.B с достаточными условиями 1.2.A и 1.2.B принадлежности вещественной схемы типу I дает теоремы 2.2.E и 2.2.F.

Литература

1. *Brusotti L.* Nuovi metodi costruttive di curve piane d'ordine assegnato, dotate del massimo numero di circuiti. V.— Rend. Ist. Lomb. Serie IIa, 1916, v. 49, p. 577—588.
2. *Виро О. Я.* Кривые степени 7, кривые степени 8 и гипотеза Рэгсдейл.— Докл. АН СССР, 1980, т. 254, № 6, с. 1306—1310.
3. *Hilbert D.* Mathematische Probleme.— Arch. Math. Phys., 1901, v. 3, № 1, p. 213—237.
4. *Гудков Д. А., Уткин Г. А.* Топология кривых 6-го порядка и поверхностей 4-го порядка.— Уч. зап. Горьк. ун-та, 1969, вып. 87, с. 3—213.
5. *Marin A.* Quelques remarques sur les courbes algebriques planes reelles. Preprint Orsay.
6. *Полотовский Г. М.* К задаче топологической классификации расположения овалов неособых алгебраических кривых в проективной плоскости.— Методы качественной теории дифф. уравнений, 1975, вып. 1, Горький, с. 101—128.
7. *Полотовский Г. М.* $(M-2)$ -кривые 8-го порядка и некоторые гипотезы.— Успехи матем. наук, 1981, т. 36, вып. 4, с. 235—236.
8. *Рохлин В. А.* Комплексные ориентации вещественных алгебраических кривых.— Функц. анализ, 1974, т. 8, № 4, с. 71—75.
9. *Рохлин В. А.* Комплексные топологические характеристики вещественных алгебраических кривых.— Успехи матем. наук, 1978, т. 33, вып. 5, с. 77—89.
10. *Рохлин В. А.* Новые неравенства в топологии вещественных плоских алгебраических кривых.— Функц. анализ, 1980, т. 14, № 1, с. 37—43.
11. *Фидлер Т.* Пучки прямых и топология вещественных алгебраических кривых.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1982, т. 46, № 4, с. 853—863.
12. *Harnack A.* Uber Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven.— Math. Ann., 1876, v. 10, p. 189—199.

Поступила в редакцию
15.IV.1982

Технический редактор *Т. И. Васильева*

Сдано в набор 04.07.83	Подписано к печати 22.08.83	Формат бумаги 70×108 ^{1/16}		
Высокая печать	Усл. печ. л. 21,0	Усл. кр.-отт. 35,4 тыс.	Уч.-изд. л. 18,2	Бум. л. 7,5
Тираж 1673 экз.		Зак. 4622		

Издательство «Наука». 103717, ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука». 121099, Москва, Шубинский пер., 10