Departamento de Matemática — 1º Semestre de 2024
Imecc Unicamp
Joa Weber

Álgebra Linear

MA327 – Turma O

Lista 1c – Base e Dimensão

Definição 1. Uma **base de um espaço vetorial** E é um subconjunto $\mathcal{B} \subset E$ a qual é LI e gera E. Se E admite uma base finita $\mathcal{B}$, então chamamos o número $n := |B| < \infty$ de elementos de $\mathcal{B}$ a **dimensão do espaço vetorial** E, denotado $\dim E$. Neste caso chamamos E um espaço vetorial de **dimensão finita** n.

Uma **base ordenada** de um espaço vetorial E de dimensão n é uma base $\mathcal{B} = \{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ cujos elementos são enumerados. Às vezes é útil escrever uma base ordenada como uma lista ordenada $(\xi_1, \dots, \xi_n)$.

Exercícios. Na Lista 1b é definido o espaço vetorial $\mathrm{M}(m \times n)$ das matrizes reais $m \times n$ e a soma direta $F_1 \oplus F_2$ de dois subespaços.

1) Mostre que

   i) o conjunto $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ das matrizes reais

   $$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

   é um conjunto LI;

   ii) o conjunto dos polinômios reais abaixo é LI:

   $$\begin{aligned} p = p(x) &= x^3 - 5x^2 + 1, \\ q = q(x) &= 2x^4 + 5x - 6, \\ r = r(x) &= x^2 - 5x + 2. \end{aligned}$$

2) Seja $E = F_1 \oplus F_2$. Se $\mathcal{B}_1$ é uma base de F_1 e $\mathcal{B}_2$ é uma base de F_2, prove que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ é uma base de E.

3) Mostre que os polinômios 1, $x - 1$ e $x^2 - 3x + 1$ formam uma base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Exprima o polinômio $2x^2 - 5x + 6$ como combinação linear dos elementos dessa base.

4) Seja $\mathcal{S} \subset \mathrm{M}(n \times n)$ o subconjunto das **matrizes simétricas**:

   $$\mathbf{a} = (a_{ij}) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow (a_{ij}) = (a_{ji}) \in \mathrm{M}(n \times n).$$

   Para cada par (i, j) de números naturais com $1 \leq i \leq j \leq n$, seja $\mathbf{e}_{ij}$ a matriz $n \times n$ cujos elementos nas posições ij e ji são iguais a 1 e os demais são zero.

Prove que estas matrizes constituem uma base para o subespaço $\mathcal{S} \subset \mathrm{M}(n\times n)$. De modo análogo, obtenha uma base do subespaço $\mathcal{A} \subset \mathrm{M}(n\times n)$ das **matrizes anti-simétricas** definido por $(a_{ij}) = (-a_{ji})$. Conclua que

$$\dim \mathcal{S} = \frac{n(n+1)}{2}\ , \qquad\qquad \dim \mathcal{A} = \frac{n(n-1)}{2}\ .$$

Lembre-se que $\dim \mathrm{M}(n \times n) = n^2$. Conclua que

$$\mathrm{M}(n \times n) = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}.$$

5) As matrizes $\mathbf{t} = (t_{ij}) \in \mathrm{M}(n \times n)$ tais que $t_{ij} = 0$ quando $i < j$ são chamadas **triangulares inferiores**. Prove que elas constituem um subespaço $L \subset \mathrm{M}(n\times n)$. Obtenha uma base para L e determine a sua dimensão.

6) Obtenha uma base e consequentemente determine a dimensão de cada um dos seguintes subespaços de $\mathrm{M}(n \times n)$:

   i) Matrizes $\mathbf{a} = (a_{ij})$ cujo **traço**

   $$\mathrm{tr}\,\mathbf{a} := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

   (soma dos elementos da diagonal) é zero.

   ii) Matrizes cuja primeira e última linha são iguais.

   iii) Matrizes cuja segunda linha e terceira coluna são iguais.

7) Sejam $X_1, X_2, \ldots$ subconjuntos LI de um espaço vetorial E.

   i) Se $X_1 \subset X_2 \subset \ldots$, prove que $X = \bigcup X_n$ é LI.

   ii) Se cada X_n tem n elementos, prove que existe um conjunto linearmente independente $\tilde{X} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ com $x_j \in X_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

   iii) Supondo $E = \mathbb{R}^\infty_0$ (veja*) e admitindo as hipóteses dos itens anteriores, é verdade que $X = \bigcup X_n$ seja uma base de E?

8) Se o conjunto de vetores $\{v_1, \ldots, v_m\}$ é LI, prove que o mesmo se dá com o conjunto $\{v_1, v_2 - v_1, \ldots, v_m - v_1\}$. Vale a recíproca?

9) Sejam $F_1, F_2 \subset E$ subespaços de dimensão finita. Obtenha uma base do subespaço $F_1 + F_2$ que contenha uma base de F_1, uma base de F_2 e uma base de $F_1 \cap F_2$.

*Seja $\mathbb{R}^\infty$ o espaço vetorial das sequências reais. Seu subespaço $\mathbb{R}^\infty_0$ é formado das sequências quais contém só um número finito de membros não-nulos.