РАСПОЛОЖЕНИЯ В КОРАЗМЕРНОСТИ 2 И КРАЙ

О. Я. Виро

Терминология этой заметки — дифференциально-топологическая.

1. Пусть G — абелева группа, ω — гомоморфизм группы $\mathbf{Z}$ или $\mathbf{Z}_2$ в G. Тройку (X, A, χ), состоящую из ориентированного компактного $(n+2)$-мерного многообразия X, его компактного n-мерного подмногообразия A с $\partial A = A \cap \partial X$, которое ориентировано, если ω определен на $\mathbf{Z}$, и класса $\chi \in H^1(X\setminus A;\ G)$, назовем *сцеплением типа* (G, ω) или (G, ω)-*сцеплением* (*размерности* $n+2$), если χ переводится композицией изоморфизма двойственности D: $H^1(X\setminus A;\ G) \to H_{n+1}(X,\ A \cup \partial X;\ G)$ и гомоморфизма ∂: $H_{n+1}(X, A \cup \partial X;\ G) \to H_n(A \cup \partial X, \partial X;\ G)$ в $\mathrm{inj}_*\omega_*[A]$. Пусть $\mathscr{C} = (X, A, \chi)$ — сцепление типа (G, ω). Сопоставим подгруппе H группы G с $G{:}H < \infty$ разветвленное накрытие $N_H\mathscr{C} \to X$, пополняющее главное G/H-расслоение над $X\setminus A$, характеристический класс которого служит образом класса χ при коэффициентном гомоморфизме $H^1(X\setminus A;\ G) \to H^1(X\setminus A;\ G/H)$. В $N_H\mathscr{C}$ действует G/H; это G/H-многообразие назовем *каноническим* G/H-*накрывающим сцепления* $\mathscr{C}$. Для (G, ω)-сцеплений естественно определяются край, замкнутость, кобордизмы. При переходе к каноническим накрывающим этим понятиям отвечают одноименные понятия категории G/H-многообразий. Специальные пары [4] (в частности, ориентированные зацепления) однозначно дополняются до $(\mathbf{Z}, \mathrm{id})$-сцеплений; канонические накрытия специальной пары и соответствующего $(\mathbf{Z}, \mathrm{id})$-сцепления совпадают.

2. Тройка, состоящая из конечнопорожденного свободного R-модуля $\mathscr{V}$, где R есть $\mathbf{Q}$ или $\mathbf{Z}$, билинейной $\pm$-симметрической формы q: $\mathscr{V} \times \mathscr{V} \to R$ и представления группы G изометриями формы q, называется G-формой над R. Действуя как в [4] (где $G = \mathbf{Z}$), можно построить группу кобордизмов ε-симметрических G-форм над $\mathbf{Q}$ с $\varepsilon = \pm 1$; обозначим ее через $\Lambda_\varepsilon G$. Для произвольной подгруппы U группы $\Lambda_\varepsilon G$ обозначим фактор-группу $(\Lambda_\varepsilon G)/U$ через $\mathrm{D}U$; для $\alpha \in \mathrm{D}U$ положим $r\alpha = \min\ \{\dim(\mathscr{V} \mid (\mathscr{V}, q, T)) \in \psi \in \Lambda_\varepsilon G,\ \alpha = U + \psi\}$. С ориентированным компактным $2k$-мерным G-многообразием X связана G-форма, определяемая индексом пересечения $\circ$: $H_k(X;\ \mathbf{Q}) \times H_k(X;\ \mathbf{Q}) \to \mathbf{Q}$; обозначим ее класс в $\Lambda_{\varepsilon(k)} G$ с $\varepsilon(k) = (-1)^k$ через φX. Обозначим через $\mathrm{Cl}_k(G, \omega, H)$ подгруппу группы $\Lambda_{\varepsilon(k)}(G/H)$, образованную значениями φ на канонических G/H-накрывающих замкнутых $2k$-мерных (G, ω)-сцеплений. Для кобордантных замкнутых $(2k-1)$-мерных (G, ω)-сцеплений $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$ определим $\delta_H(\mathscr{C}_0, \mathscr{C}_1) \in \mathrm{DCl}_k(G, \omega, H)$ как класс элемента $\varphi N_H\mathscr{C}$, где $\mathscr{C}$ — сцепление с $\partial\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \cup (-\mathscr{C}_0)$.

3. Пусть $G{:}\ H = p^n$ и $G{:}\ H + \mathrm{Im}\ \omega = p^m$, где p — простое число. 1°. *Если* $\mathscr{C}_0 = (X_0, A_0, \chi_0)$, $\mathscr{C}_1 = (X_1, A_1, \chi_1)$ — *замкнутые* $(2k-1)$-*мерные* (G, ω)-*сцепления*, $\mathscr{C} = (X, A, \chi)$ — *кобордизм между ними, то*

$$\begin{aligned} p^m \dim H_k(X, X_0;\ \mathbf{Z}_p) + (p^n - p^m)\dim H_k(X,\ A \cup X_0;\ \mathbf{Z}_p) \geqslant r\delta_H(\mathscr{C}_0, \mathscr{C}_1) + \\ + \max\{0, \dim H_k(N_H\mathscr{C}_0;\ \mathbf{Q}) - \dim H_k(N_H\mathscr{C}_1;\ \mathbf{Q}) - \\ - p^m \dim H_{k+1}(X, X_0;\ \mathbf{Z}_p) - (p^n - p^m)\dim H_{k+1}(X,\ A \cup X_0;\ \mathbf{Z}_p)\}. \end{aligned}$$

2°. *Если замкнутое* $(2k-1)$-*мерное* (G, ω)-*сцепление* $\mathscr{C}_0$ *вложено в замкнутое* $2k$-*мерное* (G, ω)-*сцепление* $\mathscr{C} = (X, A, \chi)$ *и разбивает его на сцепления* $\mathscr{C}_+$, $\mathscr{C}_-$ *с* $\partial\mathscr{C}_+ = -\partial\mathscr{C}_- = \mathscr{C}_0$, *то* $p^m \dim H_k(X;\ \mathbf{Z}_p) + (p^n - p^m)\dim H_k(X, A;\ \mathbf{Z}_p) \geqslant 2r\delta_H(\mathscr{C}_0, \varnothing)$.

4. Обозначим через $\mathrm{S}G$ подгруппу группы Λ_+G, образованную классами естественных расширений неособых G-форм над $\mathbf{Z}$. Очевидно, $\mathrm{Cl}_k(G, \omega, H) \subset \mathrm{S}(G/H)$ для $k \in 2\mathbf{Z}$; пусть s: $\mathrm{DCl}_k(G, \omega, H) \to \mathrm{DS}(G/H)$ — проекция. Поскольку $r\alpha \geqslant rs\alpha$ для $\alpha \in \mathrm{DCl}_k(G, \omega, H)$, в п. 3 можно заменить δ на $s\delta$.

5. Конечная абелева группа $\mathscr{G}$ с неособой билинейной симметрической формой $\mathscr{G} \times \mathscr{G} \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ называется V-группой [1]. С ориентированным замкнутым $(4k-1)$-мерным многообразием X связана V-группа, определяемая коэффициентами зацепления $\mathrm{Tors}\ H_{2k-1}(X) \times \mathrm{Tors}\ H_{2k-1}(X) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Назовем V-группы $(\mathscr{G}_0, V_0)$, $(\mathscr{G}_1, V_1)$ *кобордантными*, если V-группа $(\mathscr{G}_1 \oplus \mathscr{G}_0,\ V_1 \oplus (-V_0))$ содержит самоаннулятор K с $\mathscr{G}_1 \oplus \mathscr{G}_0$:

$K = | K |$. Кобордантность V-групп — эквивалентность, и классы кобордантных V-групп образуют группу по ортогональному суммированию; обозначим ее через $\mathfrak{B}$. Любая билинейная симметрическая форма q: $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbf{Z}$ естественно определяет (см. [5], [1]) V-группу (Tors Coker Aq, V), где Aq: $\mathcal{V} \to \mathrm{Hom}(\mathcal{V}, \mathbf{Z})$ — гомоморфизм, определяемый формулой $Aq(v_1)(v_2) = q(v_1, v_2)$. Обозначим эту V-группу через $\partial(\mathcal{V}, q)$. Любая V-группа представляется как $\partial(\mathcal{V}, q)$ (см. [5]). Если X — ориентированное компактное $4k$-мерное многообразие, то V-группа его края кобордантна (а если Tors $H_{2k-1}(X) = 0$, то и изоморфна) V-группе $\partial(H_{2k}(X), \circ)$. Расширения форм $(\mathcal{V}_0, q_0)$, $(\mathcal{V}_1, q_1)$ над $\mathbf{Z}$ до форм над $\mathbf{Q}$ определяют один элемент группы DS(1), если и только если V-группы $\partial(\mathcal{V}_0, q_0)$, $\partial(\mathcal{V}_1, q_1)$ кобордантны. Этим определяется изоморфизм d: DS(1) $\to \mathfrak{B}$. Если $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$ — сцепления типа (G, ω) и $\alpha_i \in \mathfrak{B}$ — класс V-группы многообразия $N_H\mathscr{C}_i$, то $f_s\delta_H(\mathscr{C}_0, \mathscr{C}_1) = d^{-1}(\alpha_1 - \alpha_0)$.

6. Имеется изоморфизм t: $\mathrm{DCl}_k(\mathbf{Z}, \mathrm{id}, m\mathbf{Z}) \to \mathrm{DCl}_k(\mathbf{Z}, \mathrm{id}, \mathbf{Z}) \oplus \Lambda'_{(-1)^k}\mathbf{Z}_m$, где $\Lambda'_\varepsilon\mathbf{Z}_m$ — подгруппа группы $\Lambda_\varepsilon\mathbf{Z}_m$, образованная классами $\mathbf{Z}_m$-форм, не имеющих неподвижных векторов. Если $\mathscr{C}_0 = (X_0, A_0, \chi_0)$, $\mathscr{C}_1 = (X_1, A_1, \chi_1)$ — сцепления типа $(\mathbf{Z}, \mathrm{id})$, то $t\delta_m\mathbf{Z}(\mathscr{C}_0, \mathscr{C}_1) = (\delta_{\mathbf{Z}}(\mathscr{C}_0, \mathscr{C}_1), \tau_m\mathscr{C}_1 - \tau_m\mathscr{C}_0)$, где $\tau_m\mathscr{C}_i$ — класс $\mathbf{Z}_m$-формы спаривания Зайферта пары (X, F_i) с F_i, реализующим класс $D\chi_i \in H_{n+1}(X, A_i)$ (см. [4]). Для $(\mathbf{Z}, \mathrm{id})$-сцеплений теорема 1° п. 3 обобщает и усиливает [2], Th 9.1. Следствие теоремы 2° п. 3: *если $l \subset S^3$ — гиперплоское сечение ориентированной гладкой замкнутой поверхности $A \subset S^4$, то* $|\sigma l| \leqslant gA$ (это обобщает [2], Th 8.8). Следствие теоремы 1° п. 3 для $(\mathbf{Z}_2, \mathrm{id})$-сцеплений: *на узел 4_1 нельзя натянуть гладкую ленту Мёбиуса в D^4.*

7. Теорема Атьи — Зингера дает оценки снизу для r на $\mathrm{DCl}_k(\mathbf{Z}_m, \mathrm{pr}\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_m, 0)$, например:

$$r\alpha \geqslant \min \{ | \sigma q - m\sigma(q \mid \mathrm{Fix}\, T) - k(m^3 - m)/3 | \mid k \in \mathbf{Z} \}/(m+1)$$

для $(\mathcal{V}, q, T) \in \alpha \in \mathrm{DCl}_2(\mathbf{Z}_m, \mathrm{pr}, 0)$ (ср. [3], (19)).

8. *Если X — ориентированное замкнутое 4-мерное многообразие, $\xi \in H_2(X)$ реализуется поверхностью A с особенностью типа k и $2 \mid \xi$, то* $2gA \geqslant | \xi\xi/2 - \sigma X + \sigma k | - \dim H_2(X; \mathbf{Z}_2)$.

Это обобщает теорему Рохлина [3]. В случае $p \mid \xi$ имеется аналогичное неравенство.

ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Kneser, D. Puppe, Quadratische Formen und Verschlingungsinvarianten von Knoten, Math. Z. 58 (1953), 376—384.

[2] K. Murasugi, On a certain numerical invariant of link types, Trans. Amer. Math. Soc. **117**:5 (1965), 387—422.

[3] В. А. Рохлин, Двумерные подмногообразия четырехмерных многообразий, Функц. анализ 5:1 (1971), 48—60.

[4] О. Я. Виро, Разветвленные накрытия многообразий с краем и инварианты зацеплений. I, Изв. АН, сер. матем. 37:6 (1973), 1242—1259.

[5] C. T. C. Wall, Quadratic forms on finite groups and related topics, Topology 2:4 (1963), 281—298.

Поступило в Правление общества 1 апреля 1974 г.