Parte II

Teoria das transformações lineares 1

Capítulo 4

Transformações lineares

No[1] Capítulo 4 denotamos de E, F espaços vetoriais

$$E = (E, +, \cdot, \mathbb{K}), \qquad F = (F, +, \cdot, \mathbb{K})$$

ambos sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$. Na primeira leitura pense em $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. As letras m, n denotam números naturais ou zero.

4.1 Exemplos e construção

Definição 4.1.1. Uma **transformação linear (TL)**, também chamado de **homomorfismo de espaços vetoriais** ou **operador linear**, é uma aplicação

$$A : E \to F, \quad v \mapsto A(v) =: Av$$

a qual preserva as operações em E e F, ou seja

$$\text{(Linearidade)} \qquad \begin{cases} A(\alpha v) = \alpha A v \\ A(v + w) = Av + Aw \end{cases} \tag{4.1.1}$$

para todos os escalares $\alpha \in \mathbb{K}$ e todos os vetores $v, w \in E$. Note-se que nos lados esquerdos aparecem as operações em E e nos lados direitos aquelas em F.

Como indicado acima vamos escrever no caso de aplicações lineares geralmente Av em vez de $A(v)$. Assim Av já sinaliza que A é linear. Note-se que

$$\text{(Linearidade)} \quad \Leftrightarrow \quad A(\alpha u + \beta v) = \alpha A u + \beta A v, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u, v \in E.$$

Lema 4.1.2. *Seja $A : E \to F$ uma TL. Então*

(i) $A\mathcal{O} = \mathcal{O}$ *(leva o vetor nulo de E no vetor nulo de F)*

(ii) $A(-v) = -(Av)$ *(leva inversos em inversos)*

[1] Cap. 4 de MA327 2021-2, autor Joa Weber, atualizado: 25 de março de 2024

(iii) $A(u - v) = Au - Av$

(iv) $A(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 A v_1 + \cdots + \alpha_k A v_k$ *(leva CLs em CLs)*

para todos os vetores $u, v, v_i \in E$ e escalares $\alpha_i \in \mathbb{K}$.

Demonstração.
(i) $A\mathcal{O} = A(\mathcal{O} + \mathcal{O}) \overset{\text{linear}}{=} A\mathcal{O} + A\mathcal{O}$, então $A\mathcal{O} = \mathcal{O}$ segundo Lema 1.1.5 3b).
(ii) $A(-v) + Av \overset{\text{linear}}{=} A(-v + v) = A\mathcal{O} \overset{\text{(i)}}{=} \mathcal{O}$.
(iii) $A(u - v) \overset{\text{linear}}{=} Au + A(-v) \overset{\text{(ii)}}{=} Au - Av$.
(iv) Indução sobre k baseado na linearidade. □

Exercício 4.1.3. Considere os elementos de $\mathbb{R}^2$ dados por

$$u_1 = (2, -1), \qquad u_2 = (1, 1), \qquad u_3 = (-1, -4),$$

e

$$v_1 = (1, 3), \qquad v_2 = (2, 3), \qquad v_3 = (5, 6).$$

Decida se existe ou não uma transformação linear $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$Au_1 = v_1, \qquad Au_2 = v_2, \qquad Au_3 = v_3.$$

Solução. Suponha que A é linear. Então escrevendo u_3 como CL de u_1 e u_2, ou seja $u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2$, o elemento $v_3 = Au_3$ deve ser CL de $v_1 = Au_1$ e $v_2 = Au_2$ com os mesmos coeficientes. Com efeito

$$v_3 = Au_3 = A(\alpha u_1 + \beta u_2) \overset{\text{lin.}}{=} \alpha A u_1 + \beta A u_2 = \alpha v_1 + \beta v_2.$$

Então vamos checar se é verdadeiro isso: Determinamos α e β primeiro

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} = u_3 = \alpha u_1 + \beta u_2 = \begin{bmatrix} 2\alpha \\ -\alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha + \beta \\ -\alpha + \beta \end{bmatrix}.$$

Comparando os primeiros membros obtemos $\beta = -1 - 2\alpha$. Use isso na comparação dos segundos membros para obter $\alpha = \beta + 4 = -1 - 2\alpha + 4 = 3 - 2\alpha$. Assim $\alpha = 1$ e $\beta = -3$. Basta calcular

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = v_3.$$

Então não existe uma tal transformação linear A.

Exercício 4.1.4. Mesma pergunta como no Exercício 4.1.3 mas a) com $v_3 = (-5, -6)$ e b) com $v_3 = (5, -6)$.

Exemplo 4.1.5 (Derivação e convolução)**.**

(Derivação) Seja $k \in \mathbb{N}$ ou $k = \infty$, então é linear o operador derivada

$$D \colon C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f \mapsto f' := \frac{d}{dx} f.$$

(Convolução) Dada uma função contínua $k\colon [a,b]\times[a,b]\to\mathbb{R}$, Seja $k\in\mathbb{N}$ ou $k=\infty$, então é linear o operador definido por

$$K\colon C^0([a,b],\mathbb{R})\to C^0([a,b],\mathbb{R}),\quad f\mapsto\int_a^b k(\cdot,y)f(y)\,dy.$$

No caso particular $k(x,y)=g(x-y)$ onde $g\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ é uma dada função contínua o operador K_g definido por

$$(K_g f)(x) := \int_a^b g(x-y)f(y)\,dy$$

é chamado de **convolução** das funções f e g, notação $f*g := K_g f$.

4.1.1 O espaço vetorial das transformações lineares

Definição 4.1.6 (O espaço vetorial $\mathcal{L}(E,F)$)**.** O conjunto

$$\mathcal{L}(E,F) := \{A \mid A : E\to F \text{ transformação linear}\}$$

de todas as transformações lineares entre E e F seja munido das operações

$$\begin{aligned} + : \mathcal{L}(E,F)\times\mathcal{L}(E,F) &\to \mathcal{L}(E,F) \qquad & \cdot : \mathbb{K}\times\mathcal{L}(E,F) &\to \mathcal{L}(E,F)\\ (A,B) &\mapsto A+B & (\alpha,A) &\mapsto \alpha A\end{aligned}$$

definidas assim $(A+B)v := Av+Bv$ e $(\alpha A)v := \alpha(Av)$.

Note que $A+B, \alpha A : E\to F$ realmente são lineares. Por exemplo, vale

$$(\alpha A)(v+w) \overset{\text{def.}}{=} \alpha(A(v+w)) \overset{\text{lin.}}{=} \alpha(Av+Aw) \overset{\text{distr.}}{=} \alpha(Av)+\alpha(Aw)$$

e o lado direito é $(\alpha A)v + (\alpha A)w$ pela definição de αA.

Lema 4.1.7. *O conjunto $\mathcal{L}(E,F)$ das transformações lineares de E para F munido das operações '+' e '·' forma um espaço vetorial*

$$\mathcal{L}(E,F) = (\mathcal{L}(E,F),+,\cdot,\mathbb{K})$$

sobre o corpo $\mathbb{K}$. O vetor nulo de $\mathcal{L}(E,F)$ é a TL nula $\mathcal{O} : E\to F$, $v\mapsto\mathcal{O}$.[2]

Demonstração. Deixamos ao leitor verificar os axiomas na Definição 1.1.19. □

Definição 4.1.8 (Operadores lineares em E)**.** No caso $F=E$ os elementos de $\mathcal{L}(E) := \mathcal{L}(E,E)$ são chamados de **operadores lineares em *E*** e o operador

$$I = I_E : E\to E,\quad v\mapsto v \tag{4.1.2}$$

é chamado de **operador identidade** em E.

[2] o primeiro $\mathcal{O}$ é $\mathcal{O}_{\mathcal{L}(E,F)}$ e o outro $\mathcal{O}_F$; para legibilidade não escrevemos demais subscritos

4.1.2 Isomorfismos

Isomorfismo e inversa serão tratados com mais detalhes na Seção 6.4.

Definição 4.1.9 (Isomorfismo)**.** Um **isomorfismo** entre espaços vetoriais E e F é uma transformação linear (homomorfismo) $T: E \to F$ tal que a aplicação

$$T: E \to F \text{ é } \textbf{bijetiva} \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \textbf{injetiva} & :\Leftrightarrow \quad Tu = Tv \Rightarrow u = v \\ \text{e} & \\ \textbf{sobrejetiva} & :\Leftrightarrow \quad \forall v \in F \; \exists u \in E\colon \; Tu = v \end{cases}$$

Se existe um isomorfismo entre E e F dizemos "E e F são **isomorfos**" e escrevemos $E \simeq F$, ou ainda $E \overset{T}{\simeq} F$ para destacar quem é o isomorfismo.

Definição 4.1.10 (Inversa)**.** Uma transformação linear $A\colon E \to F$ é chamado de **invertível** caso existe uma transformação linear $B\colon F \to E$ tal que valem as duas condições $AB = I_F$ e $BA = I_E$. Neste caso B é único e chamado **a inversa** de A, símbolo $A^{-1} := B$.

Comentário 4.1.11. Dado um isomorfismo $T: E \to F$, definimos a aplicação

$$S: F \to E, \quad f \mapsto v$$

onde $v \in E$ é o único vetor tal que $Tv = f$; encontraremos em (6.4.1). Pode checar que S é linear e bijetiva, ou seja um isomorfismo, e que S é a inversa de T.

A composição BA de dois isomorfismos é um isomorfismo e sua inversa é a composição das inversas – mas na ordem oposta

$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}. \tag{4.1.3}$$

4.1.3 Construção de transformações lineares

Uma base **ordenada** é uma base $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ cujos elementos são enumerados, alternativamente escreve-se na forma de uma lista ordenada $(\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Proposição 4.1.12. *A fim de definir um homomorfismo $A \in \mathcal{L}(E, F)$ basta escolher as imagens de uma base (ordenada) $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ de E:*

Existência. *Escolha uma lista $f := (f_1, \dots, f_n)$ de $n := \dim E$ elementos f_j do contra-domínio F, repetições não excluídas, e defina*

$$A_f \xi_j := f_j, \qquad j = 1, \dots, n. \tag{$*_f$}$$

Então extende A_f ao E inteiro usando (Linearidade): Dado $u \in E$, exprime u em respeito à base $\mathcal{B}$ na forma $u = \sum_{j=1}^n \alpha_j \xi_j$ onde os escalares α_j são únicas – são as chamadas coordenadas do vetor u, veja (3.1.1). Defina

$$A_f u := \sum_{j=1}^n \alpha_j f_j \overset{(*_f)}{=} \sum_{j=1}^n \alpha_j A_f \xi_j. \tag{4.1.4}$$

Unicidade. *Se $B \in \mathcal{L}(E, F)$ satisfaz $(*_f)$, levando os ξ_j nos f_j, então $B = A_f$.*

Demonstração. Deixamos ao leitor a tarefa simples de checar que A_f definido acima é linear, ou seja $A_f \in \mathcal{L}(E,F)$, e é unicamente determinado por $(*_f)$. $\square$

Note-se que A_f não só depende da escolha dos elementos f_j de F, mas também da escolha da base $\mathcal{B}$ de E. Por isso às vezes escrevemos

$$A_f^{\mathcal{B}} = A_f.$$

Exercício 4.1.13. Mostre: os membros da lista $f = (f_1, \ldots, f_n) \in F^{\times n}$

a) são vetores LI $\Leftrightarrow$ A_f é injetivo ;

b) geram o espaço vetorial F $\Leftrightarrow$ A_f é sobrejetivo;

c) formam uma base de F $\Leftrightarrow$ A_f é um isomorfismo (e $\dim E = \dim F$).

Teorema 4.1.14. *Seja* $\dim F$ *finita e* $\mathcal{B} = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ *uma base de* E*, então*

$$\begin{aligned} \Psi = \Psi_{\mathcal{B}} : F^{\times n} &\to \mathcal{L}(E,F) \\ f &\mapsto A_f \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

é um isomorfismo. Lembre-se de $(*_f)$ *que* A_f *é determinado por* $A_f\xi_j := f_j$.

Demonstração. Segundo Proposição 4.1.12 é suficiente avaliar TLs numa base. LINEAR. Segue de $A_{\alpha f+\beta g}\xi_j := (\alpha f + \beta g)_j = \alpha f_j + \beta g_j =: \alpha A_f \xi_j + \beta A_g \xi_j$. INJETIVO. Suponha $A_f = A_g$. Então $f_j =: A_f\xi_j = A_g\xi_j := g_j$ para todos os j. SOBREJETIVO. Dado $B \in \mathcal{L}(E,F)$, defina $f_j := B\xi_j$, $\forall j$. Assim $A_f = B$. $\square$

Lembre-se do Exercício 3.0.15 que $\dim F^{\times n} = n \dim F$. Vamos ver no futuro, em Corolário 6.4.9, que isomorfismos preservam dimensões – o que implica

Corolário 4.1.15. $\dim \mathcal{L}(E,F) = \dim F^{\times n} = \dim E \cdot \dim F$.

Exercício 4.1.16. Mostre que $\dim \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \dim \mathrm{M}(m \times n)$. Dado um corpo $\mathbb{K}$, então vale analogamente que $\dim \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) = \dim \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K})$.

Comentário 4.1.17 (Extensão de TLs)**.** Suponha que em vez de uma base de E só temos um subconjunto LI $\mathcal{U} \subset E$ de k elementos $\mathcal{U} = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$, em particular $k = |\mathcal{U}| \le \dim E =: n$. Note-se que $\mathcal{U}$ é uma base do subespaço $\langle \mathcal{U} \rangle$ gerado por $\mathcal{U}$. Seja $f = (f_1, \ldots, f_k) \in F^{\times k}$ uma lista com $k := \dim\langle \mathcal{U} \rangle = |\mathcal{U}|$ membros. Proposição 4.1.12 diz que isso determina unicamente uma TL injetiva

$$A_f^{\mathcal{U}} : E \supset \langle \mathcal{U} \rangle \to F, \quad A_f^{\mathcal{U}}\xi_j := f_j \qquad (j = 1, \ldots, k).$$

Então existe uma transformação linear

$$A_{\tilde{f}}^{\widetilde{\mathcal{U}}} : E \to F$$

extendendo $A_f^{\mathcal{U}}$, ou seja $A_{\tilde{f}}^{\widetilde{\mathcal{U}}}$ restrito a $\langle \mathcal{U} \rangle$ é $A_f^{\mathcal{U}}$. Para construir a extensão 1) estende-se o conjunto LI $\mathcal{U}$ a uma base $\mathcal{B}$ de E usando o Teorema 3.2.1 (b) e 2) apensa-se à lista f mais $n - k$ membros.

4.1.4 O espaço dual

Definição 4.1.18 (O espaço dual E^*)**.** No caso $F = \mathbb{K}$ o espaço $E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ é chamado de **espaço dual** de E. Chama-se os elementos $\phi \in E^*$ de **funcionais $\mathbb{K}$-lineares** em E ou, no caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, **funcionais lineares**.

Definição 4.1.19 (A base dual $\mathcal{B}^*$)**.** Na dimensão finita uma base ordenada $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ de E induz uma base de E^*,[3] a chamada **base dual** $\mathcal{B}^* := \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$. Como transformação linear, cada um membro $\phi_i : E \to \mathbb{K}$ é determinado pelos valores numa base (Proposição 4.1.12) e a escolha seja essa

$$\phi_i(\xi_j) := \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases} \tag{4.1.6}$$

onde chama-se δ_{ij} o **símbolo de Kronecker**. Equivalentemente

$$\phi_i(\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n) := \alpha_i \tag{4.1.7}$$

para $i = 1, \dots, n$. Note-se que $\dim E = n = \dim E^*$.

Lema 4.1.20. *A base dual $\mathcal{B}^* = \{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ é base de E^* e $\dim E^* = \dim E$.*

Demonstração. Bem definida: Deixamos ao leitor verificar que os membros $\phi_i \colon E \to \mathbb{R}$ definidos por (4.1.7) são lineares. Gera: Dado $\psi \in E^*$, denotamos as imagens dos membros ξ_i da base $\mathcal{B}$ de $\beta_i := \psi \xi_i$, então $\beta_1 \phi_1 + \dots \beta_n \phi_n = \psi$. Com efeito, escrevendo $E \ni v = \alpha_1 \xi_1 + \dots, \alpha_n \xi_n$ como CL na base $\mathcal{B}$, obtemos

$$\begin{aligned} \psi(v) &= \psi(\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n) \\ &= \alpha_1 \psi(\xi_1) + \dots + \alpha_n \psi(\xi_n) \\ &= \alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n \\ &= \phi_1(v) \beta_1 + \dots + \phi_n(v) \beta_n \\ &= (\beta_1 \phi_1 + \dots + \beta_n \phi_n)\, v. \end{aligned}$$

LI: Suponha que $\beta_1 \phi_1 + \dots + \beta_n \phi_n = \mathcal{O}$. Segundo (4.1.6), avaliando no vetor ξ_1 obtemos $\beta_1 = 0$, avaliando em $\xi_2, \dots, \xi_n$ obtemos $\beta_2 = 0, \dots, \beta_n = 0$. □

Exercício 4.1.21. A expressão geral de um funcional linear $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é

$$\phi(x, y, z) = ax + by + cz$$

onde a, b, c são números reais determinando ϕ. Dados os elementos

$$u = (1, 2, 3), \qquad v = (-1, 2, 3), \qquad w = (1, -2, 3),$$

de $\mathbb{R}^3$ determine a, b, c de tal modo que se tenha $\phi u = 1$, $\phi v = 0$ e $\phi w = 0$.[4]

[3] Errado na dimensão infinita. Porque? Relembre-se que CL's são somas *finitas*.

[4] A resposta para seu controle: $a = -\frac{1}{2}$, $b = \frac{1}{4}$, $c = 0$.

Exemplo 4.1.22 (Funcionais lineares $\varphi, \psi \in E^*$)**.** Seja $E = C^0([a,b])$ o espaço vetorial real[5] das funções contínuas $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ neste intervalo.

(Integração) A função $\varphi : E \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(f) := \int_a^b f(x)\, dx$$

é linear e assim $\varphi \in E^*$.

(Avaliação) Dado um ponto $x_0 \in [a,b]$, a função $\psi : E \to \mathbb{R}$ definida por

$$\psi(f) := f(x_0)$$

é linear e assim $\psi \in E^*$.

4.2 Matrizes

Matrizes são transformações lineares

Para ver isso escolhemos uma matriz $\mathbf{a} \in \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K})$ e consideramos a aplicação

$$\mathbf{a}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m, \quad x \mapsto \mathbf{a}x$$

a qual leva uma lista $x \in \mathbb{K}^m$ para a lista definida pelo produto matriz

$$\mathbf{a}x = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}.$$

Lembrando a notação $\mathbf{a}_{\bullet j}$ para colunas introduzido em (1.2.3), continuamos

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_{\bullet 1}} x_1 + \dots + \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}_{\bullet n}} x_n =: (\mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet n}) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{4.2.1}$$

No último passo definimos uma nova notação a qual vai ser bem útil. O símbolo que usamos quer lembrar o produto matriz, para não precisamos memorizar mais uma fórmula. Na nova notação é facil ver que $\mathbf{a}(\alpha x + \beta y) = \alpha\mathbf{a}x + \beta\mathbf{a}y$ mostrando que $\mathbf{a}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ é linear, então $\mathbf{a} \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$.

[5] 'real' indica que o corpo são os números reais $\mathbb{R}$

Comentário 4.2.1 (Espaço-coluna e -linha)**.** A imagem de uma matriz

$$\mathrm{Im}(\mathbf{a}) := \{\mathbf{a}x \mid x \in \mathbb{K}^n\} = \text{Esp-col}(\mathbf{a}) \subset \mathbb{K}^m, \qquad \mathbf{a} \in \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K}) \tag{4.2.2}$$

é igual ao espaço-coluna como (4.2.1) mostra. Como Esp-col($\mathbf{a}$) e Esp-lin($\mathbf{a}$) são fechados sob adição e multiplicação, são subespaços de $\mathbb{K}^m$ e $\mathbb{K}^n$. As dimensões

$$\mathrm{pc}(\mathbf{a}) := \dim \text{Esp-col}(\mathbf{a}) = \dim \mathrm{Im}(\mathbf{a}), \qquad \mathrm{pl}(\mathbf{a}) := \dim \text{Esp-lin}(\mathbf{a}), \tag{4.2.3}$$

são chamadas de **posto-coluna** e **posto-linha** da matriz $\mathbf{a}$.

Teorema 4.2.2 (Postos linha e coluna são iguais)**.** $\mathrm{pl}(\mathbf{a}) = \mathrm{pc}(\mathbf{a}) = \dim \mathrm{Im}(\mathbf{a})$

Demonstração. Seja $\mathbf{a}$ uma matriz $m \times n$. '$\le$' Seja $p := \mathrm{pc}(a)$ a dimensão do espaço coluna e $\mathcal{X} = \{\xi_1, \dots, \xi_p\}$ uma base ordenada dele. Usamos a notação

$$\xi_\ell = \begin{bmatrix} b_{1\ell} \\ \vdots \\ b_{m\ell} \end{bmatrix}$$

Assim cada uma coluna $\mathbf{a}_{\bullet j}$ é CL em $\mathcal{X}$ com coeficientes únicos $c_{ij} \in \mathbb{K}$, ou seja

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} =: \mathbf{a}_{\bullet j} = \xi_1 c_{1j} + \dots + \xi_p c_{pj} = \sum_{\ell=1}^{p} \xi_\ell c_{\ell j} = \begin{bmatrix} \sum_{\ell=1}^{p} b_{1\ell} c_{\ell j} \\ \vdots \\ \sum_{\ell=1}^{p} b_{m\ell} c_{\ell j} \end{bmatrix}$$

Isso mostra que a ij-ésima entrada da matriz $\mathbf{a}$ é dada por

$$a_{ij} = \sum_{\ell=1}^{p} b_{i\ell} c_{\ell j}$$

Usamos esta fórmula para ver que a i-ésima linha

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{i\bullet} = \begin{bmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sum_{\ell=1}^{p} b_{i\ell} c_{\ell 1} & \dots & \sum_{\ell=1}^{p} b_{i\ell} c_{\ell n} \end{bmatrix} \\ &= \sum_{\ell=1}^{p} b_{i\ell} \underbrace{\begin{bmatrix} c_{\ell 1} & \dots & c_{\ell n} \end{bmatrix}}_{=:\eta_\ell \in \text{Esp-lin}(\mathbf{a})} \end{aligned}$$

é CL das listas $\eta_1, \dots, \eta_p$ de n escalares cada uma. Assim Esp-lin($\mathbf{a}$) é contido no subespaco Y gerado pelo conjunto $\mathcal{Y} := \{\eta_k \mid k = 1, \dots, p\}$. Note que $\mathcal{Y}$ contém no máximo p elementos ($< p$ no caso de dobros). Assim

$$\mathrm{pl}(\mathbf{a}) := \dim \text{Esp-lin}(\mathbf{a}) \le \dim Y \le |\mathcal{Y}| \le p =: \mathrm{pc}(\mathbf{a})$$

A primeira desigualdade segue de Teorema 3.2.1 (c) e a segunda de Lema 3.1.20. '$\ge$' Usando '$\le$' para a transposta obtemos $\mathrm{pc}(\mathbf{a}) = \mathrm{pl}(\mathbf{a}^t) \le \mathrm{pc}(\mathbf{a}^t) = \mathrm{pl}(\mathbf{a})$. $\square$

Acima temos verificado que cada uma matriz $m \times n$ é uma transformação linear $\mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. E vice versa?
Escreve as colunas de uma matriz $\mathbf{a}$ como lista, ou seja $f_{\mathbf{a}} = (\mathbf{a}_{\bullet 1}, \dots, \mathbf{a}_{\bullet n})$. Agora considere o operador linear $A^{\mathcal{E}^n}_{f_{\mathbf{a}}}$ definido em (4.1.4) e defina a aplicação

$$\mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K}) \to \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m), \quad \mathbf{a} \mapsto A^{\mathcal{E}^n}_{f_{\mathbf{a}}} \tag{4.2.4}$$

onde $\mathcal{E}^n = \{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canónica de $\mathbb{K}^n$. Note que $A^{\mathcal{E}^n}_{f_{\mathbf{a}}} = \mathbf{a}$, com efeito

$$A^{\mathcal{E}^n}_{f_{\mathbf{a}}} e_i \overset{(*_{f_{\mathbf{a}}})}{=} \mathbf{a}_{\bullet i} = \mathbf{a} e_i, \qquad i = 1, \dots, n$$

e então lembre-se de UNICIDADE em Proposição 4.1.12.
Como a aplicação $\mathbf{a} \mapsto \mathbf{a}$ é obviamente linear e injetivo, só falta sobrejetivo para ser um isomorfismo. Dado $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, coloque as listas $Ae_1, \dots, Ae_n \in \mathbb{K}^m$ como colunas de uma matriz, notação $[A]$.[6] O leitor pode verificar que esta matriz $[A]$ é levado ao operador A, em símbolos $A^{\mathcal{E}^n}_{f_{[A]}} = A$. Isso prova sobrejetividade.[7] Deixa nos formalizar esta ideia no seguinte.

Transformações lineares representadas como matrizes

Como temos visto acima uma transformação linear $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ corresponde naturalmente, utilizando as bases canônicas[8]

$$\mathcal{E}^n = \{e_1, \dots, e_n\}, \qquad \mathcal{E}^m = \{E_1, \dots, E_m\},$$

a uma matriz $[A] \in \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K})$. Com efeito, seja $[Ae_i]_{\mathcal{E}^m} \in \mathrm{M}(m \times 1; \mathbb{K})$ o vetor coordenada do elemento $Ae_i \in \mathbb{K}^m$, veja (3.1.2). Usando estes vetores coordenadas como colunas de uma matriz obtém-se

$$[A] = [A]_{\mathcal{E}^n, \mathcal{E}^m} := [[Ae_1]_{\mathcal{E}^m} \dots [Ae_n]_{\mathcal{E}^m}] \quad \in \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K})$$

chamado de **matriz da transformação linear $A\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ em respeito às bases canônicas**.

O caso geral de associar uma matriz $\mathbf{a}$ a uma transformação linear $A\colon E \to F$ entre espaços vetoriais munidos de bases ordenadas $\mathcal{U} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ e $\mathcal{V} = \{\eta_1, \dots, \eta_m\}$ vai ser investigado em grande detalhe na Seção 5. Sim, as colunas de esta matriz serão os vetores coordenadas (3.1.2), com efeito vamos definir

$$\mathbf{a} = [A]_{\mathcal{U}, \mathcal{V}} := [[A\xi_1]_{\mathcal{V}} \dots [A\xi_n]_{\mathcal{V}}] \quad \in \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K}).$$

Proposição 4.2.3. *A aplicação entre espaços vetoriais definido por*

$$\begin{aligned} [\cdot] = [\cdot]_{\mathcal{E}^n, \mathcal{E}^m} : \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) &\to \mathrm{M}(m \times n; \mathbb{K}) \\ A &\mapsto [[Ae_1]_{\mathcal{E}^m} \dots [Ae_n]_{\mathcal{E}^m}] \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

é um isomorfismo entre espaços vetoriais.

[6] Verifique que os membros da lista Ae_i são as entradas do vetor coordenada $[Ae_i]_{\mathcal{E}^m}$.

[7] Alternativamente, vamos ver em mais em frente que, como as dimensões são iguais e finito, injetividade de uma TL é equivalente a sobrejetividade (Corolário 6.5.2).

[8] Para evitar confusão usamos letras maiúsculas para os elementos de $\mathcal{E}^m = \{E_1, \dots, E_m\}$.

Demonstração. Checar linearidade é rotina. *Injetivo.* Se as matrizes $[A] = [B]$ são iguais, os vetores coordenadas $[Ae_i]_{\mathcal{E}^m} = [Be_i]_{\mathcal{E}^m}$ são iguais, e assim as imagens $Ae_i = Be_i$ dos elementos da base são iguais. Assim $A = B$ segundo unicidade em Proposição 4.1.12. *Sobrejetivo.* Dado uma matriz $\mathbf{a}$, então a matriz do operador $A^{\mathcal{E}^n}_{f_{\mathbf{a}}}$, veja (4.2.4), é $\mathbf{a}$. $\square$

Exercício 4.2.4. Mostre que as entradas a_{ij} da matriz $\mathbf{a} := [A]$ satisfazem

$$Ae_i = E_1 a_{1i} + \cdots + E_m a_{mi} =: \mathcal{E}^m \mathbf{a}_{\bullet i}$$

para cada um elemento e_i da base $\mathcal{E}^n$ e onde $\mathcal{E}^m = \{E_1, \ldots, E_m\}$.

Exemplo 4.2.5. Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ determinado por

$$A(1,1) = (1,2,3) \quad \text{e} \quad A(-1,1) = (1,1,1).$$

Pede-se a matriz $\mathbf{a}$ de A relativamente às bases canônicas.

Uma solução. Denotamos de $\mathcal{E}^2 = \{e_1, e_2\}$ e $\mathcal{E}^3 = \{E_1, E_2, E_3\}$ as bases canônicas. Precisamos escrever Ae_1 e Ae_2 como CL's dos vetores E_1, E_2, E_3 e colocar os coeficientes como colunas da matriz desejada. Sabemos que

$$\begin{aligned} A(1,1) &= (1,2,3) = (1,0,0) + (0,2,0) + (0,0,3) = E_1 + 2E_2 + 3E_3 \\ A(1,1) &= A((1,0) + (0,1)) = A(e_1 + e_2) = Ae_1 + Ae_2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} A(-1,1) &= (1,1,1) = (1,0,0) + (0,1,0) + (0,0,1) = E_1 + E_2 + E_3 \\ A(-1,1) &= A((-1,0) + (0,1)) = A(-e_1 + e_2) = -Ae_1 + Ae_2. \end{aligned}$$

Assim temos 2 equações lineares inomogeneas para as 2 incógnitas $x := Ae_1$ e $y := Ae_2$, com efeito

$$\begin{cases} x + y = E_1 + 2E_2 + 3E_3 \\ -x + y = E_1 + E_2 + E_3 \end{cases}.$$

Aplicamos escalonamento, adicionando a primeira equação para a segunda obtemos $2y = 2E_1 + 3E_2 + 4E_3$ e assim a CL

$$y = E_1 + \tfrac{3}{2}E_2 + 2E_3$$

cujas coeficientes formam a segunda ($y := Ae_2$) coluna da matriz $\mathbf{a} := [A]$. Use na primeira equação para receber os coeficientes da primeira coluna, ou seja

$$x = -y + (E_1 + 2E_2 + 4E_3) = 0E_1 + \tfrac{1}{2}E_2 + 1E_3.$$

Então a matriz é a seguinte

$$\mathbf{a} = [A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Com certeza, vai ter outros caminhos como resolver. Acima vemos um.

Exercício 4.2.6. Tem-se uma transformação linear $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que

$$A(1,2) = (1,1,1,-1) \quad \text{e} \quad A(3,4) = (1,1,1,1).$$

Pede-se a matriz **a** de A relativamente às bases canônicas.

Exercício 4.2.7 (Vetores linha e coluna)**.** a) Mostre que a matriz de um funcional linear $\varphi \in (\mathbb{R}^n)^* := \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ é uma linha (matriz $1 \times n$) da forma

$$[\varphi] = \begin{bmatrix} \varphi e_1 & \dots & \varphi e_n \end{bmatrix}.$$

b) Mostre que a matriz de uma reta no $\mathbb{R}^n$ passando a origem, ou seja $R \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, é uma coluna (matriz $n \times 1$) da forma

$$[R] = \begin{bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_n \end{bmatrix}$$

onde de $R_1, \dots, R_n$ denotamos os n membros da lista $Re_1 \in \mathbb{R}^n$ onde $e_1 = (1)$.

Lema 4.2.8 (Na dimensão 1 operadores correspondem a escalares)**.** *Seja* $\dim E = 1$ *e* $A \in \mathcal{L}(E)$*, então existe um único escalar* $\alpha \in \mathbb{K}$ *tal que o operador corresponde a multiplicação com* α*, em símbolos* $A = \alpha I_E$*.*

Demonstração. Pegue um elemento não-nulo $\xi \in E$. Então $\mathcal{B} := \{\xi\}$ é uma base de E: Com efeito é LI como $\xi \neq \mathcal{O}$, segundo Comentário 1.3.4 (ii), mas LI é equivalente a gera segundo Corolário 3.1.18. Como $\mathcal{B}$ é base com um elemento só, todo elemento de E é uma CL em $\{\xi\}$, assim um múltiplo escalar de ξ com coeficiente único. Então $E \ni A\xi = \alpha\xi$ para um único $\alpha \in \mathbb{K}$.
Analogamente todo $w \in E$ é da forma $w = \lambda\xi$ para um único $\lambda \in \mathbb{K}$. Segue que

$$Aw = A(\lambda\xi) = \lambda A\xi = \lambda(\alpha\xi) = (\lambda\alpha)\xi = (\alpha\lambda)\xi = \alpha(\lambda\xi) = \alpha w = \alpha I_E w$$

onde usamos vários axiomas do espaço vetorial. Isso prova que $A = \alpha I_E$. $\square$

4.3 Dimensão dois – o plano

No plano Π queremos estudar três tipos elementares de transformações lineares, nomeadamente

- rotação R_θ por um ângulo θ em torno de um centro O no plano;
- projeção ortogonal P_L sobre uma reta L no plano;
- reflexão S_L em torno de uma reta L no plano.

Mas o plano Π é composto de pontos... Como pode-se dar Π a estrutura de um espaço vetorial sobre o corpo dos números reais $\mathbb{R}$? Como pode-se adicionar pontos ou multiplicar por números? Não da.

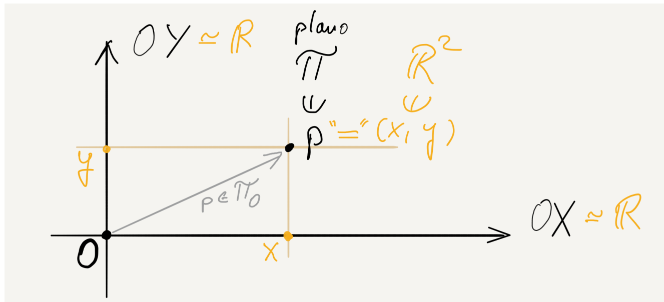

Figura 4.1: Sistema ortogonal de coordenadas OXY no plano Π

Mas pode-se adicionar flechas v no plano se consideramos iguais todas as flechas do mesmo comprimento e direção, veja Exemplo 0.0.1. Mais detalhado duas flechas são consideradas iguais se formam os lados opostos de um paralelogramo no qual os outros dois lados conectam, respectivamente, os dois pontos iniciais e os dois pontos terminais. Multiplicação de uma flecha v com um número real α muda o comprimento pelo fator α, trocando a direção caso $\alpha < 0$ é negativo. Adicionamos duas flechas pondo no ponto termino da primeira flecha o ponto inicial da segunda, veja Figura 1 na introdução do manuscrito.

Definição 4.3.1 (O espaço vetorial Π_O das flechas no plano de ponto início O)**.** Para eliminar a complicação que, dado uma flecha v, todo ponto $p \in \Pi$ nos da uma flecha equivalente (escolhendo p como ponto início), vamos fixar um ponto do plano, notação $O \in \Pi$. Neste caso todo ponto $p \in \Pi$ representa uma flecha só: por definição a flecha correndo de O a p. Vice versa, cada uma flecha em Π é equivalente a uma iniciando no ponto O. Seja

$$\Pi_O := (\Pi, O)$$

o conjunto das flechas no plano Π com ponto início O. Identificamos tal flecha com seu ponto termino $p \in \Pi$. Escrevendo $p \in \Pi$ significa que p é um ponto do plano, escrevendo $p \in \Pi_O$ significa que p é a flecha correndo de O a p. Para Π_O pode-se verificar os axiomas de um espaço vetorial real sob multiplicação escalar αp definida como mudando o comprimento da flecha com ponto termino p pelo fator $\alpha \in \mathbb{R}$ e adição $p + q$ definida pelo paralelogramo gerado, veja Figura 4.3.

Comentário 4.3.2. Note-se que são em bijeção o conjunto Π_O das flechas no plano Π iniciando no ponto O e o conjunto F no Exemplo 0.0.1 cujos elementos são flechas v no plano junto com todas flechas equivalentes a v. Adição e multiplicação escalar coincidem. Assim os espaços vetoriais F e Π_O são isomorfos.

Comentário 4.3.3 (Sistema de coordenadas Cartesianas OXY)**.** Escolhendo no plano Π dois eixos OX e OY ortogonal um ao outro, notação OXY, recebemos uma bijeção linear

$$\Pi_O \to \mathbb{R}^2, \quad p \mapsto (x, y)$$

como definida em (0.0.1) e ilustrada na Figura 4.1. Tal escolha OXY é chamado de **sistema de coordenadas Cartesianas** ou **ortogonais**.

4.3.1 Rotações

Seja Π_O o plano Π junto com um ponto $O \in \Pi$ fixado. Suponha que podemos medir distância no plano, assim ângulos – através de comprimento de arco – entre semi-retas do mesmo ponto inicial. Para os elementos $p \in \Pi_O$ (pontos do plano interpretado simultaneamente como flecha de O ao ponto), denotamos de

- C_p o círculo com centro O e passando p, veja Figura 4.2;
- ℓ_p a semi-reta iniciando em O e passando p (se $p = O$ seja $\ell_O := \{O\}$);
- $\ell_p(\theta)$ a semi-reta obtida pela rotação de ℓ_p em torno O pelo ângulo θ no sentido contra-horário.

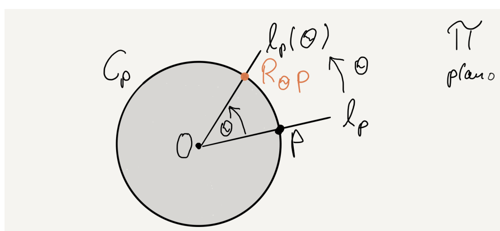

Figura 4.2: Rotação R_θ no plano Π em torno do ponto O por um ângulo θ

Definição 4.3.4 (Rotação)**.** A aplicação definida por

$$R_\theta : \Pi_O \to \Pi_O, \quad p \mapsto \ell_p(\theta) \cap C_p$$

é chamado de **rotação** no plano Π em torno de O por o ângulo θ.

Comentário 4.3.5 (Preservação de comprimento e ângulos)**.** Como o resultado da rotação é localizado no mesmo círculo a distância de O fica constante. O ângulo φ entre duas flechas $p, q \in \Pi_O$ fica constante se aplicamos a rotação R_θ pelo *mesmo* ângulo θ em ambas flechas, veja Figura 4.3.

Lema 4.3.6. *Dado um ângulo θ, a rotação $R_\theta : \Pi_O \to \Pi_O$ é linear.*

Demonstração. Lembre que os elementos $p \in \Pi_O$ são pontos do plano visto como flechas de O a p. O comprimento da flecha é a distância dos pontos p e O. Dado p, denotamos ambos, **comprimento da flecha** e **distância de $\mathcal{O}$**, com o símbolo $|\boldsymbol{p}|$.

Preservação de comprimento $\Rightarrow$ multiplicativo. Dado um ponto p e um

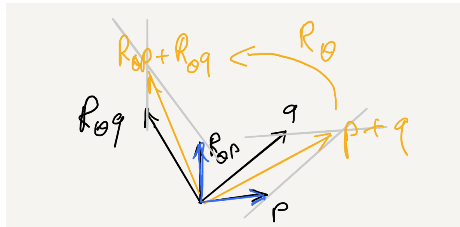

Figura 4.3: Preservação de ângulos

escalar $\alpha \in \mathbb{R}$. Se $p = O$ ou $\alpha = 0$ temos $R_\theta(\alpha p) = R_\theta(O) = O = \alpha R_\theta(p)$. Seja então $p \neq O$ e $\alpha \neq 0$. Segundo preservação de comprimento obtemos

$$\frac{|R_\theta(\alpha p)|}{|R_\theta(p)|} = \frac{|\alpha p|}{|p|} = \pm\alpha \quad \text{então} \quad |R_\theta(\alpha p)| = \pm\alpha |R_\theta(p)|$$

onde o sinal em $+/-\alpha$ depende se α é positivo/negativo.

Resta eliminar os absolutos. No caso $\alpha > 0$ os pontos αp e p estão na mesma semi-reta, mas rotação preserva esta propriedade, assim $R_\theta(\alpha p) = \alpha R_\theta(p)$. No caso $\alpha < 0$ os pontos αp e p estão em semi-retas opostas. Rotação também preserva esta propriedade, assim $R_\theta(\alpha p)$ e $R_\theta(p)$ são múltiplos negativos um do outro. Como $|R_\theta(\alpha p)| = -\alpha |R_\theta(p)|$ segue que $R_\theta(\alpha p) = \alpha R_\theta(p)$.

Preservação de ângulos $\Rightarrow$ aditivo. Dado pontos p, q, considere o paralelogramo definindo a soma $p + q$. Aplicando a rotação sabemos que $R_\theta p$ e $R_\theta q$ formam o mesmo ângulo como p e q. Então o paralelogramo gerado por $R_\theta p$ e $R_\theta q$ resulta daquele gerado por p e q através de aplicar R_θ. Mas assim a diagonal $R_\theta p + R_\theta q$ resulta de aplicar R_θ à diagonal $p + q$ do paralelogramo original, em símbolos $R_\theta p + R_\theta q = R_\theta(p + q)$. □

A matriz da rotação num sistema ortogonal de coordenadas

Conforme a definição de eixo, veja Comentário 0.0.3, o vetor unitário no eixo OX é a flecha correndo de O ao ponto X, notação E_1. Analogamente denotamos de E_2 o vetor unitário no eixo OY

Por definição a matriz $\mathbf{r}_\theta$ da rotação R_θ em respeito à base $\mathcal{E} := \{E_1, E_2\}$ contem como colunas os coeficientes (veja Figura 4.4) de

$$R_\theta E_1 = E_1 \cos\theta + E_2 \sin\theta, \qquad R_\theta E_2 = -E_1 \sin\theta + E_2 \cos\theta.$$

Lema 4.3.7. *A **matriz da rotação** pelo ângulo θ é a matriz real*

$$\mathbf{r}_\theta := [R_\theta]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{4.3.1}$$

Lembramos que o sistema ortogonal de coordenadas disponibiliza uma correspondência $\Pi_O \simeq \mathbb{R}^2$ na qual a base $\{E_1, E_2\}$ corresponde à base canônica $\mathcal{E}^2 = \{e_1, e_2\}$. Obviamente é mais confortável trabalhar com as listas de $\mathbb{R}^2$ como com as flechas de Π_O. Assim vamos trabalhar no futuro com $\mathbb{R}^2$.

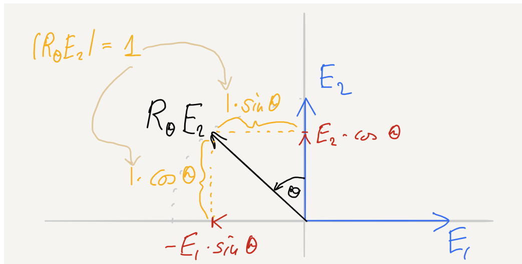

Figura 4.4: Rotação do vetor unitário – coeficientes formam coluna 2 da matriz

4.3.2 Projeção ortogonal sobre uma reta

Trabalhamos no plano identificado com $\mathbb{R}^2$ mediante um sistema ortogonal de coordenadas.

Definição 4.3.8 (Projeção ortogonal)**.** Seja $a \in \mathbb{R}$ uma constante e seja $L_a := \mathbb{R}(1,a)$ a reta no $\mathbb{R}^2$ passando a origem $\mathcal{O} = (0,0)$ e o ponto $(1,a)$ como ilustrado na Figura 4.5. Para um elemento $v \in \mathbb{R}^2$ seja $(L_a)_v^\perp$ a reta ortogonal a L_a e passando o ponto v. Então a aplicação que leva v à interseção das duas retas

$$P = P_{L_a} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad v \mapsto L_a \cap (L_a)_v^\perp \tag{4.3.2}$$

é chamado de **projeção ortogonal** sobre a reta L_a.

Lema 4.3.9. *A projeção ortogonal $P = P_{L_a} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é linear.*

Demonstração. Multiplicativo. Similarmente como na prova de Lema 4.3.4 discrimina-se três casos $\alpha < 0$, ($\alpha = 0$ ou $v = \mathcal{O}$), e $\alpha > 0$. Vamos tratar o caso $\alpha > 0$ e deixar os outros ao leitor. Para $\alpha > 0$ e $v \neq \mathcal{O}$ obtemos

$$\frac{|v|}{|Pv|} = \frac{|\alpha v|}{|P\alpha v|} = \frac{\alpha |v|}{|P\alpha v|}$$

onde temos usado o Teorema do Raio na primeira igualdade. Como $|v| \neq 0$ segue, cortando $|v|$, que $|P\alpha v| = \alpha |Pv|$. Como $P\alpha v$ e Pv são elementos da

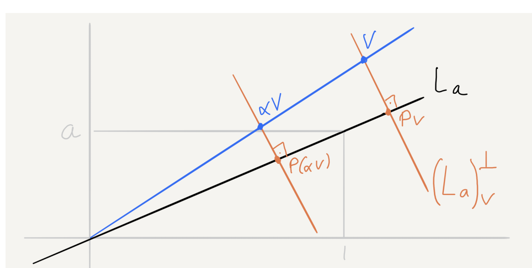

Figura 4.5: Projeção ortogonal P sobre a reta L_a

mesma ($\alpha > 0$) semi-reta de L_a, obtém-se $P\alpha v = \alpha P v$.

Aditivo. A identidade $P(v + w) = Pv + Pw$ resulta da Figura 4.6. □

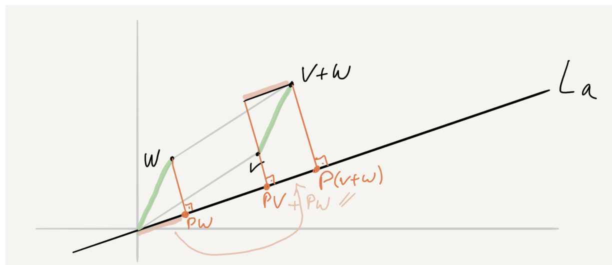

Figura 4.6: A identidade $P(v + w) = Pv + Pw$

A matriz da projeção ortogonal

Trabalhamos no plano identificado com $\mathbb{R}^2$ mediante um sistema ortogonal de coordenadas.

Lema 4.3.10. *A* ***matriz da projeção ortogonal*** *sobre a reta L_a é dada por*

$$\mathbf{p}_a := [P_{L_a}] = \frac{1}{1+a^2}\begin{bmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Lema C.4.1 □

4.3.3 Reflexão ortogonal em torno de uma reta

Trabalhamos no plano identificado com $\mathbb{R}^2$ mediante um sistema ortogonal de coordenadas.

Definição 4.3.11 (Reflexão ortogonal)**.** Dado $a \in \mathbb{R}$, a aplicação definida assim

$$\begin{aligned} S = S_{L_a} : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ v &\mapsto v + 2(P_{L_a} v - v) = (2P_{L_a} - I)v \end{aligned} \tag{4.3.3}$$

é chamado de **reflexão** em torno da reta L_a. Note que $S = 2P - I$ é linear.

Use Proposição 4.2.3 e a matriz de P para obter a **matriz da reflexão** em torno da reta L_a, com efeito

$$\mathbf{s}_a := [S_{L_a}] = [2P_{L_a} - I] = 2\mathbf{p}_a - \mathbb{1} = \frac{1}{1+a^2}\begin{bmatrix} 1-a^2 & 2a \\ 2a & -(1-a^2) \end{bmatrix}. \tag{4.3.4}$$

Exercício 4.3.12 (Rotação, projeção, reflexão)**.**

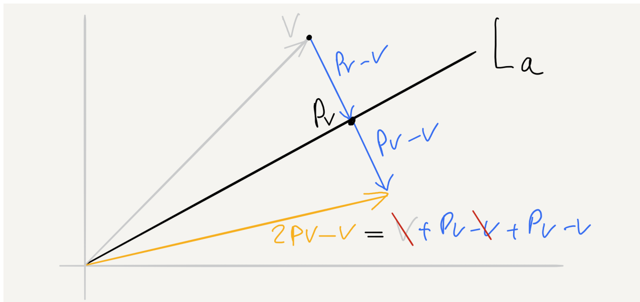

Figura 4.7: Reflexão $S = 2P - I$ em torno da reta L_a

1. Sejam $R, P, S \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ respectivamente a rotação de 30° em torno da origem, a projeção ortogonal sobre a reta $y = \frac{1}{3}x$ (notação $L_{\frac{1}{3}}$) e a reflexão em torno da mesma reta.

   Dado o vetor $v = (2, 5)$, determine suas imagens Rv, Pv, Sv.

2. Considere os operadores lineares $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por

$$R = R_{30^\circ}, \qquad S = S_{L_2}, \qquad P = P_{L_2}.$$

   (a) Mostre que se tem $PS = SP = P$.
   (b) Verifique a igualdade $RSR = S$.
   (c) Mostre que R não comuta com S nem com P.
   (d) Determine todos os vetores v tais que $RPv = 0$ e também todos v tais que $RPv \neq 0$.

3. Encontre $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que o operador

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (ax + by, cx + dy) \end{aligned}$$

   tenha como núcleo a reta $y = 3x$.

4.4 Ap.: Produto de transformações lineares

Sejam E, F, G, H espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$.

Definição 4.4.1. A composição de transformações lineares da forma

$$\begin{aligned} \circ\colon \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G) &\to \mathcal{L}(E, G) \\ (A, B) &\mapsto BA \end{aligned}$$

onde $BA := B \circ A$ é definido como $v \mapsto B(Av)$, é chamado de **produto de transformações lineares** compatíveis.

Exercício 4.4.2 (Bem definido)**.** Mostre que $BA\colon E \to G$ é linear.

Comentário 4.4.3 (Propriedades do produto "composição")**.** Para transformações lineares compatíveis A, B, C e escalares $\alpha \in \mathbb{K}$ vale o seguinte.

(Associatividade)	$(CB)A = C(BA)$
(Distributividade à esquerda)	$(B + C)A = BA + CA$
(Distributividade à direita)	$C(A + B) = CA + CB$
(Homogeneidade)	$B(\alpha A) = \alpha BA$
(Elemento neutro da esq./dir.)	$I_F A = A = AI_E$

O produto de transformações lineares em E, ou seja

$$\circ\colon \mathcal{L}(E, E) \times \mathcal{L}(E, E) \to \mathcal{L}(E, E), \quad (A, B) \mapsto BA$$

generaliza o **produto de números** observe que $\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad (a, b) \mapsto ba = ab.$$

Enquanto umas propriedades úteis são perdidas, umas novas são ganhadas.

Comentário 4.4.4 (Diferenças ao produto entre números)**.**

(~~Comutatividade~~)[9]	$P_{L_1} R_{\pi/2} \neq R_{\pi/2} P_{L_1}$
(~~Lei da corte~~)	$P_{L_a} P_{L_a} = P_{L_a} = P_{L_a} I \;\not\Rightarrow\; P_{L_a} = I$
(~~Inverso multiplicativo~~)[10]	$\nexists Q \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)\colon\; QP_{L_a} = I$
(Nilpotentes)	$\boldsymbol{a} := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =: \mathbf{0}$ mas $\boldsymbol{a}^2 = \mathbf{0}$
(Mais raizes)	$S := S_{L_a} \neq \pm I$ mas $S^2 := SS = I$

[9] Com $v = (x, y)$ obtemos $P_{L_1} R_{\pi/2} v = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x - y \\ x - y \end{bmatrix} \neq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -(x + y) \\ x + y \end{bmatrix} = R_{\pi/2} P_{L_1} v$.

[10] Suponha por absurdo $QP_{L_a} = I$. Então $P_{L_a} = QP_{L_a} P_{L_a} = QP_{L_a} = I$. Contradição.

Referências Bibliográficas

[Art91] Michael Artin. *Algebra*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1991.

[EHH+92] H.-D. Ebbinghaus, H. Hermes, F. Hirzebruch, M. Koecher, K. Mainzer, A. Prestel, and R. Remmert. *Zahlen*, volume 1 of *Grundwissen Mathematik [Basic Knowledge in Mathematics]*. Springer-Verlag, Berlin, 3rd edition, 1992. Edited and with an introduction by K. Lamotke.

[Hir21] Oliver Hirsch. Die Psychologie der Gedankenkontrolle, des Mentizids und der Gehirnwäsche. Zugang pdf, January 2021.

[Koe85] Max Koecher. *Lineare Algebra und analytische Geometrie*. Grundwissen Mathematik 2. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, Zweite Auflage,

[Lan93] Serge Lang. *Algebra. 3rd ed.* Reading, MA: Addison Wesley, 1993.

[Lim05] Elon Lages Lima. *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Coleção Matemática Universitária. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, Segunda Edição, 2005.

[Lim11] Elon Lages Lima. *Álgebra Linear*. Coleção Matemática Universitária. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, Oitava Edição, 2011.

[Mee56] Joost A.M. Meerloo. *The Rape of the Mind. The Psychology of Thought Control, Menticide, and Brainwashing*. 1956. access pdf.

[Pul12] Petronio Pulino. *Álgebra Linear e suas Aplicações*. Notas da Aula, UNICAMP, 2012. Acessível no site www.ime.unicamp.br/~pulino/ALESA.

[Sal19] Dietmar A. Salamon. *Análise em dimensões superiores*. Tradução de J. Weber de Alemão para Português. 2019. ix+376p. pdf

[San12] Reginaldo J. Santos. Matrizes, Vetores e Geometria Analítica. Manuscrito, UFMG, 03 2012.